

**VALORIZAÇÃO DAS AMOSTRAS  
APLICADA À SIMULAÇÃO DE  
SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO  
DIGITAL EM CANAL AWGN,  
RAYLEIGH E COM CÓDIGOS DE  
BLOCO**

**LÍGIA MARIA LIMA DA SILVA**

**NOVEMBRO/ 2008**

**INSTITUTO NACIONAL DE TELECOMUNICAÇÕES – INATEL**

**MESTRADO EM TELECOMUNICAÇÕES**

**VALORIZAÇÃO DAS AMOSTRAS APLICADA À SIMULAÇÃO DE  
SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO DIGITAL EM CANAL AWGN,  
RAYLEIGH E COM CÓDIGOS DE BLOCO.**

**LÍGIA MARIA LIMA DA SILVA**

Dissertação a ser apresentada ao Mestrado em Telecomunicações do Instituto Nacional de Telecomunicações – INATEL, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Telecomunicações.

**ORIENTADOR: PROF. DR. DAYAN ADIONEL GUIMARÃES.**

**SANTA RITA DO SAPUCAÍ - MG**

**2008**

**LÍGIA MARIA LIMA DA SILVA**

**VALORIZAÇÃO DAS AMOSTRAS APLICADA À SIMULAÇÃO DE  
SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO DIGITAL EM CANAL AWGN,  
RAYLEIGH E COM CÓDIGOS DE BLOCO.**

Santa Rita do Sapucaí, de 8 de Novembro de 2008.

**Membros da Banca**

---

Prof. Dr. Dayan Adionel Guimarães

Presidente - INATEL

---

Prof. Dr. Paulo Cardieri

Examinador Externo – DECOM/FEEC/UNICAMP

---

Prof. Dr. Carlos Alberto Ynoguti

Examinador Interno - INATEL

## **DEDICATÓRIA**

Dedico à minha filha Ana Clara, meu amor,  
razão pela minha luta e persistência.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus e a nossa Senhora que sempre me amparou nos momentos difíceis.

Agradeço aos meus pais, Valberto Ferreira da Silva e Neuza Maria Lima da Silva, e minhas irmãs Lívia e Líria pelo apoio incondicional na minha vida.

Agradeço a minha filha, Ana Clara pelos diversos momentos de ternura.

Agradeço ao orientador Prof. Dr. Dayan Adionel Guimarães, pela sábia e segura orientação e pela paciência que teve ao longo desses anos ao esclarecer minhas dúvidas de forma tão brilhante.

Agradeço aos amigos que fiz no Inatel, em especial Crishna Irion, Rafael Mendes Vilela e Marcelo Sabsud.

Agradeço aos professores do mestrado, em especial aos professores Carlos Alberto Ynoguti e Antônio Justino Ribeiro não só pela qualidade de suas aulas como também pelo lado humano que me motivou a seguir em frente durante tantas vezes.

Agradeço ao Inatel, por carregar a bandeira da qualidade de ensino.

Agradeço a Deus.

## RESUMO

O uso de simulações tem desempenhado um importante papel na concepção de sistemas de comunicação. Na simulação desses sistemas a forma mais utilizada de avaliar seu desempenho é através da taxa de erro de bit do sistema, parâmetro o qual fornece uma medida estatística da confiabilidade desses sistemas. Monte Carlo é o método mais utilizado para a estimação da probabilidade de erro de bit por não levar em conta a arquitetura ou a complexidade desses sistemas. Embora seja simples esse método apresenta um elevado custo computacional quando a probabilidade de erro de bit do sistema é baixa.

A Valorização das Amostras é uma técnica de redução de variância que apresenta o maior potencial para acelerar o processo de simulação. A implementação da técnica consiste em aumentar a ocorrência de erros através de uma polarização controlada nas distribuições de probabilidade de modo que se reforce os valores “importantes” no cálculo da estimativa. Os resultados obtidos através dessa polarização devem ser devidamente ponderados por um fator que irá compensar ou desfazer essas mudanças, ou seja, os contadores de erro devem ser apropriadamente despolarizados.

Ambos os métodos de Monte Carlo e da Valorização das Amostras são apresentados, descritos e comparados em termos de sua eficiência. Ao contrario do método de Monte Carlo, a utilização da Valorização das Amostras deve ser combinada com o funcionamento do sistema em questão, e isso é que traz a necessidade de sua aplicação ser particularizada de acordo com o sistema adotado. Nesta tese são mostradas essas particularidades em relação a três cenários distintos: sistema de comunicação digital em um canal AWGN, sistema de comunicação em um canal com desvanecimento plano e sistema de comunicação com código corretor de erro.

**Palavras-chave:** Valorização de amostras; simulação; comunicação digital; desvanecimento; códigos corretores de erro.

## **ABSTRACT**

The use of simulations has played an important role in the conception of a communication system. When these systems are simulated, the most widespread way to assess their performance is the system bit error rate. This parameter provides a statistic measure of the reliability of these systems. The Monte Carlo is the most commonly method used to estimate the bit error probability because it does not take into account the architecture or the complexity of these systems. Although this method is simple, it presents a high computational cost when the bit error probability of the system is low.

The Importance Sampling is a variance reduction technique that presents the greatest potential to accelerate the simulation processes. The implementation of this technique consists of increasing the occurrence errors through a controlled biasing in the probability distributions, in a way that the 'important' values in the estimate calculations are reinforced. The results attained through this polarization must be properly pondered by a factor that will compensate or undo these changes, i.e., the error counter must be properly depolarized.

Both Monte Carlo and Importance Sampling methods are presented, described and compared in terms of efficiency. Differently from the Monte Carlo method, the use of the Importance Sampling must be combined with the system that is being analyzed, and that is what brings the necessity for its application to be particularized according to the adopted system. This dissertation shows these particularities in relation to three different scenarios: digital communication system in an AWGN channel, communication system in a channel with flat fading and communication system with an error correcting code.

*Keywords:* Importance sampling; simulation; digital communication; fading; error-correcting codes.

# SUMÁRIO

<b>RESUMO .....</b>	<b>VI</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>VII</b>
<b>LISTA DE FIGURAS.....</b>	<b>X</b>
<b>LISTA DE TABELAS.....</b>	<b>XI</b>
<b>LISTA DE REDUÇÕES .....</b>	<b>XII</b>
<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>XVI</b>
1.1 HISTÓRICO DO DESENVOLVIMENTO DA VALORIZAÇÃO DAS AMOSTRAS .....	XVIII
1.2 CONTRIBUIÇÃO DA DISSERTAÇÃO.....	XIX
1.3 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO .....	XIX
<b>2. FUNDAMENTOS .....</b>	<b>18</b>
2.1 DESCRIÇÃO GERAL.....	18
2.2 ESTIMAÇÃO DA PROBABILIDADE DE ERRO NOS SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO DIGITAL.....	19
2.2.1. Elementos de um Sistema de Comunicação Digital .....	19
2.2.2 Sistema de Comunicação em canal AWGN .....	20
2.2.3 Sistema de Comunicação em canal com desvanecimento plano.....	25
2.2.3.1 Modelagem Estatística de um canal com desvanecimento Rayleigh.....	26
2.2.3.2 Descrição do Sistema com Desvanecimento Rayleigh .....	30
2.2.4 Sistema de Comunicação com Códigos Corretores de Erro .....	32
2.2.4.1 Códigos de Bloco Lineares.....	33
2.2.4.2 Canal Binário Simétrico .....	37
2.2.4.3 Descrição do Sistema com Codificação de Canal .....	38
2.3 MÉTODO DE MONTE CARLO .....	41
2.3.1 Propriedades Estatísticas do Estimador de Monte Carlo .....	42
2.3.2 Análise do Intervalo de Confiança.....	43
2.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	47
<b>3. VALORIZAÇÃO DAS AMOSTRAS.....</b>	<b>48</b>
3.1 FUNDAMENTOS.....	49
3.2 PROPRIEDADES ESTATÍSTICAS DO ESTIMADOR DA VALORIZAÇÃO DAS AMOSTRAS .....	51
3.3 GANHOS DE SIMULAÇÃO .....	53



3.4 POLARIZAÇÃO DA FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE GAUSSIANA .....	54
3.4.1 Método do Escalonamento .....	56
3.5 SUMÁRIO .....	63
<b>4. ESTUDOS DE CASO SOBRE APLICAÇÕES DA VALORIZAÇÃO DAS AMOSTRAS .....</b>	<b>65</b>
4.1 SISTEMAS COM MEMÓRIA .....	66
4.2 PROCEDIMENTOS DE SIMULAÇÃO PARA IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO ESCALONAMENTO.....	67
4.2.1 MÉTODO DE MONTE CARLO .....	67
4.2.2 VALORIZAÇÃO DAS AMOSTRAS EM UM CANAL AWGN .....	68
4.2.3 VALORIZAÇÃO DAS AMOSTRAS APLICADA EM UM CANAL COM DESVANECIMENTO PLANO .....	73
4.3 VALORIZAÇÃO DAS AMOSTRAS APLICADA EM UM SISTEMA COM CÓDIGO CORRETOR DE ERRO.....	79
4.3.1 FUNDAMENTOS .....	81
4.3.2 PROCEDIMENTOS DE SIMULAÇÃO .....	85
4.3.2.1 POLARIZAÇÃO DO CANAL .....	88
4.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	96
<b>5. CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>98</b>
5.1 CONTRIBUIÇÕES DA DISSERTAÇÃO .....	98
5.2 CONCLUSÕES.....	98
5.3 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....	101
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>102</b>

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1: DIAGRAMA EM BLOCOS SIMPLIFICADO DE UM SISTEMA DE COMUNICAÇÃO DIGITAL.....	19
FIGURA 2: DIAGRAMA EM BLOCOS DE UM SISTEMA COM RUÍDO AWGN. ....	21
FIGURA 3: PROBABILIDADE DE ERROS CONDICIONAIS. ....	22
FIGURA 4: RELAÇÃO ENTRE AS VARIÁVEIS DISCRETAS DE ENTRADA E DE SAÍDA DO SISTEMA. ....	24
FIGURA 5: ILUSTRAÇÃO DOS MÚLTIPLOS PERCURSOS. ....	26
FIGURA 6: (A) VARIÁVEL ALEATÓRIA DE RAYLEIGH. (B) FDP DE RAYLEIGH.....	29
FIGURA 7: DIAGRAMA EM BLOCOS DE UM SISTEMA COM DESVANECIMENTO. ....	30
FIGURA 8 : MODELO DE UM CANAL DISCRETO. ....	37
FIGURA 9: DIAGRAMA DE PROBABILIDADE DE TRANSIÇÃO DO BSC. ....	38
FIGURA 10: ILUSTRAÇÃO DO INTERVALO DE CONFIANÇA. ....	44
FIGURA 11: IMPLEMENTAÇÃO DA VALORIZAÇÃO DAS AMOSTRAS PELA ALTERAÇÃO DA VARIÂNCIA DA FDP DO RUÍDO. ....	55
FIGURA 12: AUMENTO DA PROBABILIDADE DOS EVENTOS LOCALIZADOS NA CAUDA PELA ALTERAÇÃO DA MÉDIA DA FDP DO RUÍDO. ....	56
FIGURA 13: GANHO VARIANDO COM OS VALORES DE $\alpha$ .....	62
FIGURA 14: MODELO DE SIMULAÇÃO UTILIZANDO O MÉTODO DE MONTE CARLO. ....	67
FIGURA 15: MODELO DE SIMULAÇÃO EM CANAL AWGN VIA VALORIZAÇÃO DAS AMOSTRAS.....	68
FIGURA 16: GRÁFICO COMPARATIVO DA PROBABILIDADE DE ERRO DE BIT TEÓRICA E SIMULADA POR MONTE CARLO E VALORIZAÇÃO DAS AMOSTRAS PARA UM CANAL AWGN. ....	72
FIGURA 17: MODELO DE SIMULAÇÃO EM CANAL COM DESVANECIMENTO PLANO VIA MÉTODO DE MONTE CARLO. ..	73
FIGURA 18: GERAÇÃO DAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS COM DISTRIBUIÇÃO DE RAYLEIGH. ....	74
FIGURA 19: GRÁFICO COMPARATIVO DA PROBABILIDADE DE ERRO DE BIT TEÓRICA E SIMULADA POR MONTE CARLO E VALORIZAÇÃO DAS AMOSTRAS PARA UM CANAL RAYLEIGH. ....	78
FIGURA 20: MODELO DE SIMULAÇÃO COM CÓDIGO DE HAMMING (7, 4) OPERANDO EM UM CANAL BSC.....	85
FIGURA 21: GRÁFICO COMPARATIVO DA PROBABILIDADE DE ERRO DE BIT TEÓRICA E SIMULADA POR MONTE CARLO E VALORIZAÇÃO DAS AMOSTRAS PARA O CANAL BSC. ....	95

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1: VALORES ÓTIMOS DE $\alpha$ EM FUNÇÃO DA PROBABILIDADE DE ERRO DE BIT. ....	61
TABELA 2: GANHO OBTIDO ATRAVÉS DA VALORIZAÇÃO DAS AMOSTRAS .....	71
TABELA 3: RESULTADOS OBTIDOS PARA VALORIZAÇÃO DAS AMOSTRAS. ....	77
TABELA 4: PALAVRAS-CÓDIGO CORRESPONDENTES ÀS MENSAGENS TRANSMITIDAS. ....	86
TABELA 5: PARÂMETROS DO CÓDIGO DE HAMMING (7,4).....	90
TABELA 6: ESTIMATIVAS DA PROBABILIDADE DE ERRO DE DECODIFICAÇÃO ESPECÍFICO PARA CADA $\lambda$ .....	91
TABELA 7: PROBABILIDADE DE ERRO DE BIT E GANHO DE SIMULAÇÃO. ....	93

## LISTA DE REDUÇÕES

Redução	Significado
$A$	Amplitude do sinal transmitido.
$a(t)$	Sinal transmitido contínuo no domínio do tempo.
ARQ	Automatic Repeat Request.
AWGN	Additive White Gaussian Noise.
BSC	Binary Symmetric Channel.
BPSK	Binary Phase Shifting Keying
$c$	Constante de normalização positiva.
$C_c$	Capacidade de detecção de um código de bloco linear.
$d_{\min}$	Distância mínima de Hamming.
$d(\mathbf{x}')$	Distância de Hamming do erro de decodificação específico.
$D(\mathbf{x})$	Região de decisão em relação a palavra-código $\mathbf{x}$ .
$e$	Padrão de erro.
$E_b$	Energia média por bit de informação.
$E(x)$	Esperança matemática da variável aleatória $x$ .
$\text{erfc}(x)$	Função erro complementar.
$E_b / N_o$	Relação sinal-ruído.
$f_c$	Frequência de portadora.
FDP	Função densidade de probabilidade.
FEC	Forward Error Correction.
$f_{\mathbf{X}}^*(x)$	Função densidade de probabilidade polarizada.
$f_{\mathbf{X}}(x)$	Função densidade de probabilidade original.
$f(\mathbf{y} \mathbf{x})$	Função densidade de probabilidade condicional conjunta da saída canal BSC.
$f^*(\mathbf{y} \mathbf{x})$	Função densidade de probabilidade condicional conjunta polarizada do canal BSC.

$g(\cdot)$	Função de sistema.
<b>G</b>	Matriz geradora.
<b>H</b>	Matriz verificadora de paridade.
$h(t)$	Função resposta ao impulso.
<b>I<sub>k</sub></b>	Matriz identidade
$I_E$	Função indicadora de erro.
IEEE	Institute of Electrical and Eletronics Engineers.
IIS	Interferência inter-simbólica.
LDPC	Low Density Parity Check.
	Função-amostra de um processo aleatório correspondente a um ruído branco e Gaussiano.
$n(t)$	Densidade espectral (bilateral) de potência do ruído, medida em W/ Hertz.
$N_0 / 2$	
$n_b$	Número de bits de informação decodificados.
$N_{mc}$	Execuções de Monte Carlo.
$N_{va}$	Execuções da Valorização das Amostras.
<b>P<sub>c</sub></b>	Parte de paridade da matriz geradora.
<b>P</b> = [ $p_{ji}$ ]	Matriz de probabilidades de transição.
PLC	Power Line Communication.
$p(t)$	Pulso básico contínuo no domínio do tempo.
$P(x)$	Função densidade de probabilidade da variável aleatória $x$ .
	Função densidade de probabilidade da variável aleatória $x$ condic
$P(x y)$	a observação da variável aleatória $y$ .
$P_p(\mathbf{x}_j)$	Probabilidade de erro de palavra em relação a $\mathbf{x}_j$ .
$\hat{P}_b^T$	Estimador truncado da probabilidade de erro de bit.
$P(\mathbf{x}_j \rightarrow \mathbf{x}_i)$	Probabilidade de erro par-a-par.
$P_b$	Probabilidade de erro de bit.

$\bar{P}(\mathbf{x}'   \mathbf{x})$	Probabilidade de erro de decisão binária.
$P(\mathbf{x}'   \mathbf{x})$	Probabilidade de erro de decodificação específica.
$P_p$	Probabilidade de erro de palavra.
$\hat{P}_{mc}$	Estimador de erros do método de Monte Carlo.
$\hat{P}_{va}$	Estimador de erros da técnica da Valorização das Amostras.
$Q(u)$	Distribuição Gaussiana complementar.
$R$	Envoltória do sinal recebido.
$R_c$	Taxa do código.
$r(t)$	Sinal recebido, contínuo no domínio do tempo.
$S$	Síndrome.
$s(t)$	Sinal na saída do canal, contínuo no domínio do tempo.
$t$	Número de bits que podem ser corrigidos pelo código.
$T_b$	Duração de um bit de informação.
UWC	Under Water Communication.
$\text{var}(x)$	Variância de $x$ .
$Z_I$	Componente em fase.
$Z_Q$	Componente em quadratura.
$Z(t)$	Sinal que chega no receptor com diferentes atenuações e atrasos.
$w(\cdot)$	Função de ponderação ou função peso
$W$	Número de elementos não nulos em um vetor.
WER	Word Error Rate.
$\Theta$	Fase decorrente de cada um dos $N$ múltiplos percursos.
$\theta$	Diferença de fase introduzido pelo canal no sinal recebido.
$\gamma(t)$	Envoltória de distorção multiplicativa introduzida pelo desvanec no sinal transmitido.
$\rho_b$	Valor da relação sinal-ruído instantânea na variável de decisão.
$\bar{\rho}_b$	Relação sinal-ruído média na recepção.

$\eta$	Fator de ganho ou de redução do número de execuções da simulação
$\sigma^2$	Variância da FDP.
$\prod$	Símbolo de produtório.
$\sum$	Símbolo de somatório.
$\lambda$	Probabilidade de cruzamento do BSC.
$\varepsilon$	Precisão Relativa.
$\alpha$	Fator constante do aumento da variância da FDP do ruído.
$\chi$	Alfabeto de entrada do canal discreto.
$\mathcal{Y}$	Alfabeto de saída do canal discreto.
$\Pi$	Probabilidades a priori dos bits transmitidos 0 ou 1.

## 1. INTRODUÇÃO

O uso de simulações tem desempenhado um importante papel na concepção de sistemas de comunicação. Várias técnicas computacionais têm sido desenvolvidas nos últimos anos com o intuito de auxiliar no processo de modelagem, análise e projeto desses sistemas. Essas técnicas podem ser divididas em duas categorias: abordagem analítica, onde é possível se avaliar fórmulas complexas e abordagem por simulação, onde é possível modelar os componentes individuais do sistema e conseqüentemente simular os sinais que fluem através do mesmo [18].

Embora a primeira abordagem seja amplamente utilizada, seu uso é limitado pelo grau de complexidade do sistema em questão, ou seja, existem situações onde a abordagem analítica se torna intratável. Para esses casos, a abordagem por simulação se torna mais viável devido à sua característica de possibilitar a reprodução fiel do sistema real, na grande maioria dos casos. Essa é a abordagem empregada neste trabalho.

A função básica de um sistema de comunicação é de processar formas de onda e símbolos transmitidos e, conseqüentemente, o uso de simulação é uma tentativa de imitar esses processos através da geração de valores amostrados desses sinais. Esse processo de simulação envolve as operações de modelagem do sinal, realizadas pelos diversos “blocos” funcionais do sistema de comunicação, gerando desta forma o sinal de entrada em diferentes instantes de tempo. A execução da simulação consiste em gerar os sinais de saída através do sinal de entrada, que é transmitido através do sistema. Através da análise desses sinais é possível otimizar o projeto de parâmetros ou se obter medidas da performance do sistema como, por exemplo, a probabilidade de erro de bit em um sistema de comunicação digital.

Os atuais sistemas de comunicação são implementados a partir de diversos blocos, cada qual possuindo determinada função. A simulação apropriada para cada bloco que compõe o sistema é realizada com base em um modelo teórico existente. Os valores específicos ou a faixa de valores permitidos para os parâmetros de cada bloco, como a largura de banda ou filtros, são determinados no início da simulação pelo projetista.

A geração dos valores amostrados de todos os sinais de entrada como, sinais, ruído e interferências são representados por processos aleatórios e os valores amostrados desses



processos são gerados utilizando-se geradores de números aleatórios. Durante a simulação, as saídas desses geradores de números aleatórios são aplicadas às entradas de determinados blocos para produzir valores amostrados nas saídas desses diversos blocos funcionais do sistema. Esse sinal amostrado na saída é gravado e analisado enquanto a simulação é executada ou ao final da simulação. Desta forma várias medidas da performance do sistema podem ser estimadas, dentre essas: a relação sinal-ruído (*SNR-Signal-to-Noise Ratio*), o erro médio quadrático e a probabilidade de erro de bit, onde esse último parâmetro será tratado durante toda a dissertação.

A forma mais utilizada de avaliar a performance de um sistema de comunicação digital é através da taxa de erro de bit do sistema (*BER-Bit Error Rate*) ou probabilidade de erro de bit. Esse parâmetro fornece uma medida estatística da confiabilidade desses sistemas. Monte Carlo é o método mais utilizado para a estimação da probabilidade de erro de bit por não levar em conta a arquitetura ou a complexidade desses sistemas. Embora seja simples, esse método apresenta limitações que se tornam um grande empecilho para a avaliação do desempenho do sistema.

O principal problema do método de Monte Carlo refere-se ao elevado tempo de simulação para se obter uma estimativa confiável da performance do sistema. Em alguns casos esse tempo de execução requerido pode ser tão longo que seu uso não representa uma alternativa prática. Para sistemas que operam em condição de baixa relação sinal-ruído esse método torna-se o mais indicado, porém para casos onde a probabilidade de erro de bit é baixa a sua utilização se torna inviável devido ao grande número de observações necessárias e, conseqüentemente, ao tempo de execução que pode se tornar proibitivo para se obter determinada precisão do parâmetro estimado.

Técnicas de Redução da Variância são muito utilizadas como uma alternativa para a redução no tempo de simulação. O princípio dessas técnicas consiste em fazer com que a variância da estimativa possa ser reduzida em relação à variância da estimativa obtida pelo método de Monte Carlo para um mesmo esforço computacional. A Valorização das Amostras (do inglês *Importance Sampling*) é a técnica de Redução da Variância que apresenta o maior potencial de redução do tempo de simulação em sistemas de comunicação digital [20] [41].

A idéia básica por trás da técnica da Valorização das Amostras consiste em fazer com que os eventos de probabilidade de ocorrência menor, que no contexto desse estudo se referem aos

erros, ocorram mais freqüentemente através da polarização da Função Densidade de Probabilidade das variáveis aleatórias da entrada do sistema que causam tais erros. Os resultados obtidos através dessa polarização devem ser ponderados por uma função chamada de função peso.

A grande dificuldade em se implementar a Valorização das Amostras nos sistemas de comunicação digital consiste em polarizar adequadamente a Função Densidade de Probabilidade de forma a reduzir de maneira substancial o tempo de execução de simulação.

### **1.1 Histórico do desenvolvimento da Valorização das Amostras**

O primeiro trabalho em simulação eficiente foi publicado em 1940 com as idéias de “divisão de partículas” e “roleta russa” usadas por Von Neumann [45]. O desenvolvimento da técnica da Valorização das Amostras se iniciou em 1950 com o trabalho de H. Kahn para o problema de atenuação de partículas [24].

A aplicação da técnica da valorização das amostras foi introduzida na área de comunicações digitais por Shanmugan e Balaban [39] em 1980, e desde então surgiram melhoramentos da mesma, destacando-se os trabalhos realizados em [30] e [12]. Seus conceitos foram amplamente desenvolvidos na área de comunicações digitais por Jeruchim e outros autores nos anos 80 [20], [44] e [22]. Esses trabalhos resultaram na sua aplicação a inúmeros tipos de sistemas [19], [3] e dentro do qual foram aparecendo meios de se determinar um bom modelo de polarização da função densidade de probabilidade visando melhorar a eficiência da simulação [23] e [29].

Em 1983 foi apresentado um trabalho pioneiro por Cottrell [11] onde uma teoria denominada de “Teoria do Grande Desvio” foi utilizada em conjunto com a Valorização das Amostras promovendo um grande impacto na aplicação da técnica nos sistemas de comunicações digitais. Este trabalho pioneiro foi então desenvolvido por Sadowsky, Bucklew e outros autores [36] e [8], resultando em importantes contribuições nas simulações dos eventos de erro [37] principalmente em sistemas com codificação de canal nos quais se destaca o trabalho desenvolvido nos anos 90 por Sadowsky [35]. A partir deste foram surgindo meios da aplicação

da Valorização das Amostras para sistemas que utilizam códigos de blocos concatenados [6] e para código produto com decodificação iterativa [43].

## 1.2 Contribuição da dissertação

A técnica da Valorização das Amostras embora seja conceitualmente simples carrega uma complexidade bastante elevada quando se pretende entendê-la a ponto de poder implementá-la em uma simulação. Além disso, a variedade de notação e de tratamento do assunto, incluindo as diversas formas de realizar sua aplicação faz com que a tarefa de implementação torne-se ainda mais complexa. Motivada por esta dificuldade, a autora desta dissertação utiliza uma abordagem unificada sobre a implementação da Valorização das Amostras na simulação de sistemas de comunicação digital em canal com ruído AWGN, canal com desvanecimento plano e em sistemas com codificação de canal. O trabalho apresenta-se como um compêndio realizado a partir do estudo e da interpretação de várias publicações a respeito do assunto, contendo as abordagens seguidas de estudos de caso com aplicações realizadas em simulações.

## 1.3 Organização da Dissertação

A dissertação está organizada em **cinco capítulos**. No **primeiro capítulo** foi apresentado um sucinto relato dos problemas existentes na simulação de sistemas de comunicação digital pelo método de Monte Carlo e os motivadores deste trabalho. O **segundo capítulo** apresenta o método de Monte Carlo para a estimação da probabilidade de erro de bit em um canal com ruído AWGN, canal com desvanecimento Rayleigh e em um sistema com codificação de canal. O **terceiro capítulo** apresenta os fundamentos da técnica da Valorização das Amostras. Neste capítulo são apresentados os conceitos que envolvem a escolha da Função Densidade de Probabilidade polarizada, mostrando o modelo de polarização proposto para a implementação da técnica. Ainda neste capítulo são apresentados os parâmetros necessários para a implementação do modelo de polarização escolhido bem como o cálculo analítico da eficiência da Valorização das Amostras em relação ao método de Monte Carlo. O **quarto capítulo** apresenta a implementação e os resultados obtidos utilizando a técnica da Valorização das Amostras na simulação dos sistemas de comunicação digital apresentados no segundo capítulo. O **quinto e último capítulo** apresenta algumas considerações finais, norteadas pelos estudos realizados e pelo trabalho de simulação desenvolvido e sugere as propostas de continuação do trabalho.

## 2. FUNDAMENTOS

### 2.1 Descrição Geral

A implementação de sistemas de comunicação digital é realizada através da utilização de blocos, os quais possuem funções específicas, como o transmissor, o codificador, o modulador, o canal, o demodulador, o decodificador, dentre outros. Esses elementos serão explicados em detalhes na Seção 2.2.

A utilização desses blocos permite que se consiga, através da variação de seus parâmetros, obter medidas a respeito do comportamento do sistema, em estudo, em diferentes situações. A medida padrão do desempenho de um sistema digital é a probabilidade de erro de bit para uma relação sinal-ruído fixa.

A probabilidade de erro de bit é obtida através das observações de erros, os quais ocorrem cada vez que o bit estimado na saída do sistema difere do bit transmitido. Desta forma, cada ponto da curva da probabilidade de erro de bit é obtido através dessas observações de erro em relação a um número total de bits gerados até que se atinja uma determinada precisão da estimativa. Esse procedimento é realizado de forma independente para cada relação sinal-ruído do sistema.

Existem diversas técnicas de simulação por computador para se estimar a probabilidade de erro de bit, pode-se citar dentre essas técnicas, o método de Monte Carlo, a Valorização das Amostras, a teoria do Grande Desvio, a extrapolação da cauda e a técnica “quase-analítica”. A escolha de um determinado método de estimação irá depender das particularidades do sistema, que em geral são especificadas em termos do esquema de modulação/codificação e da estrutura do receptor [20]. Explicações detalhadas de algumas técnicas de simulação podem ser encontradas no artigo de Jeruchim [20].

Este Capítulo apresenta o método de Monte Carlo (Seção 2.3) para a estimação da probabilidade de erro de bit em alguns sistemas de comunicação digital baseados em simulações. A probabilidade de erro de bit é estimada em relação à transmissão de dados binários através de um canal com ruído AWGN (*Additive White Gaussian Noise*), um canal com desvanecimento

Rayleigh e um sistema com codificação de canal. Na Seção 2.4 é realizada uma discussão sobre o que foi abordado no capítulo.

## 2.2 Estimação da Probabilidade de erro nos Sistemas de Comunicação Digital

### 2.2.1. Elementos de um Sistema de Comunicação Digital

Em um sistema de comunicação digital a informação a ser transmitida é transformada em uma seqüência de dígitos binários. Entre a fonte e o destino da informação, no caso, entre o transmissor e o receptor existe o meio físico pelo qual a informação é transmitida, denominado de canal. A característica essencial do canal é que ele corrompe de modo aleatório o sinal transmitido. Os modelos de canais utilizados em simulações se assemelham muito a um canal real permitindo simular os efeitos que o sinal sofre durante a transmissão.

Na Figura 1 tem-se um diagrama em blocos simplificado contendo os elementos básicos de um sistema de comunicação digital.

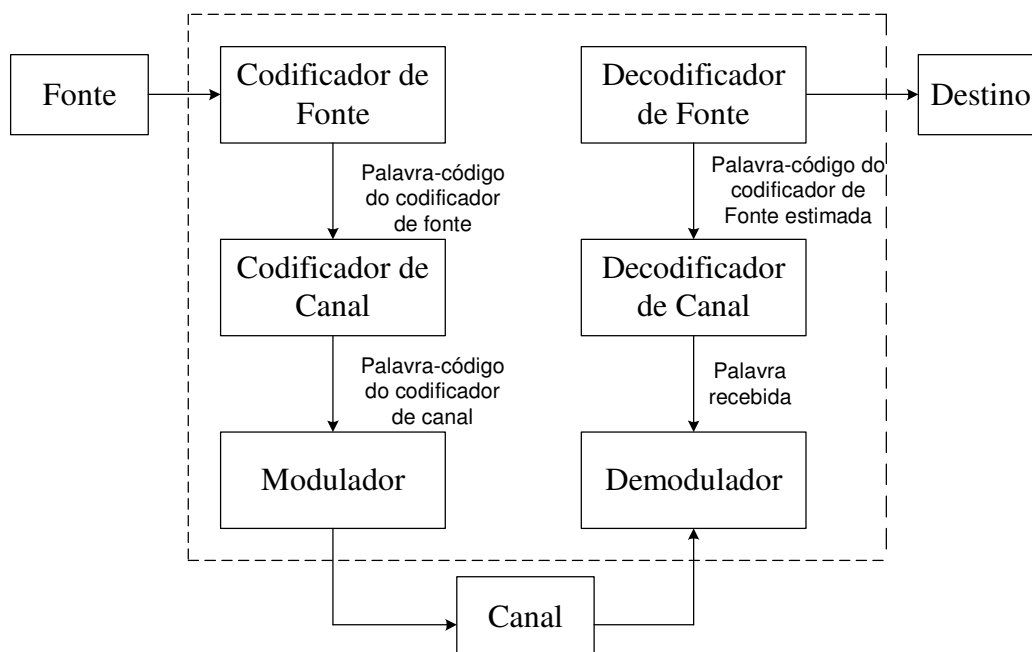


Figura 1: Diagrama em blocos simplificado de um sistema de comunicação digital.

A fonte é responsável pela geração da informação que será processada pelo codificador de fonte, que tem como função compactar a seqüência gerada, de dígitos binários, em uma seqüência de símbolos, denominada de palavra-código do codificador de fonte. A função do codificador de canal é introduzir de forma controlada redundâncias na palavra-código da fonte, de modo que seja possível ao receptor detectar e corrigir erros de bit causados pelo efeito do ruído e das interferências provocadas pelo canal. Deste modo a seqüência na saída do codificador, denominada de palavra-código, será um bloco de símbolos válidos composto da palavra-código da fonte mais bits de redundância.

A palavra-código gerada passa pelo modulador, que serve como uma interface entre o transmissor e o canal. O modulador mapeia a seqüência de palavras-código em uma seqüência de formas de onda, para que seja possível a transmissão pelo canal. Na recepção, o demodulador processa a forma de onda transmitida, a qual foi modificada como consequência da transmissão pelo canal e também corrompida de maneira aleatória pelo ruído do canal, e converte essa forma de onda em uma seqüência que representa uma melhor estimativa da palavra-código do canal [32].

Através do conhecimento do código utilizado pelo codificador de canal e dos bits de redundância introduzidos, o decodificador utiliza a seqüência gerada pelo demodulador para reconstruir a palavra-código de fonte transmitida. O decodificador de fonte, através do conhecimento do método de codificação utilizado, reconstrói a seqüência gerada pela fonte, que será comparada com a seqüência originalmente transmitida, produzindo uma estimativa da probabilidade de erro de bit do sistema.

### **2.2.2 Sistema de Comunicação em canal AWGN**

A estimação da probabilidade de erro de bit será apresentada em relação a um modelo de comunicação digital binária. O sistema em questão é composto de um transmissor, um canal e um receptor, como ilustrado na Figura 2. Nesse sistema pretende-se transmitir uma seqüência digital representada por uma seqüência de bits de entrada  $a_i$ , gerada pela fonte binária, através de um canal que introduz ruído aditivo gaussiano branco, denominado de canal AWGN.

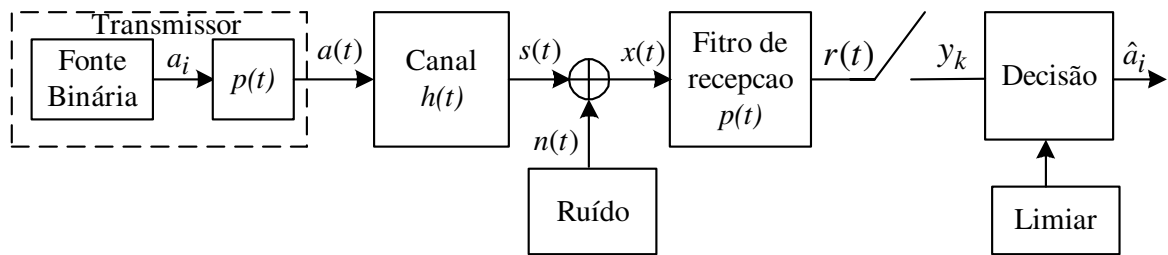


Figura 2: Diagrama em blocos de um sistema com ruído AWGN.

O dado transmitido  $a_i$  assumirá os valores de  $+A$  ou  $-A$ , com igual probabilidade de ocorrência, dependendo se o bit da entrada tiver valor 1 ou 0, respectivamente. O sinal transmitido  $a(t)$  pode ser escrito como:

$$a(t) = \sum_i a_i p(t - iT_b) \quad (2.1)$$

onde  $p(t)$  representa um pulso básico, por exemplo um pulso retangular. A variável  $T_b$  representa o tempo ocupado por um bit. O número de bits transmitidos por segundo é a taxa de bits,  $1/T_b$ .

O canal  $h(t)$  distorce o sinal transmitido  $a(t)$ , de modo que o sinal  $s(t)$  na saída do canal é dado por:

$$s(t) = h(a(t), t) \quad (2.2)$$

O canal também acrescenta ruído aleatório ao sinal  $s(t)$ . Dessa forma o sinal resultante na entrada do receptor é dado por:

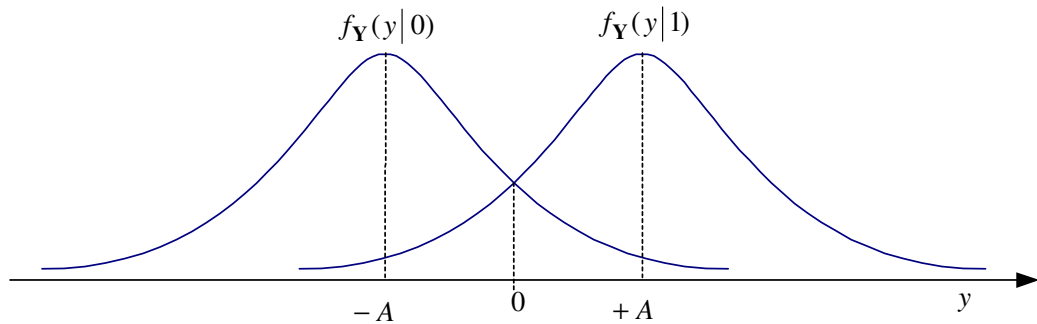
$$x(t) = s(t) + n(t) \quad (2.3)$$

onde  $n(t)$  é uma função-amostra de um processo aleatório correspondente a um ruído branco Gaussiano de valor médio igual a zero e densidade espectral de potência  $N_0/2$  W/Hz.

O sinal ruidoso  $x(t)$  passa pelo filtro de recepção, o qual é casado com a forma do pulso transmitido. A saída do filtro,  $r(t)$ , é amostrada em múltiplos inteiros de  $T_b$  segundos, onde o

valor da amostra obtido no final de um intervalo de sinalização é representado por  $y_k = r(kT_b)$ . Esses valores amostrados serão utilizados para determinar quais os símbolos binários que lhes correspondem.

No bloco de decisão, o valor da amostra  $y_k$  é comparado a um limiar para que se decida qual bit foi transmitido. Se o valor da amostra for maior que zero, a decisão será pelo bit 1, caso contrário a decisão será pelo bit 0. Devido ao fato do ruído ser uma variável aleatória Gaussiana, existe uma probabilidade não nula do valor da amostra  $y_k$  ter um valor menor que zero, considerando que o bit 1 foi enviado. De forma análoga ao se transmitir o bit 0 existe uma probabilidade não nula do valor da amostra possuir um valor maior que zero. Quando isto ocorrer o receptor irá decidir erroneamente pelo bit enviado. A Figura 3 ilustra essa situação. Nela são plotadas as funções densidade de probabilidade condicionadas ao envio de um 0 ou de 1.



**Figura 3: Probabilidade de erros condicionais.**

Através da Figura 3 percebe-se que a probabilidade de ocorrência do erro na decisão é em função das áreas das funções densidade de probabilidade (FDPs) condicionais à esquerda e à direita. A probabilidade de erro de bit pode ser descrita através das respectivas probabilidades de erros condicionais dos bits enviados,

$$P[\text{erro} / 1] \triangleq P_1 = \int_{-\infty}^0 f_Y(y|1) dy \quad (2.4)$$

$$P[\text{erro} / 0] \triangleq P_0 = \int_0^{\infty} f_Y(y|0) dy \quad (2.5)$$



Considerando as equações (2.4) e (2.5), a probabilidade média de erro de bit do sistema pode ser expressa como:

$$P_e = \Pi_1 P_1 + \Pi_0 P_0 \quad (2.6)$$

onde  $\Pi_1$  e  $\Pi_0$  são as probabilidades a priori dos bits 1 e 0 respectivamente.

Se  $f_{\mathbf{Y}}(y) = 1/2 f_{\mathbf{Y}}(y|1) + 1/2 f_{\mathbf{Y}}(y|0)$  representa a função densidade de probabilidade da variável aleatória  $\mathbf{Y} = y_k$  da entrada do bloco de decisão, então a probabilidade de erro de bit do sistema poderá ser calculada pela integração dessa função nas regiões em que a variável  $\mathbf{Y}$  produza erros. Denominando-se essas áreas de erro de  $E$ , a probabilidade de erro de bit, e pode ser escrita como:

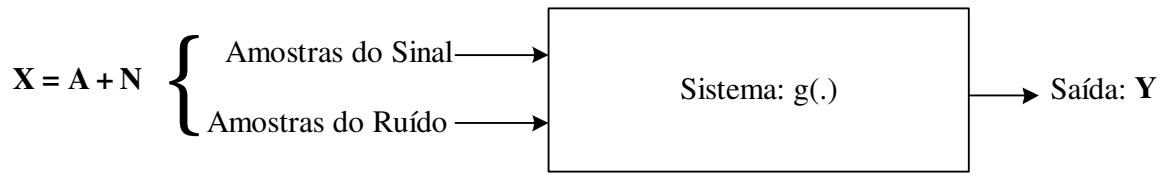
$$P_e = P[\mathbf{Y} \in E] = \int_E f_{\mathbf{Y}}(y) dy \quad (2.7)$$

Através da introdução de uma função indicadora de erro e mudando-se os limites da integração, a equação (2.7) pode ser reescrita na forma:

$$P_e = \int_{-\infty}^{\infty} I_E(y) f_{\mathbf{Y}}(y) dy \triangleq E[I_E(\mathbf{Y})] \quad (2.8)$$

onde a função indicadora de erro  $I_E(\cdot)$  terá valor igual a um se  $y \in E$  e zero em caso contrário.

A aplicação da técnica da Valorização das Amostras neste trabalho ocorrerá em função da mudança nas propriedades estatísticas das variáveis aleatórias geradas na entrada do sistema para que se consiga aumentar a probabilidade de erro de bit. Contudo, as ocorrências de erro ainda serão em função dos eventos que serão observados somente na saída do sistema. Conseqüentemente é necessário se estabelecer uma ligação entre as entradas e as saídas do sistema. A maioria das definições apresentadas a seguir baseia-se em [18] e [30]. Desta forma é definida uma função de sistema  $g(\cdot)$  que expressa essa conexão. A Figura 4 ilustra esse conceito. Nela,



**Figura 4: Relação entre as variáveis discretas de entrada e de saída do sistema.**

a função  $g(\cdot)$  é a resposta do sistema, podendo ser linear ou não linear. Para a formulação matemática realizada a seguir considera-se que a decisão é feita com base em um único símbolo. De acordo com a Figura 4, assume-se que o sistema está representado no tempo discreto, de maneira que a forma de onda na saída do sistema seja amostrada e expressa como:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= g(\mathbf{X}) \\ &= g[X(kT_b)] \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde  $k$  é um inteiro múltiplo e  $T_b$  é o intervalo de amostragem e o vetor  $\mathbf{X}$ , que representa os processos de entrada, é definido como  $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_k, \dots, X_N\}$ . Sob a condição das amostras do sinal transmitido e do ruído serem mutuamente independentes, tem-se que  $\mathbf{X} = \mathbf{A} + \mathbf{N}$ , onde o vetor  $\mathbf{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_k, \dots, A_N\}$  representa os dados da entrada que assumirão os valores de  $+A$  ou  $-A$  e o vetor do ruído  $\mathbf{N} = \{N_1, N_2, \dots, N_k, \dots, N_N\}$  representa uma seqüência Gaussiana independente e identicamente distribuída de média zero e variância  $N_0/2$ .

A equação (2.8) da probabilidade de erro de bit pode ser reescrita em termos das variáveis aleatórias de entrada,

$$\begin{aligned} P_e &= \int_{-\infty}^{\infty} I_E[g(x)] f_{\mathbf{X}}(x) dx \\ &= E\{I_E[g(\mathbf{X})]\} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Sejam  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ ,  $f_{\mathbf{A}}(\mathbf{a})$  e  $f_{\mathbf{N}}(\mathbf{n})$  as respectivas FDP's dos vetores aleatórios  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{N}$ , onde os vetores  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{n}$  indicam os valores reais desses vetores, desse modo, equação (2.10) pode ser reescrita na forma equivalente,

$$\begin{aligned}
P_e &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I_E[g(\mathbf{a}+\mathbf{n})] f_{\mathbf{A},\mathbf{N}}(\mathbf{a},\mathbf{n}) d\mathbf{a} d\mathbf{n} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I_E[g(\mathbf{a}+\mathbf{n})] f_{\mathbf{A}}(\mathbf{a}) f_{\mathbf{N}}(\mathbf{n}) d\mathbf{a} d\mathbf{n}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Fazendo uma análise a respeito da equação (2.10) ou de qualquer uma das equações da probabilidade de erro de bit, percebe-se que o cálculo desse parâmetro é analiticamente intratável, ou seja, não existe uma fórmula fechada para o seu cálculo [18]. Através de técnicas de simulação (Monte Carlo, Valorização das Amostras, etc) é possível obter o valor estimado da probabilidade de erro de bit. Os fundamentos do Método de Monte serão apresentados na Seção 2.3.

Nesta Seção mostrou-se os conceitos da estimação da probabilidade de erros de bit referente à transmissão de dados binários através de um canal degradado por ruído branco aditivo Gaussiano. Em um canal rádio móvel tem-se um efeito adicional a considerar, as variações na amplitude e na fase do sinal recebido devido aos efeitos decorrentes dos múltiplos percursos. A seguir será analisada a transmissão de dados binários através de um canal com desvanecimento Rayleigh.

### 2.2.3 Sistema de Comunicação em canal com desvanecimento plano

Em um canal rádio móvel, a comunicação entre o transmissor e o receptor freqüentemente não ocorre em linha de visada direta devido aos obstáculos existentes entre ambos. Esses obstáculos são responsáveis por diversas réplicas do sinal transmitido que chegam ao receptor, dando origem à terminologia desvanecimento por múltiplos percursos.

Existem dois tipos dos efeitos do desvanecimento que caracterizam um canal rádio móvel no domínio do tempo: o desvanecimento em larga escala e o desvanecimento em pequena escala. As estatísticas do desvanecimento em larga escala provêm uma maneira de se computar a estimativa da perda da potência média em relação à distância entre o transmissor e o receptor [40]. O desvanecimento em pequena escala se refere às dramáticas mudanças na amplitude e na fase do sinal recebido, em pequenos intervalos de deslocamento, como resultado da interferência de duas ou mais versões do sinal com diferentes atenuações e atrasos.

O desvanecimento em pequena escala pode ser classificado no domínio da frequência em relação a um parâmetro denominado de banda de coerência, a qual é uma medida estatística da faixa de frequência que o canal pode ser considerado plano. Nessa porção plana do espectro, a resposta em frequência do canal possui fase linear e o mesmo ganho para todas as componentes de frequência do sinal [13]. O desvanecimento seletivo em frequência é caracterizado pela largura de banda do sinal transmitido ser maior que a largura de banda de coerência do canal. Nessa situação as frequências do sinal serão afetadas de forma diferente ocasionando em severa distorção do sinal transmitido. Analogamente para o desvanecimento plano, se a largura de banda do sinal transmitido for menor que a largura de banda de coerência do canal, todas as componentes do sinal serão afetadas da mesma forma e, conseqüentemente, o sinal não será distorcido, apenas atenuado.

### 2.2.3.1 Modelagem Estatística de um canal com desvanecimento Rayleigh

Em um ambiente com desvanecimento, o receptor ao invés de receber o sinal transmitido em um único caminho recebe um número de ondas refletidas, difratadas e espalhadas oriundas do sinal transmitido, como ilustrado na Figura 5.

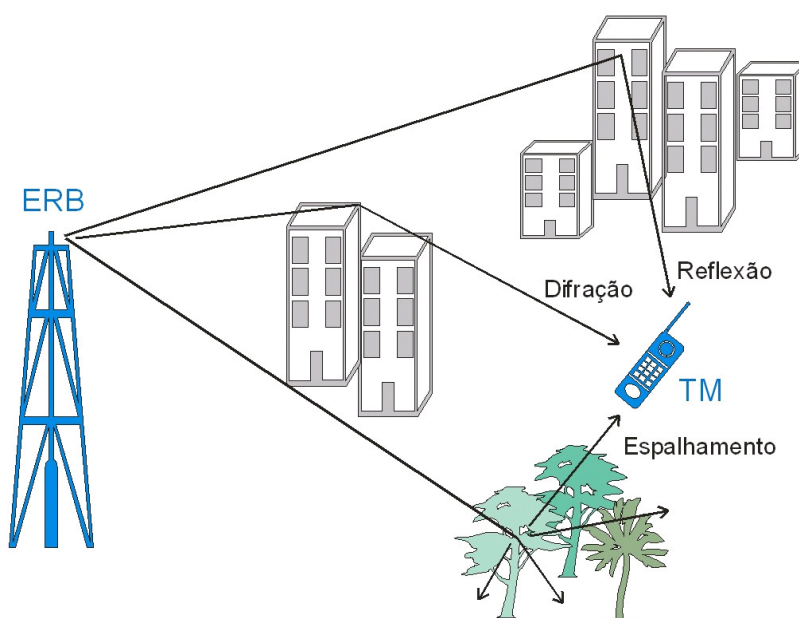


Figura 5: Ilustração dos múltiplos percursos.

O somatório de duas ou mais versões do sinal transmitido que chegam no receptor por múltiplos percursos pode ter uma ação construtiva ou destrutiva, dependendo dos atrasos e das fases das mesmas. Os atrasos e as atenuações provocadas por cada versão do sinal transmitido tem um comportamento aleatório. Por esta razão o sinal de rádio é usualmente tratado com modelos estatísticos. A envoltória, fase e a frequência do sinal recebido variam aleatoriamente de acordo com algumas das conhecidas funções densidades de probabilidade [13]. Sob certas condições a envoltória do sinal recebido pode ser descrita com precisão por uma distribuição de Rayleigh, enquanto que a fase é uniformemente distribuída intervalo de 0 a  $2\pi$ .

No modelo de desvanecimento Rayleigh, as contribuições de todos os múltiplos percursos aleatórios que chegam ao receptor irão ser somadas resultando em um processo Gaussiano complexo, com componentes em fase e em quadratura, modeladas por uma função densidade de probabilidade Gaussiana com variáveis aleatórias possuindo média zero e variâncias iguais. A distribuição de Rayleigh permite modelar um ambiente sem uma onda com potência dominante, ou seja, sem uma componente de visada direta do sinal.

O tipo de desvanecimento exibido pelo canal com múltiplos percursos a ser descrito é denominado de desvanecimento plano porque as características espectrais do sinal transmitido serão completamente preservadas na saída do mesmo. Entretanto a amplitude da saída do canal se modificará com o tempo devido a flutuações aleatórias no ganho do mesmo, provocadas pelo fenômeno dos múltiplos percursos.

Admitindo que o sinal transmitido  $s(t)$  consiste de um sinal de banda estreita definido como:

$$s(t) = A \cos(2\pi f_c t) \quad (2.12)$$

onde  $f_c$  é a frequência de portadora e  $A$  é a amplitude do sinal transmitido.

Devido às variações dos caminhos percorridos decorrentes das reflexões, difrações e espalhamentos ocorridos ao longo do percurso, como pode ser visto na Figura 5, o sinal que chega no receptor é um somatório de duas ou mais versões do sinal transmitido com diferentes atenuações e atrasos, podendo ser representado por:

$$Z(t) = \sum_{i=1}^N A_i \cos(2\pi f_c t + \Theta_i) \quad (2.13)$$

onde os termos  $A_i$  e  $\Theta_i$  são variáveis aleatórias que representam a amplitude e a fase decorrentes de cada um dos  $N$  múltiplos percursos.

A equação (2.13) pode ser expressa na forma equivalente:

$$Z(t) = Z_I \cos(2\pi f_c t) - Z_Q \sin(2\pi f_c t) \quad (2.14)$$

onde os componentes em fase e quadratura são respectivamente definidos por:

$$Z_I = \sum_{i=1}^N A_i \cos(\Theta_i) \quad (2.15-a)$$

$$Z_Q = \sum_{i=1}^N A_i \sin(\Theta_i) \quad (2.15-b)$$

Na equação (2.14) o sinal recebido foi expresso em termos dos seus componentes em fase e em quadratura. De forma equivalente pode-se expressar o sinal recebido em termos de sua envoltória e de sua fase como:

$$Z(t) = R \cos(2\pi f_c t + \theta) \quad (2.16)$$

onde o módulo,  $R$ , e a fase,  $\theta$ , representam o ganho e a diferença de fase introduzidos pelo canal no sinal recebido e são respectivamente dados por:

$$R = \sqrt{Z_I^2 + Z_Q^2} \quad (2.17-a)$$

$$\theta = \text{tg}^{-1} \left( \frac{Z_Q}{Z_I} \right) \quad (2.17-b)$$

Através das equações (2.15-a) e (2.15-b) se observa que as componentes em fase e quadratura não possuem um valor predominante, sendo apenas sinais de múltiplo percurso. Aplicando o teorema do limite central impõe-se a condição de que quando o número de múltiplos percursos é grande as componentes em fase  $Z_I$  e quadratura  $Z_Q$  se aproximarão de variáveis aleatórias Gaussianas com média zero e variâncias iguais [31]. Conseqüentemente a envoltória  $R$  irá se aproximar de uma distribuição de Rayleigh, dada por:

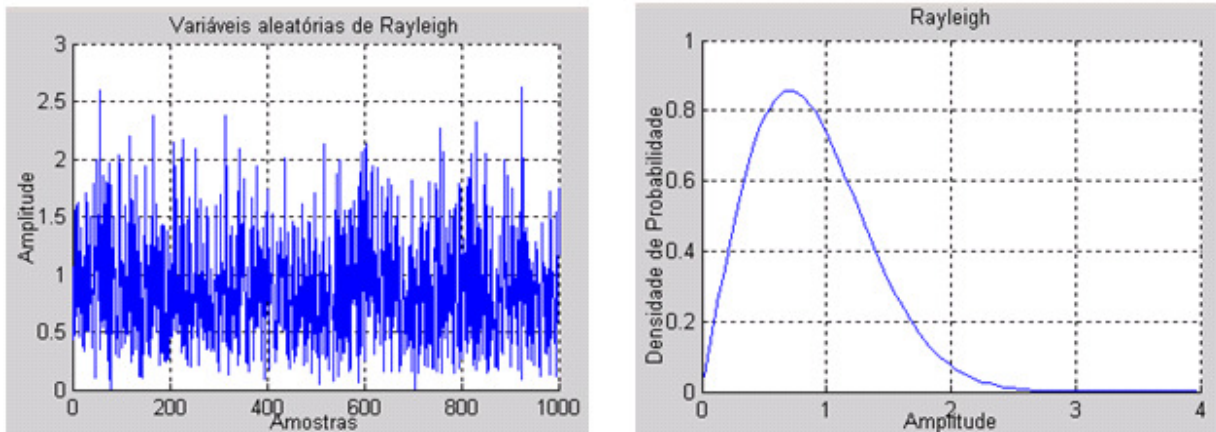
$$f_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \quad r \geq 0 \quad (2.18)$$

e a fase  $\theta$  irá se aproximar de uma distribuição uniforme dada por:

$$f_\theta(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & 0 < \theta < 2\pi \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.19)$$

Através da equação (2.17-a) fica claro de observar que a distribuição de Rayleigh é modelada pela raiz quadrada da soma do quadrado de sinais com distribuição gaussiana. Esse conceito será utilizado no Capítulo 4 para gerar uma variável aleatória com essa distribuição nas simulações.

A Figura 6 ilustra as variáveis aleatórias de Rayleigh geradas com uma variância de 0.5 e sua respectiva Função Densidade de Probabilidade. As variações de amplitude ilustram a causa do desvanecimento Rayleigh.



**Figura 6: (a) Variável aleatória de Rayleigh. (b) FDP de Rayleigh.**

Pode-se verificar na literatura especializada [34] que, em decorrência do desvanecimento, existe uma maior probabilidade da potência instantânea do sinal recebido estar abaixo de seu valor médio.

### 2.2.3.2 Descrição do Sistema com Desvanecimento Rayleigh

Nesse modelo de sistema o canal é considerado como sendo não seletivo em frequência. Assumindo que as amostras do desvanecimento são descorrelacionadas e que o seu valor se mantém constante dentro de um intervalo de sinalização, o canal será caracterizado como sendo sem memória. O diagrama em blocos do sistema é mostrado na Figura 7.

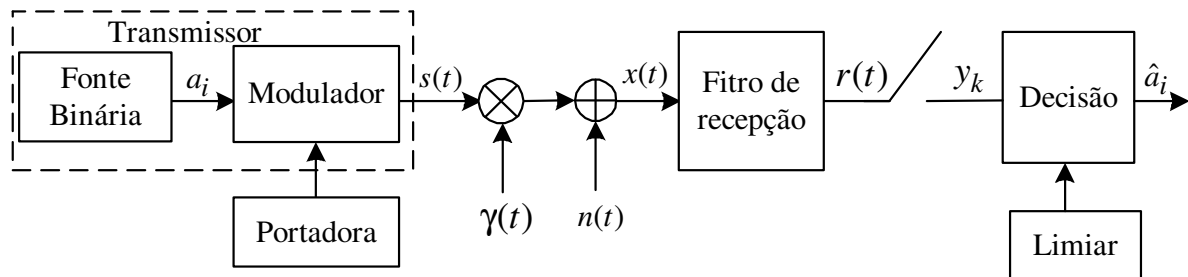


Figura 7: Diagrama em blocos de um sistema com desvanecimento.

O sinal modulado  $s(t)$  é transmitido através do canal com desvanecimento Rayleigh e a saída deste canal alimenta um canal AWGN. O desvanecimento irá distorcer o sinal transmitido através da introdução de uma envoltória de distorção multiplicativa  $\gamma(t)$  que possuirá distribuição Rayleigh dada na equação (2.18).

Neste sistema o desvanecimento ocorre somente na magnitude do sinal transmitido, pois se admite que o receptor irá conseguir rastrear perfeitamente as variações de fase e implementar detecção coerente [32]. O sinal recebido é modelado da seguinte forma:

$$x(t) = \gamma(t) s(t) + n(t) \quad (2.20)$$

onde  $\gamma(t)$  é o ganho do canal e  $n(t)$  é o ruído aditivo Gaussiano.

Para calcular a probabilidade de erro de bit de qualquer modelo de modulação digital em um canal com desvanecimento plano, deve-se obter a probabilidade de erro da modulação escolhida no canal com ruído AWGN em função dos valores do sinal afetado pelo desvanecimento [34]. Desse modo, assumindo que foi utilizada a modulação BPSK com detecção coerente para a transmissão dos dados e considerando que a atenuação  $\gamma(t)$  seja



constante ao longo de um intervalo de bit, a probabilidade de erro de bit para a modulação BPSK em função do ganho do canal é dada por:

$$P_e(\gamma) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{\gamma^2 E_b}{N_o}} \right) \quad (2.21)$$

onde  $\gamma$  é o valor do ganho do canal  $\gamma(t)$  refletido na saída do filtro casado do receptor.

A equação (2.21) pode ser vista como uma probabilidade de erro condicional para um valor fixo de  $\gamma$ . Contudo, devido à natureza aleatória do canal  $\gamma$ , não será constante, como ocorre na prática no canal com desvanecimento. Desse modo, para se obter a probabilidade de erro de bit média em presença do desvanecimento e do ruído deve-se extrair a média de  $P(\gamma)$  sobre todos os valores possíveis de  $\gamma$ , como mostrado por:

$$P_e = \int_{-\infty}^{\infty} P(\gamma) f(\gamma) d\gamma \quad (2.22)$$

A equação (2.21) permite observar que a relação sinal-ruído na variável de decisão será uma versão modificada da relação entre energia de sinal por bit e a densidade espectral de potência do ruído,  $E_b / N_o$ , em relação ao parâmetro  $\gamma$ . Denominando de  $\rho_b$  o valor da relação sinal-ruído instantânea na variável de decisão tem-se que,

$$\rho_b = \gamma^2 \frac{E_b}{N_o} \quad (2.23)$$

Como  $\gamma$  não é constante o desempenho do receptor irá depender da relação sinal-ruído média na recepção dada por:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_b &= E(\gamma^2) \frac{E_b}{N_o} \\ &= E(\gamma^2) \rho_b \end{aligned} \quad (2.24)$$

Como mostrado na Seção 2.2.2, deseja-se expressar a probabilidade de erro de bit do sistema em função das variáveis aleatórias de entrada. Através da equação (2.20) se observa que

a estimação da probabilidade de erro de bit do sistema depende do sinal transmitido  $s(t)$ , do canal com desvanecimento  $\gamma(t)$  e do ruído  $n(t)$ .

Conseqüentemente a probabilidade de erro de bit do sistema será em função dos processos da entrada representados pelo vetor  $\mathbf{X}$ , definido como  $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_k, \dots, X_N\}$ . Sob a condição das amostras do sinal transmitido, do desvanecimento e do ruído serem mutuamente independentes, tem-se que  $\mathbf{X} = \mathbf{A}\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{N}$ , onde o vetor  $\mathbf{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_k, \dots, A_N\}$  representa os dados da entrada,  $\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k, \dots, \gamma_N\}$  é o vetor que representa as amostras do desvanecimento e o vetor do ruído  $\mathbf{N} = \{N_1, N_2, \dots, N_k, \dots, N_N\}$  representa uma seqüência Gaussiana independente e identicamente distribuída de média zero e variância  $N_0/2$ .

Sejam  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ ,  $f_{\mathbf{A}}(\mathbf{a})$ ,  $f_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{\gamma})$  e  $f_{\mathbf{N}}(\mathbf{n})$  as respectivas FDP's dos vetores aleatórios  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}$  e  $\mathbf{N}$ , onde os vetores  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{a}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}$  e  $\mathbf{n}$  indicam os valores reais desses vetores. A probabilidade de erro de bit pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
 P_e &= \int_{-\infty}^{\infty} I_E[g(x)] f_{\mathbf{X}}(x) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I_E[g(\mathbf{a}\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{n})] f_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{\gamma}) f_{\mathbf{N}}(\mathbf{n}) f_{\mathbf{A}}(\mathbf{a}) d\boldsymbol{\gamma} d\mathbf{n} d\mathbf{a}
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

onde a função indicadora de erro  $I_E(x)$  se refere à recepção e assumirá valor igual a um se houver um erro no dado recebido e zero em caso contrário e  $g(\cdot)$  é a resposta do sistema.

#### 2.2.4 Sistema de Comunicação com Códigos Corretores de Erro

Como visto nas seções anteriores a ocorrência de erros em um sistema de comunicação digital se deve às perturbações introduzidas pelo canal. Dependendo do quanto a mensagem originalmente transmitida foi corrompida, o receptor não será capaz de realizar a sua reconstrução. Com o objetivo de melhorar o desempenho desses sistemas, é possível codificar os bits transmitidos através da adição controlada de bits de redundância pelo codificador de canal, de modo que se reduza a probabilidade de erro na recepção através da correção de erros pelo decodificador de canal.

O ganho de codificação provido por um código corretor de erro em um sistema pode ser definido como a redução na relação  $E_b / N_o$  do sistema codificado em relação ao valor de  $E_b / N_o$  do sistema sem codificação, para a mesma taxa de transmissão de informação e um dado valor da taxa de erro. Esse ganho é determinado através da taxa de erro de bit de informação BER ou da probabilidade de erro de palavras WER (*Word Error Rate*). Essas duas medidas de desempenho irão depender do código, da modulação e do receptor adotados.

As técnicas de correção de erros são classificadas em dois grupos: FEC (*Forward Error Correction*) e ARQ (*Automatic Repeat Request*). O primeiro grupo permite que através da utilização do código corretor de erro se consiga, na recepção, identificar os erros e corrigi-los (dependendo da capacidade do código). No segundo grupo é possível detectar os erros na recepção através do código corretor de erro utilizado, e retransmitir a mensagem ou parte dela.

Os códigos corretores de erro são divididos em dois grandes grupos: códigos de bloco e códigos convolucionais. Cada grupo é composto por diversos tipos de códigos, cada um possuindo suas particularidades de aplicação e de desempenho. Neste trabalho a técnica da valorização das amostras será aplicada para um código de bloco linear operando em um canal binário simétrico sem memória e com decodificação de máxima verossimilhança. Os conceitos relativos aos códigos lineares e aos canais binários simétricos serão abordados detalhadamente nas próximas Seções.

#### **2.2.4.1 Códigos de Bloco Lineares**

Nos códigos de bloco os processos de codificação e de decodificação são realizados processando-se blocos de informação. Nesse tipo de código, bits de redundância são inseridos na informação de forma que esses bits adicionados sejam utilizados para efetuar a detecção e a correção de erros. Por isso é dito que códigos de blocos lineares são uma classe de códigos de verificação de paridade. Estes códigos são caracterizados pela notação  $(n, k)$ , onde  $k$  se refere aos bits de informação e  $n$  é o número de bits na palavra-código, sendo  $(n - k)$  os dígitos de redundância ou paridade.

No processo de codificação os dados transmitidos são segmentados em blocos de  $k$  bits de informação. O codificador transforma cada bloco de  $k$  bits em um bloco de  $n$  bits codificados. Cada bloco de  $n$  bits é denominado de palavra-código. O número de palavras-código válidas de um código de bloco linear é  $2^k$ . A relação entre o comprimento das palavras-código e o comprimento dos blocos de informação,  $k/n$ , é denominado de taxa do código.

Um código de bloco linear  $C(n, k)$  é um subespaço  $k$ -dimensional de um espaço vetorial  $V_n$ , onde é possível encontrar  $k$  palavras-código linearmente independentes,  $G_0, G_1, \dots, G_{k-1}$ , capazes de gerar todas as palavras código do espaço vetorial  $V_n = 2^n$  em  $C$  por meio de combinações lineares entre elas, como demonstrado por:

$$\mathbf{V} = u_0 G_0 + u_1 G_1 + \dots + u_{k-1} G_{k-1} \quad (2.26)$$

onde  $\mathbf{u} = [u_0, u_1, \dots, u_{k-1}]^T$  são os bits da mensagem e  $\mathbf{V} = [v_0, v_1, \dots, v_{n-1}]^T$  são os bits da palavra código resultante. As  $k$  palavras-código podem ser arranjadas numa matriz com dimensão  $k \times n$ , com  $k$  linhas independentes, denominada de matriz geradora, dada por:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \\ \vdots \\ G_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{0,0} & g_{0,1} & \cdots & g_{0,n-1} \\ g_{1,0} & g_{1,1} & \cdots & g_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{k-1,0} & g_{k-1,1} & \cdots & g_{k-1,n-1} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Deste modo a codificação pode ser realizada através da operação genérica,  $\mathbf{V} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{G}$ . Para um código de bloco linear na forma sistemática a respectiva matriz geradora é dada por:

$$\mathbf{G} = [\mathbf{P}_c \mid \mathbf{I}_k] \quad (2.28)$$

onde  $\mathbf{P}_c$  é a parte de paridade da matriz geradora e  $\mathbf{I}_k$  é a matriz identidade de dimensão  $k \times k$ .

Existe uma matriz  $\mathbf{H}$ , denominada de matriz verificadora de paridade, de dimensão  $(n-k) \times n$ , com  $(n-k)$  linhas independentes tal que  $\mathbf{G} \cdot \mathbf{H}^T = 0$ , em outras palavras, qualquer vetor do subespaço vetorial gerado por  $\mathbf{G}$  é ortogonal a qualquer vetor do subespaço gerado por

**H**. Conseqüentemente uma palavra-código é válida somente se  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{H}^T = 0$ . A matriz **H**, representada na sua forma sistemática é dada por:

$$\mathbf{H} = \left[ \mathbf{I}_{n-k} : \mathbf{P}_c^T \right] \quad (2.29)$$

Considerando que a palavra recebida **r** se diferencie da palavra código transmitida **v**, devido às perturbações introduzidas pelo canal, essa diferença pode ser dada pela soma de vetores  $\mathbf{r} = \mathbf{e} + \mathbf{v}$ , onde  $e_i = 1$  para  $r_i \neq v_i$ , e  $e_i = 0$  para  $r_i = v_i$ . O vetor **e** é um padrão de erro com pelo menos um dos seus elementos igual a um.

O decodificador calcula a síndrome associada a cada padrão de erro pela relação  $\mathbf{S} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{H}^T = \mathbf{e} \cdot \mathbf{H}^T$ . Cada padrão de erro corrigível pode ser associado a uma síndrome específica. Contudo, o número de padrões de erro supera o número de síndromes. Conseqüentemente existem  $2^k$  soluções possíveis para o cálculo da síndrome. O que se faz é escolher os padrões mais prováveis, a fim de minimizar a probabilidade de erro.

A capacidade de correção e detecção de um código de bloco linear irá depender de um parâmetro denominado de distância mínima  $d_{\min}$ . Esse parâmetro se baseia no conceito da distância de Hamming, a qual é definida como sendo o número de elementos em que dois vetores códigos se diferenciam. A distância de Hamming, no caso binário, pode ser determinada através da propriedade de adição módulo-2 entre dois vetores código, ou seja:

$$d(\mathbf{M}, \mathbf{N}) = W(\mathbf{M} \oplus \mathbf{N}) \quad (2.30)$$

onde  $W(\cdot)$  é definido como sendo o número de elementos não nulos em um vetor. Através da equação (2.30) se observa que a distância de Hamming será igual ao número de 1's contido no vetor resultante da operação  $\mathbf{M} \oplus \mathbf{N}$ .

Considerando o código de bloco linear  $C(n, k)$ , através da equação (2.30), se pode afirmar ser possível somar quaisquer duas palavras-código distintas desse código, de modo que a distância mínima de  $C(n, k)$  será definida por:

$$d_{\min} = \min\{d(\mathbf{M}, \mathbf{N}) : \mathbf{M} \neq \mathbf{N}, \mathbf{M}, \mathbf{N} \in C\} \quad (2.31)$$

Através da propriedade da linearidade, a soma de duas palavras-código irá resultar em outra palavra-código. Deste modo, a distancia de Hamming entre duas palavras-código é igual a uma terceira palavra-código de  $C(n, k)$ . Desta forma a equação (2.31) pode ser reescrita na forma mostrada por:

$$\begin{aligned} d_{\min} &= \min\{d(\mathbf{M}, \mathbf{N}) : \mathbf{M} \neq \mathbf{N}, \mathbf{M}, \mathbf{N} \in C\} \\ &= \min\{d(\mathbf{L}) : \mathbf{L} \in C, \mathbf{L} \neq 0\} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Conseqüentemente observa-se através da equação (2.32) que não é necessário examinar as distâncias de Hamming entre todas as combinações possíveis entre pares de palavras-código. Basta somente examinar o peso de cada palavra-código, com exceção da palavra toda nula. O menor peso encontrado corresponde à menor distância mínima de  $C(n, k)$ . Outra forma de determinar a distância mínima do código é através da matriz verificadora de paridade. A distância mínima do código será igual ao menor número de colunas de  $\mathbf{H}$ , que quando somadas resultam em uma coluna toda zero.

A distância mínima  $d_{\min}$  é utilizada para o cálculo da capacidade de correção do código, ou seja, o número  $t$  de bits que podem ser corrigidos pelo código é:

$$t = \left\lfloor \frac{d_{\min} - 1}{2} \right\rfloor \quad (2.33)$$

onde o termo entre colchetes não excede o seu maior valor inteiro. Um código que corrige todas as seqüências de  $t$  erros pode também corrigir certas seqüências de  $t+1$  erros. Os códigos que corrigem exclusivamente todos os padrões de  $t$  erros ou menos e nenhum padrão maior que  $t$  erros são denominados de códigos perfeitos. Os códigos de Hamming, os quais têm os parâmetros  $n = 2^{n-k} - 1$ ,  $d_{\min} = 3$  e  $t = 1$  são considerados como sendo códigos perfeitos [32]. A capacidade de detecção de um código de bloco linear é determinada por:

$$C_c = d_{\min} - 1 \quad (2.34)$$

### 2.2.4.2 Canal Binário Simétrico

Considerando um canal com ruído aditivo e se incluindo o modulador e o demodulador como partes desse canal, pode-se construir um modelo de canal discreto sem memória, como ilustrado na Figura 8.

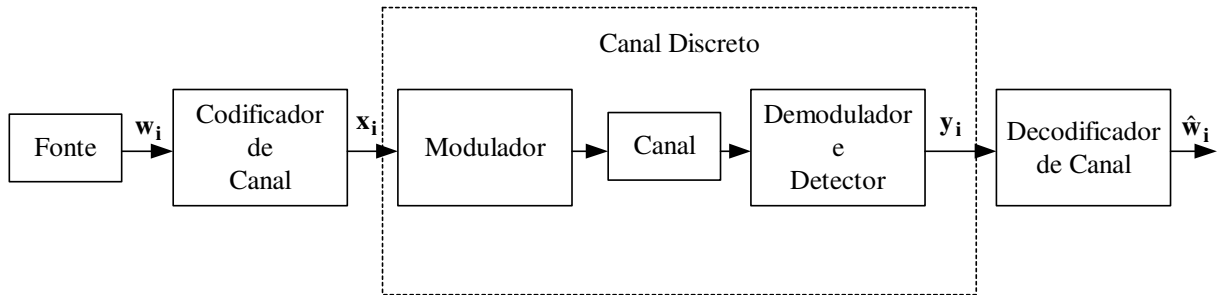


Figura 8 : Modelo de um canal discreto.

Nesse modelo, os blocos equivalentes ao modulador, o canal, o demodulador e o detector foram substituídos por um canal discreto. Um canal discreto é definido como sendo um sistema composto por um alfabeto de entrada  $\mathcal{X}$ , por um alfabeto de saída  $\mathcal{Y}$  e uma matriz de probabilidades de transição  $\mathbf{P}=[p_{ji}]$ , em que  $p_{ji} = P[y_i|x_j]$  expressa a probabilidade de observação do símbolo de saída  $\mathbf{Y} = y_i$  dado que o símbolo  $\mathbf{X} = x_j$  foi transmitido.

O canal é sem memória, se a distribuição de probabilidades da saída depende unicamente da entrada atual e é condicionalmente independente de quaisquer entradas ou saídas anteriores. Conseqüentemente, se a entrada de um canal discreto for uma seqüência de  $n$  símbolos  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$  selecionados do alfabeto entrada  $\mathcal{X}$  e a correspondente saída for a seqüência  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$  de símbolos do alfabeto  $\mathcal{Y}$ , a probabilidade condicional conjunta é dada por:

$$P(\mathbf{Y} = y_0, \dots, \mathbf{Y} = y_{n-1} | \mathbf{X} = x_0, \dots, \mathbf{X} = x_{n-1}) = \prod_{k=0}^{n-1} P(\mathbf{Y} = y_k | \mathbf{X} = x_k) \quad (2.35)$$

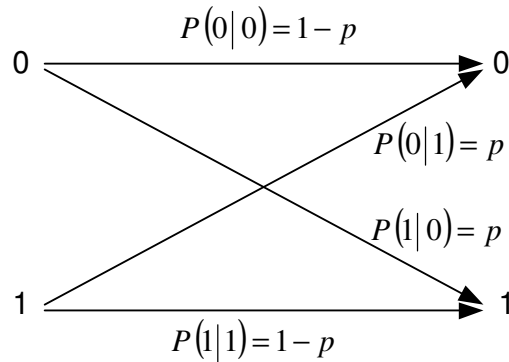
O canal binário simétrico (*BSC- Binary Symmetric Channel*) é um caso especial do canal discreto sem memória. Esse canal é um sistema composto de um conjunto  $\mathbf{X} = \{0,1\}$  de possíveis entradas e  $\mathbf{Y} = \{0,1\}$  de possíveis saídas. A probabilidade condicional de erro  $p$  é a mesma para

o envio do bit 1 e a recepção do bit 0, e para o envio do bit 0 e a recepção do bit 1. As probabilidades de transição de um canal binário simétrico são descritas por:

$$P(\mathbf{Y} = 0 | \mathbf{X} = 1) = P(\mathbf{Y} = 1 | \mathbf{X} = 0) = p \quad (2.36-a)$$

$$P(\mathbf{Y} = 0 | \mathbf{X} = 0) = P(\mathbf{Y} = 1 | \mathbf{X} = 1) = 1 - p \quad (2.36-b)$$

As equações (2.36-a) e (2.36-b), onde simplificando a notação  $P(\mathbf{Y} = 0 | \mathbf{X} = 0)$  para  $P(0|0)$ , podem ser representadas pelo diagrama de probabilidade de transição do BSC, demonstrado na Figura 9.



**Figura 9: Diagrama de probabilidade de transição do BSC.**

O BSC será utilizado nas simulações aplicando a técnica da valorização das amostras em um sistema com codificação de canal.

### 2.2.4.3 Descrição do Sistema com Codificação de Canal

Considerando um código de bloco binário  $C(n,k)$ , a palavra-código gerada pelo codificador,  $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ , é transmitida pelo canal. Essa palavra código será um sinal  $n$ -dimensional e será pertencente a um conjunto de  $M = 2^k$  palavras código válidas.

A palavra código transmitida irá produzir uma seqüência aleatória  $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$  na saída do canal BSC, a qual terá sua função densidade de probabilidade condicional conjunta  $f(\mathbf{y} | \mathbf{x})$  dada por:



$$f(\mathbf{y} | \mathbf{x}) = \prod_{k=0}^{n-1} P(y_k | x_k) \quad (2.37)$$

onde  $P(y_k | x_k)$  é a probabilidade de transição do BSC para uma única entrada e uma única saída do canal.

Na recepção, a função do decodificador é estimar uma palavra-código,  $\hat{\mathbf{x}}$ , para cada seqüência recebida possível,  $\mathbf{y}$ . No canal BSC, a melhor estimativa é feita admitindo-se que o vetor código transmitido é aquele que está mais próximo do vetor código recebido em termos da distância de Hamming. Deste modo o decodificador escolhe qual das  $M$  palavras código foi transmitida.

Considerando que o vetor  $\mathbf{x}_j$ ,  $j=1,2,\dots,M$ , da palavra-código foi transmitido, o erro acontecerá se o decodificador decidir por outro vetor qualquer  $\mathbf{x}_i$  mais próximo do vetor recebido. A probabilidade de erro de palavra em relação a  $\mathbf{x}_j$  é dada por:

$$P_p(\mathbf{x}_j) = \sum_{\mathbf{x}_i \neq \mathbf{x}_j} P(\mathbf{x}_j | \mathbf{x}_i) \quad (2.38)$$

onde  $P(\mathbf{x}_j | \mathbf{x}_i)$  é denominada de probabilidade de erro par-a-par ou probabilidade de erro de decodificação específico.

A determinação da probabilidade média de erro de palavra deve levar em consideração uma média da equação (2.38) para todas as  $M$  possibilidades das palavras enviadas pelo canal [15]. Porém a propriedade de erro uniforme [15], afirma que a probabilidade de erro condicionada à transmissão de uma dada palavra-código não depende de qual seja essa palavra. Esta é uma propriedade válida para códigos lineares e permite que a probabilidade de erro par-a-par possa ser estimada admitindo-se o envio da palavra toda zero. Deste modo não será preciso efetuar a média na equação (2.38).

Considerando o envio da palavra-código toda nula  $\mathbf{x}_1$ , o erro ocorrerá se o decodificador decidir por outro vetor qualquer  $\mathbf{x}_i, i \neq 1$  (isto é, a probabilidade de que o vetor recebido pertença

a uma região de decisão  $I_i$  ao invés de  $I_1$ ). Deste modo, a probabilidade de erro de palavra pode ser escrita de acordo com,

$$P_p = \sum_{i=2}^M P(\mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_i) \quad (2.39)$$

A equação (2.39) pode ser vista como uma decomposição da probabilidade de erro de palavra em somas de termos correspondentes a diferentes erros possíveis, isto é, em diferentes regiões de decisão. Deste modo, para cada palavra-código é associada uma região de decisão, denominada de  $D(\mathbf{x})$  [35]. Uma palavra-código  $\mathbf{x}$  é decodificada corretamente sempre que a sequência aleatória de saída do canal  $\mathbf{y}$  pertencer a essa região. Se  $D(\mathbf{x})$  for a região de decisão que maximiza  $P(\mathbf{y} | \mathbf{x})$ , o decodificador é chamado de máxima verossimilhança.

Assumindo que  $\mathbf{x}'$  represente a palavra-código estimada erroneamente dado que a palavra-código  $\mathbf{x}$  foi transmitida, onde  $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}$  e que conseqüentemente  $\mathbf{y} \in D(\mathbf{x}')$ , a probabilidade de erro par-a-par, em termos da função densidade de probabilidade condicional conjunta  $f(\mathbf{y} | \mathbf{x})$  e em relação à região de decisão  $D(\mathbf{x}')$  pode ser reescrita como:

$$P(\mathbf{x}' | \mathbf{x}) = \int \cdots \int_{D(\mathbf{x}')} f(\mathbf{y} | \mathbf{x}) d\mathbf{y} \quad (2.40)$$

Utilizando uma função indicadora de erro  $I_{\mathbf{x}'}(\mathbf{y})$  em relação a região de erro  $D(\mathbf{x}')$ , onde  $I_{\mathbf{x}'}(\mathbf{y}) = 1$  se  $\mathbf{y} \in D(\mathbf{x}')$  e  $I_{\mathbf{x}'}(\mathbf{y}) = 0$  se  $\mathbf{y} \notin D(\mathbf{x}')$ , a equação (2.40) pode ser reescrita em termos dessa função como:

$$P(\mathbf{x}' | \mathbf{x}) = \int \cdots \int I_{\mathbf{x}'}(\mathbf{y}) f(\mathbf{y} | \mathbf{x}) d\mathbf{y} \quad (2.41)$$

A probabilidade de erro de bit será função do número de bits de informação decodificados erroneamente devido à decisão por  $\mathbf{x}'$ . Denominando-se  $n_b(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  como o número de bits de informação errados quando  $\mathbf{x}$  é transmitida e a decisão é por  $\mathbf{x}'$ , a probabilidade de erro de bit média será calculada por:

$$P_b(\mathbf{x}) = \frac{1}{k} E[N_b | \mathbf{x}] \quad (2.42)$$

onde o valor esperado do número de bits errados após a decodificação, dado que  $\mathbf{x}$  foi transmitido, é determinado por:

$$E[N_b | \mathbf{x}] = \sum_{\mathbf{x}' \in C} n_b(\mathbf{x}, \mathbf{x}') P(\mathbf{x}' | \mathbf{x}) \quad (2.43)$$

Substituindo a equação (2.43) na equação (2.42), a probabilidade de erro de bit média em relação a cada erro de decodificação pode ser reescrita como:

$$P_b(\mathbf{x}) = \frac{1}{k} \sum_{\mathbf{x}' \in C} n_b(\mathbf{x}, \mathbf{x}') P(\mathbf{x}' | \mathbf{x}) \quad (2.44)$$

onde  $k$  é o número de bits de informação por palavra-código. A probabilidade de erro de bit média é independente da palavra-código transmitida quando um código linear e um canal simétrico sem memória são considerados [35]. Por isso, considera-se o envio da palavra toda nula quando se realiza a simulação para o cálculo desse parâmetro.

### 2.3 Método de Monte Carlo

O nome Monte Carlo faz referência à cidade de mesmo nome situada no Principado de Mônaco, a qual é famosa por seus jogos de azar que primeiramente utilizavam geradores mecânicos de números aleatórios. Convencionou-se o nome de Monte Carlo a toda simulação que envolva a geração de números aleatórios. Nos sistemas de comunicação digital sua aplicação ocorre na estimação da probabilidade de erro de bit, embora suas aplicações vão desde integração numérica e solução de problemas matemáticos complexos, finanças, engenharia de trânsito, problemas de física, dentre outros.

O método de Monte Carlo permite a estimação do parâmetro de interesse por meio da frequência relativa de ocorrência de suas amostras. O procedimento para a estimação da probabilidade de erro de bit do sistema pode ser visto como um experimento de Bernoulli, onde o sucesso aqui se refere aos erros. Conseqüentemente esse método é somente uma implementação direta do experimento de Bernoulli.

A definição de um estimador da probabilidade de erro de bit é a fração do número de erros em uma seqüência de bits transmitidos em um intervalo de tempo [18]. Essa definição só é válida

para sistemas estacionários, onde a probabilidade de erro de bit não varia com o tempo. Esta medida serve como parâmetro para se medir a confiabilidade de um sistema de comunicação digital.

Nas próximas Subseções serão apresentados as propriedades estatísticas do estimador do método de Monte Carlo, o intervalo de confiança e o erro padrão normalizado, que são medidas que garantem a confiabilidade da estimativa utilizando esse método.

### 2.3.1 Propriedades Estatísticas do Estimador de Monte Carlo

Uma fórmula padrão de simulação para a estimação da probabilidade de erro consiste em usar uma expressão em termos das médias das amostras que foram geradas durante toda a simulação. O estimador de Monte Carlo será então a média amostral dada por:

$$\hat{P}_{mc} = \frac{1}{N_{mc}} \sum_{i=1}^{N_{mc}} I_E[g(x_i)] \quad (2.45)$$

onde o subscrito  $i$  denota o instante dos símbolos em que as decisões foram realizadas. O número de experimentos do método de Monte Carlo é representado por  $N_{mc}$ . O termo  $I_E[g(x_i)]$  representa a função indicadora de erro e o somatório representa o contador de erros.

A equação (2.45) pode ser reescrita em um formato mais genérico, onde  $N$  bits são processados através do sistema e na saída  $n$  bits de erro são observados. Desta forma se obtém um estimador simples e natural (ou não polarizado) da BER dado por:

$$\hat{P} = \frac{n}{N} \quad (2.46)$$

A eficiência do estimador pode ser medida em relação a três propriedades básicas [18]: a primeira propriedade é que eles devem ser despolarizados, ou seja, seu valor esperado deve ser igual ao parâmetro estimado. Como o estimador de Monte Carlo da probabilidade de erro de bit é um estimador pela média amostral, mostra-se que este, de fato, é despolarizado.

A segunda propriedade se refere à consistência do estimador. Um estimador é dito ser consistente se à medida que o número de experimentos aumenta,  $N \rightarrow \infty$ , a estimativa converge para o valor real. Considerando o caso de um estimador não polarizado, como o estimador de

Monte Carlo, uma forma de se verificar se esse estimador é consistente é através de sua variância. Se a variância do estimador de erros tende a zero à medida que o número de experimentos aumenta, diz-se que esse estimador é consistente, ou seja:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{var} \left[ \frac{n}{N} \right] = 0 \quad (2.47)$$

Sabendo-se que para um determinado número de experimentos independentes de Bernoulli, o número de sucessos ou de falhas desses experimentos é uma variável aleatória distribuída de forma binomial, a variância do estimador de Monte Carlo é dada por:

$$\text{var}[\hat{P}_{mc}] = \frac{P(1-P)}{N_{mc}} \quad (2.48)$$

onde  $\hat{P}$  se refere á uma estimativa da probabilidade de erro de bit.

Pode-se verificar a partir da equação (2.48) que o estimador de Monte Carlo é consistente. Quanto mais consistente for um estimador, mais sua estimativa irá se aproximar do valor real. Por isso é dito que as técnicas que melhoram a eficiência do estimador são denominadas de técnicas de redução da variância.

Considerando o número de experimentos finito, a terceira propriedade se refere ao intervalo de confiança, que consiste em uma maneira de se medir a confiança do estimador. Esse parâmetro fornece uma indicação estatística de quanto o estimador está próximo do valor verdadeiro do parâmetro estimado [18].

### 2.3.2 Análise do Intervalo de Confiança

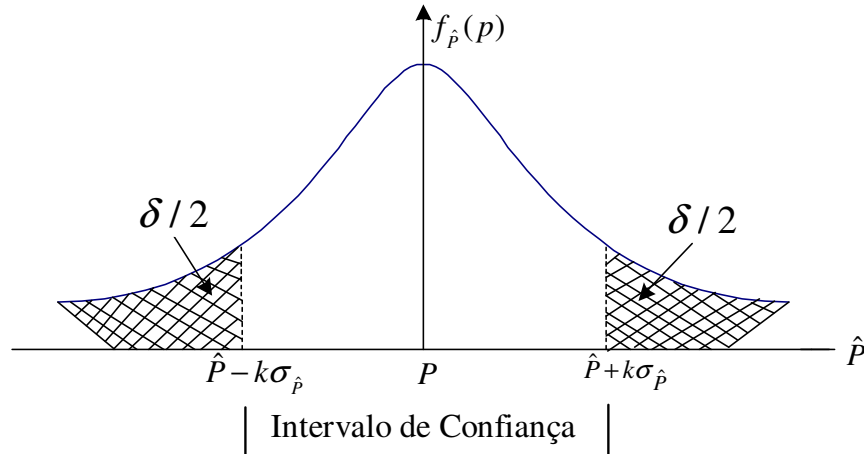
O intervalo de confiança se refere a dois números que sejam função do estimador  $\hat{P}$ , de modo que se tenha nesse intervalo uma alta probabilidade de ocorrência do valor real da probabilidade de erro. A probabilidade associada a esse intervalo é denominada de coeficiente de confiança e é denotada por  $1 - \delta$ , onde  $\delta$  se refere à precisão da estimativa. Valores típicos para  $\delta$  são de 0.05 e de 0.01, correspondendo a 95% e 99% para o coeficiente de confiança, respectivamente [18].

Sabendo-se que o estimador de Monte Carlo é binomialmente distribuído, a fórmula mais simples e comumente utilizada para um intervalo de confiança binomial consiste em se aproximar à distribuição Binomial à uma distribuição Gaussiana. Sabe-se que a distribuição binomial converge para a normal quando  $N \rightarrow \infty$ , sendo esta aproximação justificada pelo Teorema do Limite Central [31].

A Função Densidade de Probabilidade  $f_{\hat{p}}(p)$  do estimador de Monte Carlo terá distribuição Gaussiana com desvio padrão  $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\sigma_{mc} / N_{mc}}$  e sua média tenderá ao valor verdadeiro da probabilidade de erro, ou seja,  $E[\hat{P}] = P$ . Considerando a simetria da FDP do estimador e assumindo que  $k$  é uma constante positiva tem-se,

$$P[\hat{P} - k\sigma_{\hat{p}} \leq P \leq \hat{P} + k\sigma_{\hat{p}}] = 1 - \delta \quad (2.49)$$

A equação (2.49) pode ser visualizada através da Figura 10.



**Figura 10: Ilustração do Intervalo de confiança.**

Através da Figura 10 percebe-se que quanto menor for o intervalo de confiança mais a estimativa se aproximará do valor real. Para um dado coeficiente de segurança é desejável se encontrar a constante positiva  $k$  que minimize o tamanho do intervalo de confiança  $[\hat{P} - k\sigma_{\hat{p}}, \hat{P} + k\sigma_{\hat{p}}]$  que é dado por  $2k\sigma_{\hat{p}}$ .

A equação (2.49) pode ser reescrita na forma equivalente mostrada por:

$$P\left[|\hat{P} - P| < k\sigma_{\hat{P}}\right] = 1 - \delta \quad (2.50)$$

Fazendo uso da desigualdade de Chebyshev na equação (2.50), chega-se a,

$$P\left[|\hat{P} - P| < k\sigma_{\hat{P}}\right] \geq 1 - \frac{\text{var}(\hat{P})}{k^2 \text{var}(\hat{P})} = 1 - \delta \quad (2.51)$$

Através da equação (2.51) se obtém o valor da constante positiva  $k$  cujo valor é dado por:

$$1 - \frac{1}{k^2} = 1 - \delta \quad (2.52-a)$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \quad (2.52-b)$$

Embora o intervalo de confiança seja a medida de qualidade do estimador mais descritiva, suas medidas são geralmente difíceis de obter, principalmente para um número pequeno de amostras [18].

Outra medida usual da confiabilidade de uma estimativa é denominada de erro padrão normalizado ou precisão relativa. Este erro normalizado é definido por:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\text{var}(\hat{P})}}{\hat{P}} \quad (2.53)$$

onde  $\text{var}(\hat{P})$  representa a variância do estimador e  $\hat{P}$  se refere á uma estimativa da probabilidade de erro de bit. Sabendo-se que os erros de bit em um bloco têm distribuição Binomial, onde  $\hat{P}$  é a própria probabilidade de erro média, tem-se:

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \frac{\sqrt{\text{var}(\hat{P})}}{\hat{P}} \\
&= \frac{\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})}}{\sqrt{N_{mc}\hat{P}^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{N_{mc}\hat{P}}}
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Para o desenvolvimento em questão foi considerado  $\hat{P} \ll 1$ .

Através da equação (2.54) se observa que para um valor da precisão relativa de, por exemplo,  $\varepsilon = 0.1$  ou  $\sigma = 0.1\hat{P}$ , valor o qual permite uma boa estimativa da probabilidade de erro de bit [18], o que resulta em 100 erros, ou seja,  $N_{mc}\hat{P} = 1/\varepsilon^2 = 100$ . Isso equivale a dizer que a simulação pelo método de Monte Carlo irá requerer pelo menos  $100/\hat{P}$  observações para produzir um estimador com uma precisão relativa de 10%. Quanto maior o valor do número de erros fixado na simulação menor será o desvio padrão do estimador, mais precisa será a estimativa, e conseqüentemente um maior número de experimentos será necessário para que se consiga atingir determinada precisão relativa.

Por isso é dito que o método de Monte Carlo é “ineficiente” para sistemas onde a relação sinal-ruído é alta, ou seja, sistemas que requerem uma baixa probabilidade de erro. Portanto sugere-se a aplicação do método de Monte Carlo a sistemas onde a taxa de erros por bit seja alta. Esta limitação leva a procura de novas técnicas que consigam reduzir de forma significativa o número de experimentos para determinada precisão relativa. Ressalta-se que o termo “ineficiente” acima citado é relativo, pois depende fortemente do quão rápido é o recurso computacional que estará executando o método de estimação. Dependendo também da aplicação, uma estimação realizada em 10 segundos pode ser considerada extremamente demorada, ao passo que em certos casos um ou dois dias podem ser considerados adequados em outra aplicação. Em suma, quando se diz que o método de Monte Carlos é ineficiente, pretende-se apenas ressaltar o fato de que existem técnicas de redução de variância que podem ser mais eficientes.



O próximo capítulo abordará uma técnica de redução de variância denominada de Valorização das Amostras.

## **2.4 Considerações Finais**

Na Seção 2.3 mostrou-se que o problema do método de Monte Carlo é em relação a quantidade de amostras necessárias para que o valor do estimador alcance determinada precisão. Isso significa dizer que para valores muito baixos da probabilidade de erro de bit o número de execuções da simulação se tornaria proibitivo.

O objetivo desse trabalho é mostrar que a técnica da Valorização das Amostras pode ser aplicada a variados tipos de sistemas de comunicações digitais para prover uma redução do número de observações em relação ao método de Monte Carlo e conseqüentemente reduzir o tempo de simulação. Ao longo desse capítulo foram abordados conceitos desses sistemas que serão fundamentais para que se consiga realizar a implementação da técnica da Valorização das Amostras.

O principal resultado da utilização da Valorização das Amostras nesses variados tipos de sistemas será dado em relação ao número de amostras requeridas para se estimar a probabilidade de erro de bit para uma determinada precisão do estimador. Para que seja realizada a comprovação da eficiência da Valorização das Amostras, os valores obtidos serão, sempre que possível, comparados aos valores estimados pelo método de Monte Carlo. Conseqüentemente, ambos os métodos deverão ter a mesma precisão de seus estimadores para que seja possível haver uma comparação realizada de forma justa.

No Capítulo 3 serão abordados os conceitos da técnica da Valorização das Amostras e a descrição matemática de um modelo de polarização para variáveis aleatórias Gaussianas, o qual será utilizado para a implementação da técnica da Valorização das Amostras nos canais que foram descritos ao longo deste Capítulo.

### 3. VALORIZAÇÃO DAS AMOSTRAS

Em sistemas de comunicação digital, geralmente os eventos de erro têm uma pequena probabilidade de ocorrência e, conseqüentemente, grande parte do tempo de simulação refere-se à geração de amostras, as quais nunca se tornarão eventos de erro. Ao se tentar gerar esses eventos em um número suficientemente grande, o comportamento do sistema em questão poderá sofrer alteração, que será refletida na variação da probabilidade de erro de bit do sistema.

A idéia básica da técnica da Valorização das Amostras se concentra no fato que certos valores das variáveis aleatórias de entrada em uma simulação possuem um impacto maior sobre o parâmetro que está sendo estimado [41]. Se esses valores “importantes” puderem ser enfatizados de modo que se aumente a sua freqüência relativa, então a variância da estimativa pode ser reduzida em relação à variância obtida pelo método de Monte Carlo. Equivalentemente, se a variância dos estimadores de ambos os métodos forem iguais a técnica da Valorização das Amostras necessitará de menos amostras para atingir a precisão desejada da estimativa e isto irá produzir uma redução no tempo de simulação.

Devido a essa redução no tempo de simulação freqüentemente o termo “simulação rápida” é usado para se referir à aplicação das Técnicas de Redução da Variância. A Valorização das Amostras é uma dessas técnicas que provavelmente tem o maior potencial a oferecer no sentido de reduzir de forma substancial o tempo das simulações dos sistemas de comunicações digitais [18] e [41].

A implementação da técnica da Valorização das Amostras consiste em aumentar a ocorrência de erros através de uma polarização controlada nas distribuições de probabilidade de modo que se reforce os valores “importantes” no cálculo da estimativa. Os resultados obtidos através dessa polarização devem ser devidamente ponderados por um fator que irá compensar ou desfazer essas mudanças, ou seja, os contadores de erro devem ser apropriadamente despolarizados.

Nesse Capítulo serão abordados os conceitos que envolvem a escolha da função densidade de probabilidade polarizada. A eficiência da Valorização das Amostras é apresentada em relação a dois parâmetros: a redução da variância de seu estimador em relação ao estimador de Monte

Carlo, e a redução no número de amostras geradas em relação ao método de Monte Carlo para um mesmo valor da variância de ambos os estimadores. O método de polarização da FDP do ruído denominado de Escalonamento é apresentado e os parâmetros necessários para sua implementação são analiticamente avaliados.

### 3.1 Fundamentos

Na técnica da Valorização das Amostras preocupa-se em determinar uma função densidade de probabilidade alternativa  $f_{\mathbf{X}}^*(x)$ , usualmente referida como densidade polarizada. Esta densidade polarizada permite que os eventos raros ocorram mais freqüentemente. Deste modo as amostras na simulação serão geradas pela densidade polarizada e não mais pela FDP original  $f_{\mathbf{X}}(x)$ .

A densidade polarizada deve ser cuidadosamente escolhida de modo que seu efeito no sistema possa ser contabilizado e corrigido através de um processo de ponderação das saídas da simulação, de modo a garantir que a nova estimativa realizada através da técnica da Valorização das Amostras possa ser despolarizada.

Os conceitos que serão abordados a seguir se referem à aplicação da Valorização das Amostras no sistema apresentado na Seção 2.2.2. A aplicação da técnica nesse sistema provê uma descrição generalizada de seus conceitos e implementação. Independente do tipo ou do grau de complexidade do sistema em que se deseja aplicar a técnica, os conceitos aqui apresentados serão válidos e servirão de parâmetros para que se consiga obter uma boa eficiência da técnica.

Com a técnica da Valorização das Amostras a equação da probabilidade de erro de bit do sistema dada na equação (2.10) pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
P_e &= E\{I_E[g(\mathbf{X})]\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} I_E[g(x)] \frac{f_{\mathbf{X}}(x)}{f_{\mathbf{X}}^*(x)} f_{\mathbf{X}}^*(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} I_E[g(x)] w(x) f_{\mathbf{X}}^*(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} I_E^*[g(x)] f_{\mathbf{X}}^*(x) dx \\
&= E^*\{I_E^*[g(\mathbf{X})]\}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

onde  $E^*[\cdot]$  é a esperança em relação à densidade polarizada  $f_{\mathbf{X}}^*(\cdot)$  e  $w(\cdot)$  é a função de ponderação ou função peso que irá assegurar que a estimação da BER seja feita corretamente. Sua definição é dada por:

$$w(x) = \frac{f_{\mathbf{X}}(x)}{f_{\mathbf{X}}^*(x)} \tag{3.2}$$

Como as variáveis aleatórias de entrada do sistema serão geradas com outra função densidade de probabilidade, obviamente as “áreas” onde a variável aleatória  $\mathbf{X}$  resultava em erros não serão mais as mesmas, como pode ser deduzido da última igualdade da equação (3.1). O estimador via Valorização das Amostras será então a média amostral envolvendo estas novas regiões onde a variável aleatória polarizada produza erros. Deste modo tem-se que:

$$\begin{aligned}
\hat{P}_{va} &= \frac{1}{N_{va}} \sum_{i=1}^{N_{va}} I_E^*[g(x_i)] \\
&= \frac{1}{N_{va}} \sum_{i=1}^{N_{va}} I_E[g(x_i)] w(x_i) \quad \mathbf{X} \sim f^*
\end{aligned} \tag{3.3}$$

onde  $N_{va}$  representa o número de experimentos para a Valorização das Amostras. A notação  $\mathbf{X} \sim f^*$  indica que a variável aleatória é gerada a partir da distribuição polarizada.

Como apresentado no Capítulo 2, os estimadores devem apresentar algumas propriedades para serem considerados eficientes. Na próxima Seção será mostrado que o estimador da Valorização das Amostras satisfaz essas propriedades.

### 3.2 Propriedades Estatísticas do estimador da Valorização das Amostras

A primeira condição para um estimador ser eficiente é ser não polarizado, ou seja, seu valor esperado deve ser igual ao parâmetro estimado. Observando a equação (3.3) fica claro que a função  $w(x)$  ajusta as saídas para que o estimador da Valorização das Amostras permaneça não polarizado. Desta forma toda vez que um erro ocorre o contador de erros  $I_E[g(\mathbf{X})]$  é incrementado por  $w(x)$ , o qual é avaliado para o específico valor observado, resultando em uma estimativa não polarizada de  $P_e$ . A veracidade dessa afirmação é mostrada abaixo:

$$\begin{aligned}
 E^*[\hat{P}_{va}] &= E^* \left[ \frac{1}{N_{va}} \sum_{i=1}^{N_{va}} I_E[g(x_i)] w(x_i) \right] \\
 &= \frac{1}{N_{va}} \sum_{i=1}^{N_{va}} \int_{-\infty}^{\infty} I_E[g(x)] w(x) f_{\mathbf{X}}^*(x) dx \\
 &= \frac{1}{N_{va}} \sum_{i=1}^{N_{va}} \int_{-\infty}^{\infty} I_E[g(x)] \frac{f_{\mathbf{X}}(x)}{f_{\mathbf{X}}^*(x)} f_{\mathbf{X}}^*(x) dx \\
 &= \frac{1}{N_{va}} N_{va} \int_{-\infty}^{\infty} I_E[g(x)] f_{\mathbf{X}}(x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} I_E[g(x)] f_{\mathbf{X}}(x) dx \\
 &= P_e
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

A variância do estimador da Valorização das Amostras é dada por:

$$\text{var}[\hat{P}_{va}] = E^*[\hat{P}_{va}]^2 - \{E^*[\hat{P}_{va}]\}^2 \tag{3.5}$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned}
 \text{var}[\hat{P}_{va}] &= \frac{1}{N_{va}} \text{var}[I_E[g(\mathbf{X})] w(\mathbf{X})] \\
 &= \frac{1}{N_{va}} \left\{ E^* \{ I_E[g(\mathbf{X})]^2 w^2(\mathbf{X}) \} - E^* \{ I_E[g(\mathbf{X})] w(\mathbf{X}) \}^2 \right\}
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Através da equação (3.4), o segundo termo da equação (3.5) será:

$$E^2 \{ I_E[g(\mathbf{X})] w(\mathbf{X}) \} = P_e^2 \tag{3.7}$$

Substituindo o valor médio dado na equação (3.7) na equação (3.6) tem-se que:

$$\begin{aligned}
\text{var}(\hat{P}_{va}) &= \frac{1}{N_{va}} \text{var} \{ I_E [g(\mathbf{X})] w(\mathbf{X}) \} \\
&= \frac{1}{N_{va}} \left\{ E^* \{ I_E [g(\mathbf{X})]^2 w^2(\mathbf{X}) \} - P_e^2 \right\} \\
&= \frac{1}{N_{va}} \left\{ E^* \{ I_E [g(\mathbf{X})] w^2(\mathbf{X}) \} - P_e^2 \right\} \\
&= \frac{1}{N_{va}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} I_E [g(x)] w^2(x) f_{\mathbf{X}}^*(x) dx - P_e^2 \right\} \\
&= \frac{1}{N_{va}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} I_E [g(x)] \frac{f_{\mathbf{X}}^2(x)}{f_{\mathbf{X}}^{*2}(x)} f_{\mathbf{X}}^*(x) dx - P_e \int_{-\infty}^{\infty} I_E [g(x)] f_{\mathbf{X}}(x) dx \right\} \\
&= \frac{1}{N_{va}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} I_E [g(x)] w(x) f_{\mathbf{X}}(x) dx - P_e \int_{-\infty}^{\infty} I_E [g(x)] f_{\mathbf{X}}(x) dx \right\} \\
&= \frac{1}{N_{va}} \int_{-\infty}^{\infty} I_E [g(x)] [w(x) - P_e] f_{\mathbf{X}}(x) dx
\end{aligned} \tag{3.8}$$

A partir da equação (3.8) pode-se verificar que o estimador da Valorização das Amostras será consistente, ou seja,  $\text{var}(\hat{P}_{va}) \rightarrow 0$  à medida que  $N_{va} \rightarrow \infty$ , o que caracteriza um estimador consistente.

Como visto na Seção 2.3.1, a variância do estimador de Monte Carlo, dada na equação (2.49), é expressa por:

$$\begin{aligned}
\text{var}[\hat{P}_{mc}] &= \frac{P_e(1-P_e)}{N_{mc}} \\
&= \frac{(1-P_e)}{N_{mc}} \int_{-\infty}^{\infty} I_E [g(x)] f_{\mathbf{X}}(x) dx \\
&= \frac{1}{N_{mc}} \int_{-\infty}^{\infty} I_E [g(x)] [1-P_e] f_{\mathbf{X}}(x) dx
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Equivalentemente a equação (3.9) pode ser obtida ao se fazer  $w(x) = 1$  e  $N_{va} = N_{mc}$  na equação (3.8).

Através da equação (3.8) pode-se observar que se  $w(x) < 1$  implica em  $f_{\mathbf{X}}^*(x) > f_{\mathbf{X}}(x)$  nas áreas de erro, reduzindo desta forma o valor da integral da equação (3.8) e, conseqüentemente, diminuindo o valor da variância do estimador da Valorização das Amostras. Portanto, o principal objetivo da Valorização das Amostras é escolher uma distribuição polarizada  $f_{\mathbf{X}}^*(x)$  que reforce os valores relevantes na região de erro.

A eficiência da técnica da Valorização das Amostras em relação ao método de Monte Carlo pode ser medida em relação a dois parâmetros que serão explicados a seguir.

### 3.3 Ganhos de Simulação

Uma forma de testar se a distribuição polarizada foi escolhida com sucesso consiste em comparar a variância do estimador da técnica da Valorização das Amostras com a variância do estimador de Monte Carlo, para um número fixo de amostras. A eficiência do estimador da Valorização das Amostras será função do quão pequena for a sua variância em relação à variância do estimador de Monte Carlo.

A possibilidade de redução da variância é evidente ao se comparar às equações (3.8) e (3.9). Pode ser visto que para qualquer função de ponderação  $[w(x) - P_e]$  o valor da integral na equação (3.8) será menor do que o valor da integral dada na equação (3.9). Desta forma  $[w(x) - P_e] < [1 - P_e]$  para  $w(x) < 1$  e para  $N_{va} = N_{mc}$ . A relação entre as variâncias do estimador de Monte Carlo e do estimador da Valorização das Amostras é dada por:

$$\frac{\text{var}(\hat{P}_{mc})}{\text{var}(\hat{P}_{va})} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} I_E[g(x)][1 - P_e] f_{\mathbf{X}}(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} I_E[g(x)][w(x) - P_e] f_{\mathbf{X}}(x) dx} \quad (3.10)$$

Geralmente nas simulações é mais usual se fixar um valor para as variâncias de ambos os métodos, através da precisão relativa, por exemplo. Desta forma a eficiência da Valorização das Amostras será medida em relação ao número de amostras necessárias para atingir a mesma precisão. Ao se igualar as variâncias  $\text{var}(\hat{P}_{mc}) = \text{var}(\hat{P}_{va})$  resultará em  $N_{va} < N_{mc}$ . Essa redução no número de amostras é denominada de ganho ou fator de redução das amostras,  $\eta$ , dado por:

$$\eta = \frac{N_{mc}}{N_{va}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} I_E[g(x)][1 - P_e] f_{\mathbf{X}}(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} I_E[g(x)][w(x) - P_e] f_{\mathbf{X}}(x) dx} \quad (3.11)$$

Esse fator deve ter o seu valor maximizado a fim de se conseguir uma boa eficiência da técnica da Valorização das Amostras em relação ao método de Monte Carlo.

Observa-se que as equações (3.10) e (3.11) assumem o mesmo comportamento e ambas demonstram a vantagem da Valorização das Amostras em relação ao método de Monte Carlo. Portanto, uma boa escolha da função densidade de probabilidade polarizada  $f_{\mathbf{X}}^*(x)$  garante tanto uma redução na variância do estimador quanto uma redução no número de amostras geradas.

A penalidade para a escolha de uma densidade polarizada inadequada é o aumento do número de amostras geradas para atingir uma dada precisão, em relação ao número de amostras requeridas pelo método de Monte Carlo. A busca por essas densidades de polarização eficazes varia em relação ao tipo do sistema proposto para a implementação da Valorização das Amostras. Felizmente existem alguns métodos de polarização que se aplicam a determinados tipos de sistema e que auxiliam na busca por essas distribuições, como apresentado na próxima seção.

### 3.4 Polarização da Função Densidade de Probabilidade Gaussiana

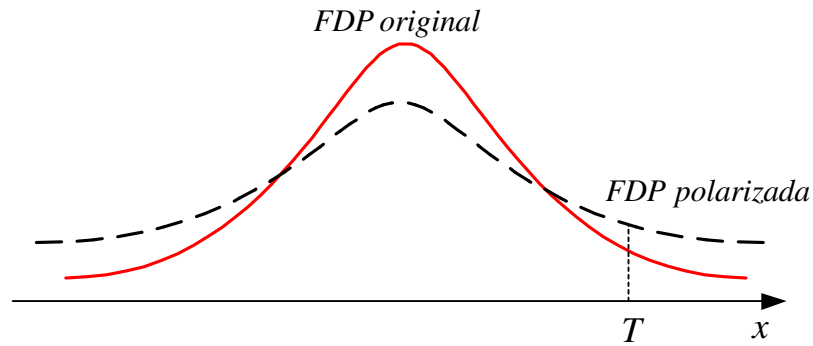
A estimação da probabilidade de erro de bit em sistemas de comunicações digitais freqüentemente é realizada assumindo que o processo do ruído que interfere no sistema tem uma função densidade de probabilidade Gaussiana de média zero, dada na forma  $f \in N(0, \sigma^2)$  onde  $\sigma^2$  é a variância do ruído. Como visto na Seção 2.2.2, a maior probabilidade da ocorrência de erros se concentra nas caudas dessas FDPs. Deste modo, para aumentar a ocorrência desses eventos no sistema deve-se enfatizar as caudas das FDPs do ruído.

A literatura da aplicação da Valorização das Amostras na estimação da probabilidade de erro de bit em sistemas de comunicações digitais é, grosso modo, dividida em dois métodos para a polarização das variáveis aleatórias Gaussianas do ruído, denominados de Escalonamento e Translação. O modelo de polarização referido como Escalonamento foi introduzido por [39] e a



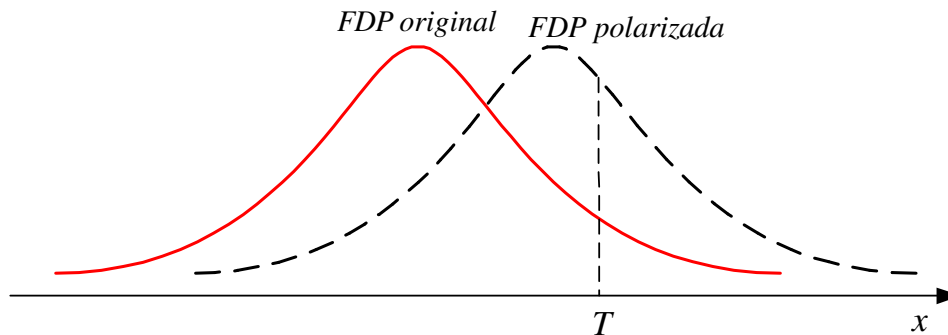
partir desse modelo foram surgindo derivações como o método da Translação apresentado por [30].

No Escalonamento a polarização da FDP do ruído é realizada através do aumento da variância por um fator constante. Deste modo a probabilidade dos eventos localizados na cauda tende a aumentar a partir de um limiar  $T$ , onde as regiões de erro serão então referidas como  $I_E(T, \infty)$ . A densidade polarizada é escolhida de forma que  $f_{\mathbf{X}}^* \in N(0, \sigma_*^2)$  em que  $\sigma_*^2 > \sigma^2$ , como ilustrado na Figura 11.



**Figura 11: Implementação da Valorização das Amostras pela alteração da variância da FDP do ruído.**

No método da Translação, a Função Densidade de Probabilidade Gaussiana do ruído é polarizada através do deslocamento da média para um novo ponto. Nesse método a FDP manterá a mesma variância, porém sua média terá um valor diferente de zero. Desta forma a densidade polarizada terá a forma  $f_{\mathbf{X}}^* \in N(\mu_*, \sigma^2)$ , como ilustrado na Figura 12. Ao contrário do Escalonamento, o deslocamento da média não será constante, mas variante no tempo de modo que  $\mu_* = \mu_*(kT_b)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N_{va}$ , onde  $k$  indexa as amostras da simulação e  $T_b$  representa o intervalo de tempo entre as amostras [18].



**Figura 12: Aumento da probabilidade dos eventos localizados na cauda pela alteração da média da FDP do ruído.**

Embora ambos os métodos sejam largamente utilizados nas aplicações da Valorização das Amostras, a vantagem do Escalonamento é a sua facilidade de implementação. Esse método não requer o conhecimento detalhado dos efeitos da não-linearidade, da resposta em frequência dos filtros, da modulação e codificação adotadas, ao contrário do método da translação que requer maior grau de complexidade na sua implementação [38].

Devido a essa facilidade de implementação, por ser utilizado em diversos tipos de sistemas e ser o método pioneiro da implementação da Valorização das Amostras, no Capítulo 4 foi utilizado o método do Escalonamento para polarizar a FDP do ruído e demonstrar a eficiência da Valorização das Amostras em relação ao método de Monte Carlo. Esse método será explicado em detalhes a seguir.

### 3.4.1 Método do Escalonamento

Para a formulação matemática do método do Escalonamento é adotado o modelo de comunicação digital binário ilustrado na Figura 2 do Capítulo 2. Nesse modelo é considerado que a decisão seja realizada a partir de um único valor amostrado da entrada. A função de transferência do sistema é considerada como sendo linear. Neste ponto é interessante relembrar a expressão da probabilidade de erro de bit do sistema dada por:

$$P_e = \int_{-\infty}^{\infty} I_E[g(x)] f_{\mathbf{X}}(x) dx \quad (3.12)$$

onde a variável aleatória  $\mathbf{X} = \mathbf{A} + \mathbf{N}$  representa as amostras mutuamente independentes do sinal transmitido e mais ruído. O vetor  $\mathbf{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_K, \dots, A_N\}$  representa os dados da entrada e o vetor do ruído  $\mathbf{N} = \{N_1, N_2, \dots, N_k, \dots, N_N\}$  representa uma seqüência Gaussiana independente e identicamente distribuída de média zero e variância  $N_0 / 2$ .

De acordo com a Figura 3 e a equação (2.6), para símbolos equiprováveis o cálculo da probabilidade de erro se resume ao cálculo de uma das áreas à esquerda ou à direita do limiar de decisão 0. Este cálculo pode ser realizado deslocando-se uma das densidades para que se tenha média zero, e calculando-se a área da cauda a partir do limiar  $T$ , conforme Figura 11. Desse modo, do ponto de vista da análise matemática que segue, a variável aleatória de entrada pode ser escrita somente em função do ruído, ou seja,  $\mathbf{X} = \mathbf{N}$ . Conseqüentemente  $\mathbf{X}$  será uma variável aleatória Gaussiana de média zero e variância  $\sigma^2 = N_0 / 2$ , cuja FDP é dada por:

$$f_{\mathbf{X}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-x^2 / 2\sigma^2\right) \quad -\infty < x < \infty \quad (3.13)$$

A escolha da Função Densidade Polarizada  $f_{\mathbf{X}}^*(x)$  seguirá o modelo de polarização proposto em [39] dado por:

$$f_{\mathbf{X}}^*(x) = \frac{c f_{\mathbf{X}}(x)}{[f_{\mathbf{X}}(x)]^\alpha} \quad -\infty < x < \infty \quad (3.14)$$

onde

$$0 \leq \alpha < 1 \quad (3.15)$$

e  $c$  é uma constante de normalização positiva dependente de  $\alpha$ , cujo valor é dado por:

$$c = \sqrt{\frac{(1-\alpha)}{(2\pi\sigma^2)^\alpha}} \quad (3.16)$$

Essas constantes devem ser escolhidas de modo que a FDP polarizada tenha área unitária e que o fator de ganho  $\eta$  dado na equação (3.11) tenha o seu valor maximizado [39]. Deste modo,  $f_{\mathbf{X}}^*(x)$  permanecerá como uma FDP Gaussiana de média zero e uma nova variância dada por:

$$\sigma_*^2 = \frac{\sigma^2}{(1-\alpha)} \quad (3.17)$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{X}}^*(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/(1-\alpha)}} \exp\left\{-x^2/[2\sigma^2/(1-\alpha)]\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_*^2}} \exp\left(-x^2/2\sigma_*^2\right) \quad -\infty < x < \infty \end{aligned} \quad (3.18)$$

A variância da Função Densidade de Probabilidade Polarizada será maior que a variância original para valores de  $0 \leq \alpha < 1$ , sendo que para  $\alpha = 0$  as variâncias se igualam e, conseqüentemente, a FDP polarizada se reduz à FDP original.

A função de ponderação, dada na equação (3.2), pode ser reescrita como:

$$w(x) = \frac{\sigma_*}{\sigma} \exp\left[-(1-\sigma^2/\sigma_*^2)(x^2/2\sigma^2)\right] \quad -\infty < x < \infty \quad (3.19)$$

A grande dificuldade da implementação desse método consiste em conhecer a priori a região que se deseja aumentar a probabilidade de ocorrência dos eventos de interesse, ou seja, a partir de qual valor do limiar se deve aumentar a ocorrência de erros e como o parâmetro de polarização  $\alpha$  deve ser escolhido de modo que se tenha uma boa eficiência da técnica.

Admite-se que se deseja aumentar a probabilidade de erro do sistema a partir de um limiar  $T$ , como ilustrado na Figura 11, em que as regiões de erro serão especificadas como  $I_E(T, \infty)$ . A probabilidade de erro de bit representada pela equação (3.12) terá a forma equivalente dada por:

$$P_e = \int_T^{\infty} f_{\mathbf{X}}(x) dx \quad (3.20)$$

Sabendo que a técnica da Valorização das Amostras visa à redução da variância de seu estimador, pode-se encontrar uma relação entre essa minimização da variância do estimador e a escolha do valor de  $\alpha$ . A equação (3.8) da variância do estimador da Valorização das Amostras pode ser equivalentemente expressa por:

$$\begin{aligned}
\text{var}(\hat{P}_{va}) &= \frac{1}{N_{va}} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} I_E[g(x)] w(x) f_{\mathbf{X}}(x) dx - P_e^2 \right] \\
&= \frac{1}{N_{va}} \left[ \int_T^{\infty} w(x) f_{\mathbf{X}}(x) dx - P_e^2 \right] \\
&= \frac{1}{N_{va}} \left\{ \int_T^{\infty} \frac{\sigma_*}{\sigma \sqrt{2\pi} \sigma} \exp \left[ -\frac{x^2}{2\sigma^2} \left( 2 - \frac{\sigma^2}{\sigma_*^2} \right) \right] dx - P_e^2 \right\} \tag{3.21}
\end{aligned}$$

Como se deseja estimar a probabilidade dos eventos na cauda da Gaussiana, torna-se mais conveniente aproximar a integral da equação (3.21) por uma distribuição Gaussiana complementar  $Q(u)$ , que por definição é dada por:

$$Q(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_u^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \tag{3.22}$$

Para reformular a equação (3.21) em termos da distribuição Gaussiana complementar, deve-se definir uma nova variável representada por:

$$z = \frac{x d}{\sigma} \tag{3.23}$$

onde

$$d^2 = \left( 2 - \frac{\sigma^2}{\sigma_*^2} \right) \tag{3.24}$$

Conseqüentemente a equação (3.21) pode ser reescrita na forma compacta dada por:

$$\text{var}(\hat{P}_{va}) = \frac{1}{N_{va}} \left[ \frac{\sigma_*}{\sigma d} Q\left(\frac{Td}{\sigma}\right) - P_e^2 \right] \tag{3.25}$$

Para grandes valores de  $u$  ( $u \geq 3$ ) [16] a distribuição Gaussiana complementar dada na equação (3.22) é aproximada para seu limitante superior dado por:

$$Q(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} u} \exp\left(\frac{-u^2}{2}\right) \tag{3.26}$$

Conseqüentemente a equação (3.25) pode ser reescrita na forma dada por:

$$\text{var}(\hat{P}_{va}) = \frac{1}{N_{va}} \left\{ \left[ \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}(2-1/\beta^2)T/\sigma} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{T^2(2-1/\beta^2)}{\sigma^2} \right) \right] \right] - P_e^2 \right\} \quad (3.27)$$

onde

$$\beta = \frac{\sigma_*}{\sigma} \quad (3.28)$$

Substituindo a equação (3.28) na equação (3.17) chega-se a relação entre  $\alpha$  e  $\beta$ ,

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} \quad (3.29)$$

Ao substituir a equação (3.29) na equação (3.17) se obtém a forma equivalente da variância do estimador dada por:

$$\text{var}(\hat{P}_{va}) = \frac{1}{N_{va}} \left\{ \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\alpha)(1+\alpha)}T/\sigma} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{T^2(1+\alpha)}{\sigma^2} \right) \right] \right] - P_e^2 \right\} \quad (3.30)$$

Através da equação (3.30) observa-se que a variância do estimador será reduzida ao se minimizar o primeiro termo entre chaves e que está em função de  $\alpha$ . Esse termo responsável pela minimização da variância do estimador da Valorização das Amostras será denominado de  $I(\alpha)$ , ou seja:

$$I(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\alpha)(1+\alpha)}T/\sigma} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{T^2(1+\alpha)}{\sigma^2} \right) \right] \quad (3.31)$$

Fazendo  $dI(\alpha)/d\alpha = 0$  obtém-se o valor de  $\alpha$  que irá minimizar  $I(\alpha)$  e, conseqüentemente, a variância do estimador da Valorização das Amostras. Esse valor ótimo de  $\alpha$  é calculado pela expressão:

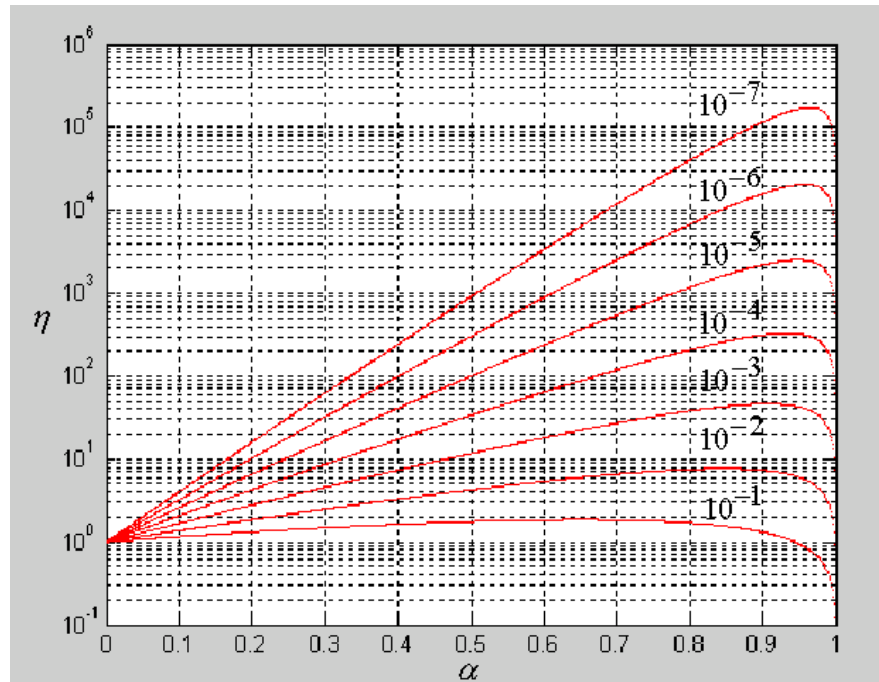
$$\alpha_{opt} = \frac{-3 + \sqrt{9 + 4T^2/\sigma^2 (T^2/\sigma^2 + 1)}}{2T^2/\sigma^2} \quad (3.32)$$

A tabela I contém um sumário dos valores de  $T/\sigma$ , que são as probabilidades da cauda de  $Q(T/\sigma)$ . Os valores de  $T/\sigma$  foram determinados a partir da probabilidade de erro teórica  $P_e$ . A tabela mostra também os valores ótimos de  $\alpha$  para essas probabilidades de erro de bit.

**Tabela 1: Valores ótimos de  $\alpha$  em função da probabilidade de erro de bit.**

$P_e$	$T/\sigma$	$\alpha_{opt}$
$10^{-1}$	1.2815	0.6497
$10^{-2}$	2.3263	0.8460
$10^{-3}$	3.0902	0.9057
$10^{-4}$	3.7190	0.9327
$10^{-5}$	4.2649	0.9480
$10^{-6}$	4.7535	0.9577
$10^{-7}$	5.1993	0.9644

Uma consideração importante a se fazer refere-se ao fato de que  $\alpha_{opt}$ , ao reduzir a variância do estimador da Valorização das Amostras irá conseqüentemente maximizar o fator de redução das amostras, definido na equação (3.11). Assumindo que o erro normalizado possui valor de  $\varepsilon = 0.1$  e que, conseqüentemente,  $N_{mc} = 1/(\varepsilon^2 P_e)$ , ao se igualar as variâncias dos estimadores de Monte Carlo e da Valorização das Amostras é possível se calcular o ganho teórico para cada valor da probabilidade de erro de bit em função da variação dos valores de  $\alpha$ . O gráfico da Figura 13 ilustra o comportamento da equação (3.11) em relação às probabilidades de erro de bit e os valores de  $\alpha$ .



**Figura 13: Ganho variando com os valores de  $\alpha$  .**

Através do gráfico se observa que o fator de redução das amostras em relação a cada probabilidade de erro será maximizado de acordo com a aproximação de  $\alpha$  em relação a seu valor ótimo. Na utilização do método do escalonamento ficou evidente que a eficiência do método irá depender da escolha do valor de  $\alpha$  . Algumas propriedades podem ser descritas em relação à escolha desse parâmetro:

- Para grandes valores de  $T / \sigma$  , ou seja, para a estimação de baixas probabilidades de erro, o valor ótimo de  $\alpha$  é próximo mas menor que 1.
- Para probabilidades de erro de bit superiores a  $10^{-3}$  o desempenho da técnica da Valorização das Amostras se iguala ao método de Monte Carlo, ou seja, através do gráfico mostrado na Figura 13 pode-se observar que os ganhos obtidos não possuem valores significativos. Isto ocorre porque para probabilidades de erro de bit elevadas, a ocorrência de erros é grande e conseqüentemente a precisão desejada da estimação da probabilidade de erro de bit é rapidamente alcançada nas simulações. Em contraste, na Valorização das Amostras, embora a mesma precisão



da estimativa seja alcançada, um maior esforço computacional é requerido na estimação da probabilidade de erro de bit (como, por exemplo, o cálculo do peso associado a cada ocorrência de erro).

- O fator de redução das amostras aumenta conforme a probabilidade de erro de bit estimada se torna menor. O esforço adicional da Valorização das Amostras é compensado pelo decréscimo da probabilidade de erro de bit.

Como verificado, o valor ótimo de  $\alpha$  varia para cada relação sinal-ruído do sistema. Contudo é necessário encontrar um valor constante para  $\alpha$  de modo que o estimador da Valorização das Amostras não seja polarizado e que os ganhos obtidos sejam significativos. Em geral o valor apropriado desse parâmetro depende do tipo do sistema no qual o método da Valorização das Amostras irá ser implementado.

### 3.5 Sumário

A idéia básica da Valorização das Amostras consiste em aumentar a ocorrência de erros na simulação de modo que a variância da estimativa pode ser reduzida em relação à variância do estimador de Monte Carlo. Alternativamente, para os mesmos valores das variâncias, consiste em reduzir o número de amostras necessárias para se alcançar a precisão desejada.

Como mostrado, os erros não serão simplesmente contados como realizado no método de Monte Carlo. Na Valorização das Amostras os erros serão ponderados antes da sua contagem pela função peso, a qual é em função da polarização realizada nas propriedades estatísticas das variáveis aleatórias de entrada. A partir dessa ponderação é que se consegue realizar uma estimativa despolarizada com um menor número de execuções na simulação.

A escolha da Função polarizada será função de  $\alpha$ , ou seja, a partir desse parâmetro é que se consegue determinar o aumento na variância da FDP polarizada de modo que se consiga aumentar a ocorrência de erros no sistema. Embora exista esse modelo de polarização, deve-se ter cuidado ao utilizá-lo na implementação da Valorização das Amostras em outros tipos de sistemas, pois a implementação da técnica é totalmente dependente do funcionamento do sistema

em questão. Isto significa que o valor de  $\alpha$  escolhido para determinado tipo de sistema não será a melhor escolha para um outro tipo diferente de sistema.

A utilização da Valorização das Amostras deve ser combinada com o funcionamento do sistema em questão, e isso é que traz a necessidade de sua aplicação ser particularizada de acordo com o sistema adotado. No próximo Capítulo, serão mostradas essas particularidades em relação a três cenários distintos: sistema de comunicação digital em um canal AWGN, sistema de comunicação em um canal com desvanecimento Rayleigh e sistema de comunicação com código corretor de erro.

## **4. ESTUDOS DE CASO SOBRE APLICAÇÕES DA VALORIZAÇÃO DAS AMOSTRAS**

No Capítulo 3 foram introduzidos os conceitos básicos sobre a Valorização das Amostras. Este capítulo tem como objetivo aplicar esses conceitos a diferentes tipos de sistemas de comunicações digitais e avaliar a performance da técnica em relação ao método de Monte Carlo. Como já citado, a aplicação da Valorização das Amostras se torna particular e varia de acordo com o modelo adotado para sua implementação. Ao longo deste Capítulo será mostrada uma abordagem em que a principal preocupação se concentra em deixar claro como a técnica da Valorização das Amostras se aplica aos três cenários escolhidos para sua análise: sistema de comunicação digital em um canal AWGN, em canal com desvanecimento plano e com código corretor de erro.

O sistema de comunicação digital em um canal AWGN foi utilizado para que se mostrassem os conceitos teóricos, apresentados no Capítulo 3, do modelo de polarização Escalonamento. Esse modelo tem grande importância, pois toda teoria relativa à implementação da Valorização das Amostras teve como base a sua utilização.

A simulação de um sistema de comunicação em um canal com desvanecimento plano através da Valorização das Amostras teve como objetivo verificar que a implementação da técnica varia de acordo com o tipo do modelo adotado. Em outras palavras, os conceitos apresentados sobre a Valorização das Amostras devem ser combinados com o comportamento do sistema, para que seja possível realizar sua implementação. Deste modo, pode-se afirmar que os valores dos parâmetros estabelecidos para a polarização da FDP em um canal AWGN não serão válidos para um canal com desvanecimento plano.

Na implementação da Valorização das Amostras em um canal com código corretor de erro, adotou-se um modelo de polarização diferente do Escalonamento. A escolha desse modelo de polarização só reforça a afirmação de que a aplicação da técnica deve ser muito bem estudada e manipulada de modo que, junto com o comportamento do sistema garanta bons ganhos em relação ao método de Monte Carlo.

O ambiente de simulação utilizado neste trabalho é baseado no software Matlab da empresa Mathworks Incorporated. Para validação dos resultados obtidos através das simulações realizadas por ambos os métodos, de Monte Carlo e da Valorização das Amostras, fez-se uma comparação com os resultados obtidos por modelos teóricos de acordo com o tipo de sistema adotado.

#### 4.1 Sistemas com Memória

Um canal de comunicação é dito sem memória quando afeta de maneira independente símbolos adjacentes. Ao contrário, quando vários símbolos consecutivos são afetados, diz-se que se trata de um canal com memória. Os erros causados por esse tipo de canal não são estatisticamente independentes, o que compromete a confiança na transmissão da informação.

Um canal com ruído AWGN é um canal sem memória, pois os erros causados por esse tipo de canal são estatisticamente independentes. Ao contrário de um canal AWGN, a característica inerente a um canal rádio móvel é ser com memória. Nos momentos de profundos desvanecimentos, uma grande quantidade de bits pode ser “destruída”. Os decodificadores dos códigos corretores de erro, de maneira geral, não têm capacidade de corrigir essas longas seqüências de erros em rajada (ou erros em *burst*) [14].

Um método efetivo para minimizar o problema dos canais com erros em rajada é intercalar os bits codificados de modo que esse tipo de canal seja transformado em um canal que causa erros independentes. Esse método é denominado de *interleaving* [14].

O princípio do *interleaving* consiste em “embaralhar” os bits codificados de tal sorte que bits anteriormente adjacentes sejam colocados distantes no tempo. Isso faz com que, na ocorrência de erros em *burst*, não sejam afetados bits adjacentes, facilitando o processo de detecção e correção de erros. Um simples processo de *interleaving* é aquele no qual a seqüência de bits codificados preenche linha a linha uma memória de tamanho definido e os bits entrelaçados são lidos coluna a coluna dessa memória [14]. Na recepção o processo inverso é executado.

Um outro tipo de memória, que se refere aos sistemas de comunicações, é definido em relação à detecção. Nesse tipo de sistema a decisão a respeito de um determinado símbolo é realizada de acordo com uma seqüência de símbolos recebidos. Ou seja, existe uma dependência entre símbolos consecutivos recebidos, dependência esta que é explorada pelo receptor para tomar a decisão. Neste trabalho é considerado como um sistema de comunicação com memória somente o sistema com códigos corretores de erro.

## 4.2 Procedimentos de simulação para implementação do método Escalonamento

### 4.2.1 Método de Monte Carlo

Para a descrição da estimação da probabilidade de erro de bit através do método de Monte Carlo será considerando um sistema de comunicação digital binário com uma sinalização antipodal. O princípio da simulação pelo método de Monte Carlo é demonstrado na Figura 14.

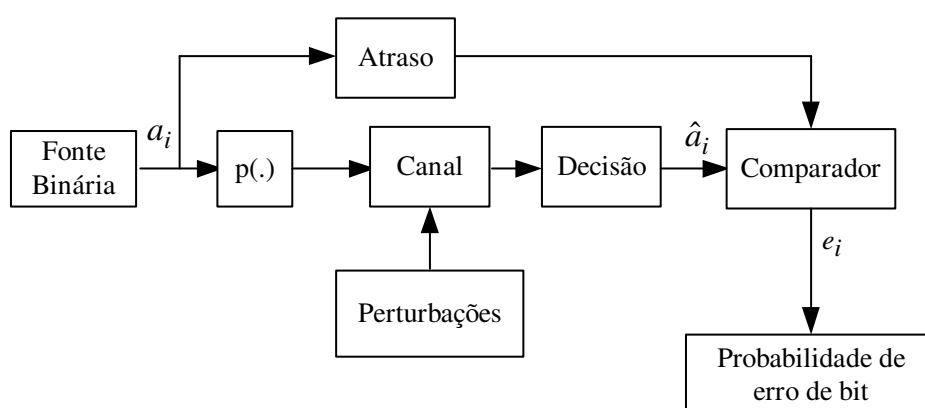


Figura 14: Modelo de simulação utilizando o método de Monte Carlo.

Na simulação desse sistema os bits de entrada  $a_i$  são gerados através de geradores de números 0 ou 1, de forma aleatória. É importante salientar que os dados de entrada não irão sofrer qualquer polarização. Ao passarem pelo bloco referente ao pulso retangular  $p(\cdot)$ , os dados transmitidos terão os valores de  $\pm 1$ . O bloco do canal se refere às degradações que irão corromper o sinal.

Na decisão, os bits da saída do canal são comparados com um limiar de decisão. Dessa forma o receptor irá decidir a favor do bit 0 se a amplitude da amostra do sinal recebido for menor que zero, em outro caso o receptor irá decidir a favor do bit de valor 1. O bit estimado  $\hat{a}_i$  é então comparado com o bit transmitido. Se  $a_i \neq \hat{a}_i$  ocorrerá um erro e o contador de erros será incrementado.

A medida adotada nas simulações para se obter uma precisão na estimativa será o erro padrão normalizado. Desta forma, os bits de entrada são gerados até que se atinja um número de erros pré-estipulado no início da simulação. Nas simulações adotou-se que  $\epsilon = 0.1$ , o que leva ao número de erros igual a 100. A probabilidade de erro de bit é então calculada como a relação entre o número de erros e o número total de bits transmitidos.

#### 4.2.2 Valorização das Amostras em um canal AWGN

O procedimento de simulação da aplicação da Valorização das Amostras em um canal AWGN é ilustrado na Figura 15.

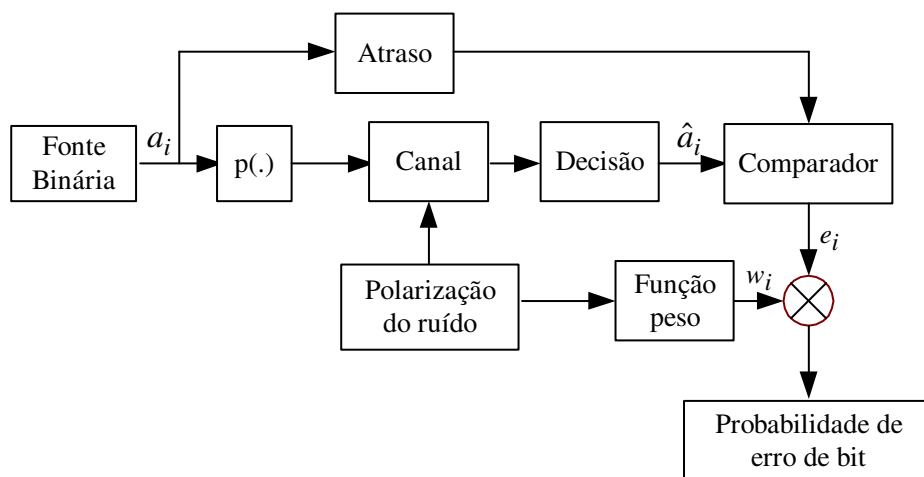


Figura 15: Modelo de simulação em canal AWGN via Valorização das Amostras.

Nas simulações utilizando o método de Monte Carlo adotou-se o modelo vetorial para o canal AWGN (e não o modelo contínuo mostrado na Figura 14), no qual o ruído é adicionado ao sinal no ponto onde é definida a variável de decisão, ou seja, na saída do filtro casado ou do

correlator. A variância do ruído neste ponto é de  $N_0 / 2$ , onde  $N_0$  é determinado de acordo com a relação  $E_b / N_0$  desejada e onde  $E_b$  é a energia média de bit e  $N_0 / 2$  é densidade espectral de potência do ruído. Assim, as amostras do ruído são números aleatórios escolhidos a partir de uma distribuição Gaussiana de média zero e variância  $\sigma^2 = N_0 / 2$ .

Na simulação com a Valorização das Amostras, as amostras do ruído não são geradas a partir da distribuição original, como ocorre no caso da simulação pelo método de Monte Carlo, e sim através de uma distribuição polarizada. Como visto no Capítulo 3, a polarização será referente ao aumento da variância da FDP para que se aumente a ocorrência de erros.

Deste modo, as amostras do ruído são números aleatórios gerados a partir de uma distribuição polarizada Gaussiana de média zero cuja variância é dada pela relação:

$$\sigma_*^2 = \frac{\sigma^2}{(1-\alpha)} \quad (4.1)$$

Para cada ocorrência de erro, o fator de peso será incrementado como:

$$w(x) = \frac{\sigma_*}{\sigma} \exp \left[ - (1 - \sigma^2 / \sigma_*^2) (x^2 / 2\sigma^2) \right] \quad (4.2)$$

Um estimador despolarizado é então obtido ao associar um peso a cada erro particular levando a:

$$\hat{P}_{va} = \frac{1}{N_{va}} \sum_{i=1}^{N_{va}} I_E[g(x_i)] w(x_i) \quad (4.3)$$

A probabilidade de erro de bit é estimada independentemente para cada relação sinal-ruído do sistema. Da mesma forma que na simulação pelo método de Monte Carlo, os bits de entrada são gerados até que se atinja um número de erros pré-estipulado no início da simulação. Deste modo, as precisões de ambos os estimadores, de Monte Carlo e da Valorização das Amostras, terão o mesmo valor. Assim é possível calcular o fator de ganho referente a cada relação sinal-ruído do sistema, e com isso se obter o grau de eficiência da Valorização das Amostras.

Como pode ser visto através da equação (4.1) a polarização da FDP do ruído depende da escolha do valor de  $\alpha$ . Na implementação da Valorização das Amostras a escolha de um valor constante de  $\alpha$  primeiramente se baseou nos resultados teóricos mostrados no Capítulo 3. Observa-se através da Tabela 1 que os valores de  $\alpha$ , para uma probabilidade de erro inferior a  $10^{-3}$ , se concentram no intervalo  $0.9 \leq \alpha < 1$ .

O critério adotado para a escolha do valor constante de  $\alpha$ , dentro do intervalo teórico, teve como base dois parâmetros. O primeiro parâmetro se refere à variância do estimador da Valorização das Amostras em relação à variância do estimador de Monte Carlo. Como na simulação o erro normalizado foi fixado em  $\varepsilon = 0.1$ , as variâncias de ambos os estimadores deveriam ser iguais. O outro parâmetro se refere ao ganho referente à escolha desses valores de  $\alpha$ .

Os valores de  $\alpha$  no intervalo  $0.9 \leq \alpha < 1$  foram analisados de acordo com os parâmetros de variância e de ganho. Algumas conclusões foram tecidas em relação aos resultados obtidos através da variação dos valores de  $\alpha$ :

- Primeiramente para o valor de  $\alpha = 0$ , que simplesmente representa o método de Monte Carlo, foi computado o valor da variância do estimador e o número de amostras geradas para determinada relação sinal-ruído do sistema.
- Para cada valor de  $\alpha$  também foram computados o valor da variância do estimador da Valorização das Amostras e o número de amostras geradas. Esses valores foram comparados com os valores obtidos pelo método de Monte Carlo.
- Observou-se que o ganho produzido pelos valores de  $\alpha$  contidos no intervalo  $0.9 \leq \alpha \leq 0.95$  se alterou em menos de duas vezes.
- Contudo o valor da variância do estimador da Valorização das Amostras foi se distanciando do valor da variância do estimador de Monte Carlo de acordo com o aumento dos valores de  $\alpha$ . Para  $\alpha = 0.95$  a variância do estimador da Valorização das Amostras obteve valor 10 vezes superior à variância do estimador de Monte Carlo. Essa diferença chega a 20 vezes para valores superiores a  $\alpha = 0.96$ .



Na simulação da Valorização das Amostras adotou-se o valor constante de  $\alpha = 0.9$  por duas razões: a variância do estimador da Valorização das Amostras em comparação com a variância do estimador de Monte Carlo possuem valores muito próximos e o pelo significativo ganho produzido.

Os resultados obtidos na implementação com a Valorização das Amostras são apresentados na Tabela 2, onde  $\eta$  é ganho ou fator de redução das amostras em relação ao método de Monte Carlo.

**Tabela 2: Ganho obtido através da Valorização das Amostras**

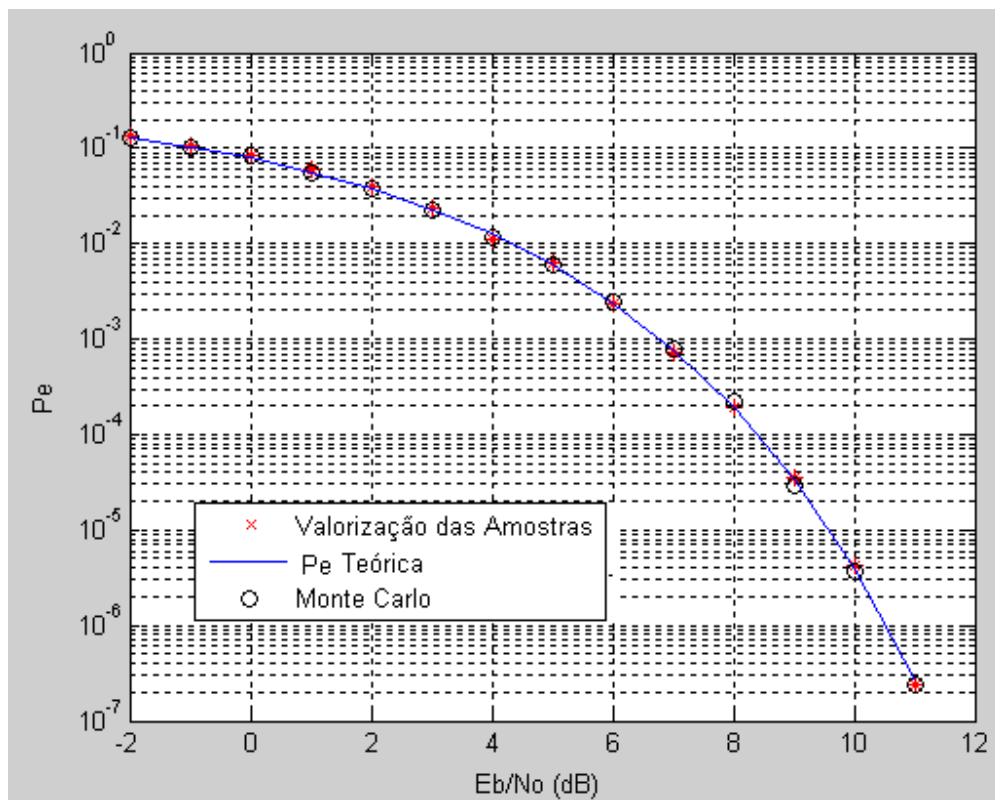
$P_e$		$\eta$	$E_b / N_0$ (dB)
Teórica	Medida		
$6.00 \times 10^{-3}$	$6.13 \times 10^{-3}$	15	5
$2.43 \times 10^{-3}$	$2.62 \times 10^{-3}$	38	6
$7.73 \times 10^{-4}$	$7.63 \times 10^{-4}$	105	7
$1.90 \times 10^{-4}$	$1.97 \times 10^{-4}$	272	8
$3.36 \times 10^{-5}$	$2.98 \times 10^{-5}$	$1.15 \times 10^3$	9
$3.87 \times 10^{-6}$	$3.61 \times 10^{-6}$	$1.35 \times 10^4$	10
$2.61 \times 10^{-7}$	$2.77 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^5$	11

Pode-se verificar que os resultados obtidos concordam com os valores teóricos apresentados no gráfico da Figura 13, do Capítulo 3. Os resultados deixam claro que o desempenho do método da Valorização das Amostras aumenta de acordo com a redução da probabilidade de erro de bit do sistema, como foi verificado analiticamente no Capítulo 3.

Tanto no caso do método de Monte Carlo quanto para a Valorização das Amostras a probabilidade de erro de bit estimada foi comparada com a curva teórica da probabilidade de erro de bit para uma sinalização antipodal em canal AWGN dada por:

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right) \quad (4.4)$$

Os resultados apresentados na Tabela 2 foram plotados no gráfico representado pela Figura 16, o qual ilustra as curvas da estimação da probabilidade de erro de bit resultante do método de Monte Carlo e da Valorização das Amostras comparadas com a curva teórica da probabilidade de erro de bit para uma sinalização NRZ bipolar em canal AWGN. Para as simulações correspondentes aguardou-se a ocorrência de 100 bits errados por ponto do gráfico.



**Figura 16: Gráfico comparativo da probabilidade de erro de bit teórica e simulada por Monte Carlo e Valorização das Amostras para um canal AWGN.**

### 4.2.3 Valorização das Amostras aplicada em um canal com desvanecimento plano

O diagrama de blocos utilizado na simulação para a estimação da probabilidade de erro de bit através do Método de Monte Carlo é apresentado na Figura 17. Nesse modelo de simulação a seqüência aleatória dos bits gerados pela fonte binária passa por um modulador BPSK. O sinal modulado é inserido no canal Rayleigh não seletivo em frequência, onde os símbolos aleatórios da entrada são multiplicados pelas amostras do processo do desvanecimento geradas a partir da FDP de Rayleigh. Nas simulações se considerou o uso de um *interleaving* perfeito, de modo que as amostras do processo do desvanecimento sejam descorrelacionadas de um intervalo de sinalização para outro. As amostras resultantes desse processo multiplicativo são somadas com as amostras do ruído geradas a partir de uma distribuição normal de média zero e variância  $\sigma^2 = N_0 / 2$ .

É assumido que o canal com desvanecimento é suficientemente lento de forma que o receptor irá conseguir rastrear perfeitamente as variações de fase e implementar detecção coerente. Na simulação considerou-se deslocamento de fase nulo no processo de desvanecimento (vide Figura 17).

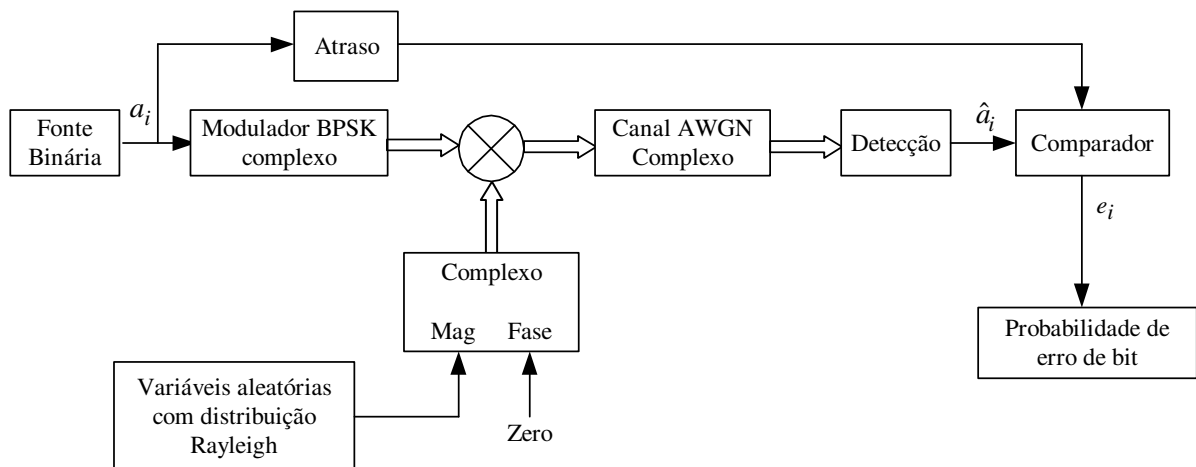
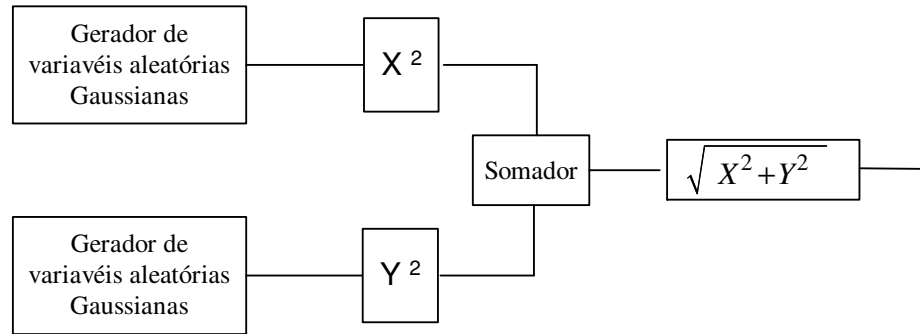


Figura 17: Modelo de simulação em canal com desvanecimento plano via método de Monte Carlo.

Na simulação, as variáveis aleatórias com distribuição Rayleigh foram geradas a partir de duas variáveis aleatórias com distribuição Gaussiana com média zero e variâncias iguais,

conforme a teoria apresentada na Seção 2.2.3.1, do Capítulo 2. O diagrama em blocos utilizado para gerar as variáveis aleatórias de Rayleigh é ilustrado na Figura 18.



**Figura 18: Geração das variáveis aleatórias com distribuição de Rayleigh.**

Na simulação pelo método de Monte Carlo as variáveis aleatórias de Rayleigh foram geradas a partir de uma distribuição Gaussiana com média zero e variância igual a 0.5. Esse valor da variância é considerado ideal, pois para qualquer outro valor da variância deve-se normalizar o valor quadrático médio do desvanecimento para que a relação sinal-ruído média na recepção não seja afetada.

Assumindo que  $X$  e  $Y$  são variáveis aleatórias Gaussianas descorrelacionadas, pode-se afirmar que essas variáveis aleatórias são também estatisticamente independentes [32]. Deste modo a Função Densidade de Probabilidade conjunta é determinada pelo produto  $p(x)p(y)$ , onde  $p(x)$  e  $p(y)$  são as FDP's marginais. A FDP conjunta resultante é dada por:

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{(x^2 + y^2)}{2\sigma^2}\right] \quad (4.5)$$

Representando a magnitude do processo do desvanecimento por  $|\gamma|$ , então a equação (4.5) pode ser reescrita na forma:

$$f_\gamma(\gamma) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{|\gamma|^2}{2\sigma^2}\right) \quad (4.6)$$

onde  $\gamma$  é uma variável aleatória Gaussiana complexa de média zero e variância  $\sigma^2$ , ou seja,  $\gamma = x + jy$ , onde  $x$  e  $y$  são variáveis aleatórias Gaussianas.

Para aumentar a ocorrência de erros no sistema em canal com desvanecimento plano deve-se alterar o valor quadrático médio do desvanecimento. A polarização realizada visa diminuir esse valor de forma que a relação sinal-ruído na recepção seja menor. De [18] tem-se que:

$$E[\gamma^2] = \beta^2 + 2\sigma^2 \quad (4.7)$$

onde  $\beta = 0$  corresponde ao desvanecimento Rayleigh. A relação  $E_b/N_0$  na recepção será  $E_b/N_0 = E[\gamma^2] E'_b/N_0$ , onde  $E'_b/N_0$  é a relação sinal-ruído na recepção, na ausência de desvanecimento.

Como se deseja diminuir o valor quadrático médio do desvanecimento, deve-se diminuir a sua variância. Deste modo pode-se afirmar que as amostras do desvanecimento  $\gamma$  devem ser geradas a partir de uma função densidade polarizada  $f_\gamma^*(\gamma)$ , onde a condição [9],

$$\int |\gamma|^2 f_\gamma^*(\gamma) d\gamma < \int |\gamma|^2 f_\gamma(\gamma) d\gamma \quad (4.8)$$

deva ser satisfeita para que se aumente a ocorrência de erros no sistema.

A FDP polarizada, de acordo com o modelo do Escalonamento mostrado no Capítulo 3, terá a forma:

$$f_\gamma^*(\gamma) = \left[ \frac{c}{[f_\gamma(\gamma)]^\alpha} \right] f_\gamma(\gamma) \quad (4.9)$$

onde

$$c = \frac{1 - \alpha}{(2\pi\sigma^2)^\alpha} \quad (4.10)$$

Conseqüentemente a FDP polarizada terá a forma:

$$f_{\gamma}^*(\gamma) = \frac{1}{2\pi\sigma^2/(1-\alpha)} \exp\left(-\frac{|\gamma|^2}{2\sigma^2/(1-\alpha)}\right) \quad (4.11)$$

Observa-se através da equação (4.11) que a FDP polarizada será também Gaussiana porém com a variância de  $1/(1-\alpha)$  da variância original de  $\gamma$ .

Para cada ocorrência de erro o fator de peso que irá ponderar a estimativa será determinado por:

$$w(\gamma) = \frac{1}{(1-\alpha)} \exp\left(-\frac{\alpha|\gamma|^2}{2\sigma^2}\right) \quad (4.12)$$

As equações (4.11) e (4.12) serão utilizadas pelo estimador dado na equação (3.3) para a estimação da probabilidade de erro de bit. Observa-se pela equação (4.12) que para  $\sigma_*^2 < \sigma^2$ ,  $w(x) < 1$ , concordando com a teoria apresentada no Capítulo 3.

Através da equação (4.11) fica claro que a polarização dependerá da escolha do valor de  $\alpha$ . Como realizado na implementação da Valorização das Amostras no canal AWGN, o valor de  $\alpha$  será escolhido com base nos valores da variância do estimador e do ganho. Diferentemente do canal AWGN, os valores de  $\alpha$  deverão ser menores que 0 para se consiga uma redução na variância das variáveis aleatórias Gaussianas, de modo que se diminua o valor quadrático médio do desvanecimento. Para o canal com desvanecimento plano não é possível calcular um ganho teórico em função dos valores de  $\alpha$  para cada relação sinal-ruído de entrada do sistema, o que torna impossível se estipular um intervalo de teste para os valores de  $\alpha$ , como foi realizado no canal AWGN.

Para se encontrar o valor conservativo de  $\alpha$  foram fixados alguns valores para a redução da variância da FDP original de  $\gamma$ . A partir dessa redução se chegou ao valores de  $\alpha$  a serem testados. Para os respectivos valores de  $\alpha$  foram calculados a variância do estimador e o ganho obtido em relação ao Método de Monte Carlo, para os valores de  $E_b/N_0$  de 15 dB e 30 dB respectivamente.

Através dos resultados obtidos permite-se que sejam feitas as seguintes observações:

- Para  $E_b / N_0 = 15 \text{ dB}$ , os valores de  $\alpha > -19$ , apresentaram uma variância do estimador da Valorização das Amostras dez vezes maior que a variância do estimador de Monte Carlo. Os ganhos obtidos não atingiram valores significativos à medida que se reduziu a variância.
- Para  $E_b / N_0 = 30 \text{ dB}$ , os ganhos também não tiveram um aumento significativo à medida que se diminuiu a variância da FDP original. Observou-se que o valor da variância do estimador da Valorização das Amostras também aumentou em relação à variância do estimador de Monte Carlo para valores de  $\alpha > -19$ .
- O valor de  $\alpha$  que satisfaz as condições da variância do estimador e de ganho foi  $\alpha = -19$ .

Após a escolha do valor conservativo de  $\alpha$ , foi simulado o sistema ilustrado na Figura 17. Os resultados obtidos através da Valorização das Amostras foram comparados com os resultados obtidos pelo método de Monte Carlo para uma faixa da relação sinal-ruído de 15 dB a 50 dB. A Tabela 5 apresenta o ganho  $\eta$  obtido na simulação.

**Tabela 3: Resultados obtidos para Valorização das Amostras.**

$P_e$		$\eta$	$E_b / N_0 \text{ (dB)}$
Teórica	Medida		
$7.70 \times 10^{-3}$	$8.00 \times 10^{-3}$	13	15
$2.50 \times 10^{-3}$	$2.30 \times 10^{-3}$	15	20
$8.00 \times 10^{-4}$	$8.52 \times 10^{-4}$	20	25
$2.50 \times 10^{-4}$	$2.63 \times 10^{-4}$	20	30
$7.90 \times 10^{-5}$	$8.57 \times 10^{-5}$	20	35
$2.50 \times 10^{-5}$	$2.78 \times 10^{-5}$	20	40
$7.90 \times 10^{-6}$	$8.19 \times 10^{-6}$	20	45
$2.50 \times 10^{-6}$	$2.98 \times 10^{-6}$	20	50

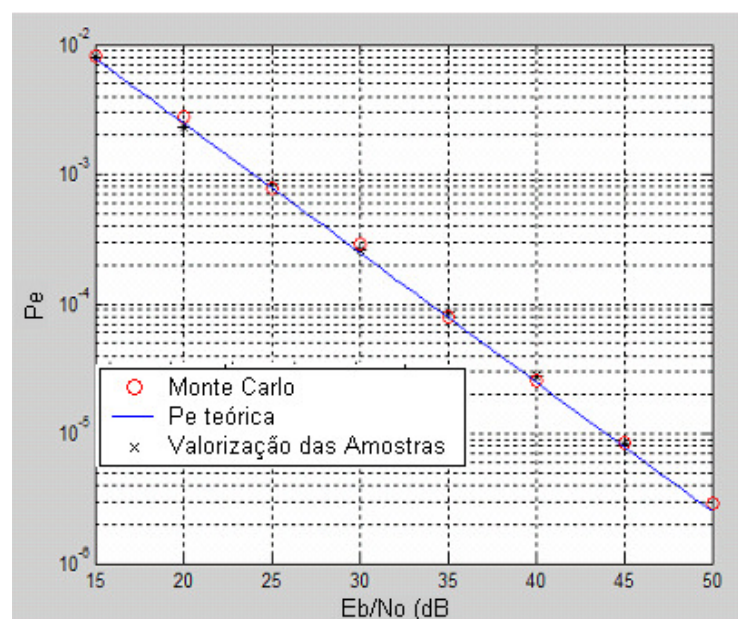
Os resultados obtidos mostram que o ganho conseguido pela técnica da Valorização das Amostras para um canal com desvanecimento plano se torna constante para os valores da relação sinal-ruído, ou seja, o ganho obtido é de 20 vezes em relação ao método de Monte Carlo.

Em ambas as simulações realizadas, pelo método de Monte Carlo e para a Valorização das Amostras, a probabilidade de erro de bit estimada foi comparada com a curva teórica da probabilidade de erro de bit para o caso do canal Rayleigh plano considerando a modulação BPSK. A expressão teórica da probabilidade de erro de bit é dada por [32]:

$$P_e = \frac{1}{2} \left[ 1 - \sqrt{\frac{E[\gamma^2] \cdot (E_b / N_0)}{1 + E[\gamma^2] \cdot (E_b / N_0)}} \right] \quad (4.13)$$

Esta expressão considera o desvanecimento independente de símbolo para símbolo e constante dentro do intervalo de sinalização de modo que a detecção seja coerente.

O gráfico na Figura 19 ilustra a estimação da probabilidade de erro de bit em ambos os métodos, Monte Carlo e Valorização das Amostras em relação à curva teórica da probabilidade de erro de bit para a modulação BPSK em um canal com desvanecimento Rayleigh.



**Figura 19: Gráfico comparativo da probabilidade de erro de bit teórica e simulada por Monte Carlo e Valorização das Amostras para um canal Rayleigh.**



### **4.3 Valorização das Amostras aplicada em um sistema com código corretor de erro**

A aplicação do método do Escalonamento em um canal com códigos corretores de erro não apresenta a melhor alternativa para a implementação da Valorização das Amostras nesse tipo de sistema. Esse método apresenta uma limitação que está relacionada com a memória do sistema, em relação à detecção, e a dimensão do código.

Nas simulações realizadas anteriormente, a detecção se baseava em um único símbolo, ou seja, nesse tipo de sistema é possível se manter uma correspondência exata entre amostras do ruído que foram polarizadas e que contribuíram para a ocorrência de um erro e, conseqüentemente, despolarizar essas amostras para se obter a estimativa da probabilidade de erro de bit do sistema.

A dificuldade da aplicação da Valorização das Amostras em um sistema com código corretor de erro consiste em encontrar um valor apropriado de polarização para determinado erro de decodificação e calcular a função peso para os bits de informação decodificados erroneamente, para então se obter a estimativa da probabilidade de erro de bit despolarizada. Como nesse tipo de sistema a decisão a respeito de um determinado bit é realizada de acordo com uma seqüência de bits recebidos, fica difícil manter uma correspondência exata entre os bits de informação decodificados erroneamente e as amostras do ruído que contribuíram para esse erro.

A primeira aparição da aplicação da técnica da Valorização das Amostras em sistemas com códigos corretores de erro parece ter sido no artigo de Herro e Nowack [17]. Nesse trabalho, a cada amostra do ruído da seqüência recebida pelo decodificador foi dado um aumento na variância de acordo com método do Escalonamento proposto em [39]. O principal problema desse tipo de polarização é que, devido à memória do sistema, não há como saber a priori quais amostras do ruído contribuíram para a ocorrência de determinado erro, ou seja, é extremamente ineficiente calcular o peso assumindo que um grande número de amostras do ruído tenha contribuído antes mesmo que o erro ocorra [7].

Em Sadowsky [35], é sugerido um caminho mais promissor para a aplicação da técnica da Valorização das Amostras. Nesse trabalho é apresentado um novo método para simulação dos sistemas com codificação, contornando as limitações encontradas em [17] e resultando em um desempenho mais significativo da técnica. O método de polarização adotado em [35] difere do método do Escalonamento, sendo considerado muito próximo ao modelo de polarização não-estacionário da translação da média desenvolvido por Lu e Yao [30].

Na aplicação da Valorização das Amostras em um canal AWGN, o critério de polarização adotado foi o de aumentar a variância das variáveis aleatórias do ruído com o objetivo de aumentar a ocorrência dos erros na cauda da FDP. No caso de um sistema codificado a dimensão do código dificulta a escolha desse critério de polarização. Nesse caso, cada palavra-código será um sinal  $n$ -dimensional pertencente a um conjunto de  $M = 2^n$  possíveis palavras-código. Ou seja, o critério de polarização adotado deve levar em conta todos os possíveis erros de decodificação, onde agora cada palavra-código transmitida constituirá um ponto no espaço multidimensional, que deve ser considerado como um “centro de erro” em potencial [1].

A forma adotada em [35] para estabelecer um critério de polarização adequado consiste em determinar uma direção de polarização através da escolha dos centros de erro. Deste modo todos os centros de erro deverão ser testados, tarefa que pode ser extremamente difícil ou impraticável, como no caso dos códigos de bloco  $C(15, 7)$ , onde  $2^{15}$  centros de erro devem ser testados. Contudo esse problema pode ser contornado, concentrando a atenção para os centros de erro mais significativos, isto é, os centros de erro com maior probabilidade de ocorrerem durante a simulação [1].

Dependendo da estrutura do código, a escolha desses centros de erro pode ser uma tarefa complexa. Contudo, de uma forma geral os centros de erro com as menores distâncias de Hamming da palavra-código transmitida têm uma maior probabilidade de ocorrência. Deste modo, a simulação é reduzida em uma série de sub-problemas simples de acordo com os centros de erro escolhidos com base nas distâncias de Hamming. Em outras palavras, deve haver uma simulação para cada centro de erro escolhido.

A probabilidade de erro será então decomposta em somas de termos correspondentes aos diferentes erros possíveis (diferentes regiões de decisão). Cada termo da soma é simulado independentemente através da Valorização das Amostras. Esta abordagem é semelhante à definição do Limitante de União, em que a probabilidade de erro média é limitada pela soma das probabilidades de erro individuais.

### 4.3.1 Fundamentos

Como foi visto no Capítulo 2, quando uma palavra-código  $\mathbf{x}$  é transmitida, a função densidade de probabilidade condicional conjunta da saída  $\mathbf{y}$  do canal BSC é representada por  $f(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ . Na aplicação da técnica da Valorização das Amostras se utiliza uma densidade conjunta polarizada designada por  $f^*(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ .

Assumindo que  $\mathbf{x}'$  represente a palavra código estimada erroneamente dado que a palavra código  $\mathbf{x}$  foi transmitida, onde  $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}$  e que, conseqüentemente,  $\mathbf{y} \in D(\mathbf{x}')$ , a probabilidade do evento de erro de decodificação específico, em termos da função densidade de probabilidade condicional conjunta  $f(\mathbf{y}|\mathbf{x})$  e em relação à região de decisão  $D(\mathbf{x}')$  pode ser reescrita como:

$$P(\mathbf{x}'|\mathbf{x}) = \int \cdots \int_{D(\mathbf{x}')} f(\mathbf{y}|\mathbf{x}) d\mathbf{y} \quad (4.14)$$

Utilizando uma função indicadora de erro  $I_{\mathbf{x}'}(\mathbf{y})$  em relação a região de erro  $D(\mathbf{x}')$ , onde  $I_{\mathbf{x}'}(\mathbf{y}) = 1$  se  $\mathbf{y} \in D(\mathbf{x}')$  e  $I_{\mathbf{x}'}(\mathbf{y}) = 0$  se  $\mathbf{y} \notin D(\mathbf{x}')$ , a equação (4.14) pode ser reescrita em termos dessa função como:

$$P(\mathbf{x}'|\mathbf{x}) = \int \cdots \int I_{\mathbf{x}'}(\mathbf{y}) f(\mathbf{y}|\mathbf{x}) d\mathbf{y} \quad (4.15)$$

Utilizando a densidade conjunta polarizada  $f^*(\mathbf{y}|\mathbf{x})$  na equação (4.15) obtém-se uma expressão alternativa dada por:

$$\begin{aligned}
P(\mathbf{x}' | \mathbf{x}) &= \int \cdots \int I_{\mathbf{x}'}(\mathbf{y}) \frac{f(\mathbf{y} | \mathbf{x})}{f^*(\mathbf{y} | \mathbf{x})} f^*(\mathbf{y} | \mathbf{x}) d\mathbf{y} \\
&= \int \cdots \int I_{\mathbf{x}'}(\mathbf{y}) w(\mathbf{y} | \mathbf{x}) f^*(\mathbf{y} | \mathbf{x}) d\mathbf{y}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

onde

$$w(\mathbf{y} | \mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{y} | \mathbf{x})}{f^*(\mathbf{y} | \mathbf{x})} \tag{4.17}$$

é a função de ponderação ou função peso.

A partir da equação (4.16), segue que a estimativa da probabilidade do evento de erro de decodificação específico, utilizando a Valorização das Amostras, é dada pela média amostral:

$$\hat{P}^*(\mathbf{x}' | \mathbf{x}) = \frac{1}{N_{va}} \sum_{i=1}^{N_{va}} w(\mathbf{Y}^{(i)} | \mathbf{x}) I_{\mathbf{x}'}(\mathbf{Y}^{(i)}) \tag{4.18}$$

onde o parâmetro  $N_{va}$  representa o número de execuções da simulação para o evento de erro específico  $\mathbf{x}'$  e  $\mathbf{Y}^{(i)} = (\mathbf{Y}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{Y}_n^{(i)})$  representa a seqüência de saída do canal na  $i$ -ésima execução da simulação.

O estimador para a probabilidade de erro de bit  $P_b$  é obtido através da substituição da equação (4.18) na equação (2.45). Deste modo,

$$P_b = P_b(\mathbf{x}) = \frac{1}{k} \sum_{\mathbf{x}' \in D(\mathbf{x}')} n_b(\mathbf{x}, \mathbf{x}') P^*(\mathbf{x}' | \mathbf{x}) \tag{4.19}$$

onde  $k$  é o número de bits de informação transmitidos por uma palavra código e  $n_b(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  é o número de bits de informação errados após a decodificação.

O valor esperado do estimador da probabilidade de erro de decodificação específico é calculado como:

$$E^* \left[ \hat{P}^*(\mathbf{x}' | \mathbf{x}) \right] = E^* \left[ \frac{1}{N_{va}} \sum_{i=1}^{N_{va}} w(\mathbf{Y}^{(i)} | \mathbf{x}) I_{\mathbf{x}'}(\mathbf{Y}^{(i)}) \right] \quad (4.20)$$

onde  $E^*[\ ]$  representa o valor esperado em relação à densidade conjunta polarizada  $f^*(\mathbf{y} | \mathbf{x})$ .

Como cada valor simulado  $w(\mathbf{Y}^{(i)} | \mathbf{x}) I_{\mathbf{x}'}(\mathbf{Y}^{(i)})$  é independente de qualquer outro valor simulado anteriormente, ou seja, cada dado de simulação na saída do canal  $\mathbf{Y}^{(i)} = (\mathbf{Y}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{Y}_n^{(i)})$  corresponde a vetores independentes amostrados da densidade de simulação  $f^*(\mathbf{y} | \mathbf{x})$ , a equação (4.20) pode ser reescrita na fórmula equivalente dada por:

$$\begin{aligned} E^* \left[ \hat{P}^*(\mathbf{x}' | \mathbf{x}) \right] &= E^* \left[ w(\mathbf{Y}^{(i)} | \mathbf{x}) I_{\mathbf{x}'}(\mathbf{Y}^{(i)}) \right] \\ &= \int \cdots \int I_{\mathbf{x}'}(\mathbf{y}) w(\mathbf{y} | \mathbf{x}) f^*(\mathbf{y} | \mathbf{x}) d\mathbf{y} \\ &= \int \cdots \int I_{\mathbf{x}'}(\mathbf{y}) \frac{f(\mathbf{y} | \mathbf{x})}{f^*(\mathbf{y} | \mathbf{x})} f^*(\mathbf{y} | \mathbf{x}) d\mathbf{y} \\ &= \int \cdots \int I_{\mathbf{x}'}(\mathbf{y}) f(\mathbf{y} | \mathbf{x}) d\mathbf{y} \\ &= P(\mathbf{x}' | \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Através da equação (4.21) observa-se que o estimador da Valorização das Amostras dado na equação (4.18) é despolarizado, pois seu valor esperado é igual ao parâmetro estimado.

Sabendo-se que os valores simulados são independentes, a variância do estimador da Valorização das Amostras pode ser calculada de forma similar:

$$\begin{aligned}
\text{var} \left[ \hat{P}^*(\mathbf{x}' | \mathbf{x}) \right] &= \text{var}^* \left[ \frac{1}{N_{va}} \sum_{i=1}^{N_{va}} w(\mathbf{Y}^{(i)} | \mathbf{x}) I_{\mathbf{x}'}(\mathbf{Y}^{(i)}) \right] \\
&= \frac{1}{N_{va}^2} \sum_{i=1}^{N_{va}} \text{var}^* \left[ w(\mathbf{Y}^{(i)} | \mathbf{x}) I_{\mathbf{x}'}(\mathbf{Y}^{(i)}) \right] \\
&= \frac{1}{N_{va}} \text{var}^* \left[ w(\mathbf{Y}^{(i)} | \mathbf{x}) I_{\mathbf{x}'}(\mathbf{Y}^{(i)}) \right] \\
&= \frac{1}{N_{va}} \left\{ \int \cdots \int_{D(\mathbf{x}')} [w(\mathbf{y} | \mathbf{x})]^2 f^*(\mathbf{y} | \mathbf{x}) d\mathbf{y} - P(\mathbf{x}' | \mathbf{x})^2 \right\} \\
&= \frac{1}{N_{va}} \left\{ \int \cdots \int_{D(\mathbf{x}')} w(\mathbf{y} | \mathbf{x}) f(\mathbf{y} | \mathbf{x}) d\mathbf{y} - P(\mathbf{x}' | \mathbf{x})^2 \right\} \tag{4.22}
\end{aligned}$$

A equação (4.22) indica que a escolha da densidade de probabilidade polarizada  $f^*(\mathbf{y} | \mathbf{x})$  corresponde a se ter  $f^*(\mathbf{y} | \mathbf{x})$  com maior dispersão que  $f(\mathbf{y} | \mathbf{x})$  nas regiões de erro, ou seja, para  $y \in D(\mathbf{x}')$ . Isto implica que, através da análise da equação (4.17), a função peso será menor que 1 e, conseqüentemente, o valor dentro da integral na equação (4.22) será minimizado, resultando na diminuição da variância do estimador, concordando com a análise realizada a partir da equação (3.8) na Seção 3.3. Conseqüentemente, o estimador irá atingir uma determinada precisão com um menor número de execuções da simulação.

Um estimador (variância amostral) de  $\text{var}^* \left[ w(\mathbf{Y}^{(i)} | \mathbf{x}) I_{\mathbf{x}'}(\mathbf{Y}^{(i)}) \right]$  dada na equação (4.22), será utilizado para obter a precisão das estimativas resultantes da aplicação da Valorização das Amostras [35]. Define-se esse estimador como:

$$\begin{aligned}
V^*(\mathbf{x}' | \mathbf{x}) &= \text{var}^* \left[ w(\mathbf{Y}^{(i)} | \mathbf{x}) I_{\mathbf{x}'}(\mathbf{Y}^{(i)}) \right] \\
&= \frac{1}{N_{va}} \sum_{i=1}^{N_{va}} w(\mathbf{Y}^{(i)} | \mathbf{x})^2 I_{\mathbf{x}'}(\mathbf{Y}^{(i)}) - \left[ \hat{P}^*(\mathbf{x}' | \mathbf{x}) \right]^2 \tag{4.23}
\end{aligned}$$

Conseqüentemente, um estimador  $\hat{V}_{N_{va}}^*(\mathbf{x}' | \mathbf{x})$  para  $\text{var} \left[ \hat{P}^*(\mathbf{x}' | \mathbf{x}) \right]$ , dada na equação (4.22), será dado por:

$$\begin{aligned}\hat{V}_{N_{va}}^*(\mathbf{x}'|\mathbf{x}) &= \frac{1}{N_{va}} V^*(\mathbf{x}'|\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{N_{va}^2} \sum_{i=1}^{N_{va}} w(\mathbf{Y}^{(i)}|\mathbf{x})^2 I_{\mathbf{x}'}(\mathbf{Y}^{(i)}) - \frac{1}{N_{va}} [\hat{P}^*(\mathbf{x}'|\mathbf{x})]^2\end{aligned}\quad (4.24)$$

Este estimador será usado como critério de parada do algoritmo que estima as probabilidades de erro de decodificação específicas  $P(\mathbf{x}'|\mathbf{x})$  pelo método da Valorização das Amostras. Desta forma, a precisão relativa será diretamente calculada por:

$$\mathcal{E} = \frac{\sqrt{\hat{V}_{N_{va}}^*(\mathbf{x}'|\mathbf{x})}}{\hat{P}^*(\mathbf{x}'|\mathbf{x})}\quad (4.25)$$

### 4.3.2 Procedimentos de Simulação

As simulações de ambos os métodos, de Monte Carlo e da Valorização das Amostras, foram realizadas utilizando o código de Hamming (7,4) operando em um canal binário simétrico (BSC). O diagrama em blocos do sistema simulado é apresentado na Figura 20.

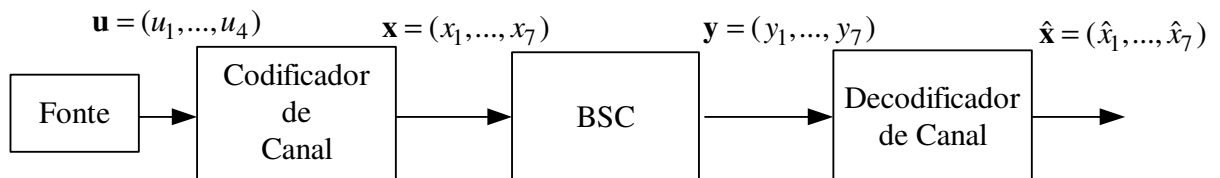


Figura 20: Modelo de simulação com código de Hamming (7, 4) operando em um canal BSC.

No processo de codificação os dados transmitidos são segmentados em blocos de 4 bits de informação, representados por  $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_4]$ . Através da matriz geradora do código, o

decodificador realiza a operação  $\mathbf{x} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{G}$ , transformando dessa forma cada bloco de 4 bits em uma palavra-código correspondente de 7 bits, representadas por  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_7]$ . Como visto na Seção 2.2.4.1, o número de palavras-código válidas será igual a  $2^4$ . A taxa do código será de  $4/7$ .

Sabe-se que a matriz geradora do código de Hamming (7,4) [10] é dada por:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Através desta matriz geradora é possível encontrar as dezesseis palavras-código válidas do código de Hamming (7,4) com os respectivos bits de informação transmitidos. A Tabela 4 mostra as palavras-código correspondentes à mensagem transmitida.

**Tabela 4: Palavras-código correspondentes às mensagens transmitidas.**

Mensagem	Palavra-código	Mensagem	Palavra-código
0000	0000000	1000	1000101
0001	0001011	1001	1001110
0010	0010110	1010	1010011
0011	0011101	1011	1011000
0100	0100111	1100	1100010
0101	0101100	1101	1101001
0110	0110001	1110	1110100



0111	0111010	1111	1111111
------	---------	------	---------

Como foi visto na Seção 2.2.4.2, o canal BSC é um canal discreto sem memória e caracterizado pelas probabilidades de transição, para uma única entrada e uma única saída do canal, dada por:

$$P(y|x) = \begin{cases} 1-\lambda & \text{se } y = x \\ \lambda & \text{se } y \neq x \end{cases} \quad (4.27)$$

onde  $\lambda$  é a probabilidade de cruzamento, ou seja, a probabilidade do canal trocar o bit de informação. Desta forma a palavra-código transmitida ao passar pelo canal BSC resulta em uma seqüência aleatória  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_7)$  na saída do mesmo.

Na recepção, o decodificador estima uma palavra-código,  $\hat{\mathbf{x}}$ , para cada vetor-código recebido,  $\mathbf{y}$ . Através de uma tabela contendo todas as possíveis palavras-código transmitidas, o decodificador avalia a distância de Hamming do vetor-código recebido em relação às possíveis palavras-código transmitidas. Desta forma, a palavra-código que tiver a menor distância de Hamming em relação ao vetor-código recebido será escolhida. Pode-se observar que a simulação emprega decodificação de máxima verossimilhança admitindo todas as 16 alternativas de decodificação.

Na Seção 2.2.4.3 foi visto que a probabilidade de erro condicionada à transmissão de uma dada palavra-código não depende de qual seja essa palavra. Desta forma, as probabilidades de erro de decodificação específicas  $P(\mathbf{x}'|\mathbf{x})$  podem ser estimadas admitindo-se o envio da palavra toda zero. A probabilidade de erro de palavra simulada será calculada como:

$$\hat{P}_e = \sum_{\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}} P(\mathbf{x}'|\mathbf{x}) \quad (4.28)$$

O objetivo da simulação é estimar a probabilidade de erro de bit,  $P_b$ , estimando as probabilidades de erro de decodificação específicas  $P(\mathbf{x}'|\mathbf{x})$ , e aplicando os resultados na equação (4.19). Cada probabilidade de erro de decodificação específica  $P(\mathbf{x}'|\mathbf{x})$ , ou centro de

erro, é estimada independentemente pelo método de Monte Carlo e da Valorização das Amostras. Como critério de parada da simulação é utilizada a precisão relativa.

#### 4.3.2.1 Polarização do Canal

O modelo de canal adotado para a simulação é baseado em [35], e denominado de BSC não-estacionário, o qual tem o objetivo de causar um erro de decodificação específico  $\mathbf{x}'$ . Desta forma, cada probabilidade de erro de decodificação específica  $P(\mathbf{x}'|\mathbf{x})$  será estimada separadamente. Através da polarização do canal, a simulação é forçada para a ocorrência de cada tipo de erro, ou seja, a aplicação da Valorização das Amostras aumenta a probabilidade de ocorrência de um determinado erro de decodificação específico  $\mathbf{x}'$ .

O decodificador de máxima verossimilhança com decisão abrupta irá decodificar corretamente se o número de erros em uma palavra-código for menor que metade da distância mínima  $d_{\min}$  do código, ou seja,  $t$  bits podem ser corrigidos pelo código, onde:

$$t = \left\lfloor \frac{d_{\min} - 1}{2} \right\rfloor \quad (4.29)$$

Para o código de Hamming (7,4),  $d_{\min} = 3$  e, conseqüentemente, a capacidade de correção do código é  $t = 1$ . Como mostrado na Seção 2.2.4.1, o código de Hamming (7, 4) é um código perfeito, ou seja, este tipo de código corrige exclusivamente todos os padrões de  $t = 1$  erro e nenhum padrão maior que  $t$  erros.

A motivação para esse tipo de modelo de simulação aproxima o limitante superior da probabilidade de erro de decodificação específico  $P(\mathbf{x}'|\mathbf{x})$  a uma probabilidade de erro de decisão binária,  $\bar{P}(\mathbf{x}'|\mathbf{x})$  [35]. Sabendo-se que o decodificador realiza a melhor estimativa admitindo-se que a palavra-código transmitida é aquela que está mais próxima do vetor código recebido em termos da distância de Hamming, pode-se dizer que o decodificador, através dessa decisão binária, examina as saídas do canal  $Y_k$  somente nos instantes de tempo  $k$  nos quais  $x'_k \neq x_k$  resultando em  $d = d(\mathbf{x}', \mathbf{x})$ , denominada de distância de Hamming entre  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}'$ . Sendo o BSC um canal sem memória, os instantes de tempo em que  $x'_k = x_k$  não irão influenciar nessa

decisão binária, ou seja, as saídas do canal  $Y_k$  para os instantes  $k$  de tempo em que  $x'_k = x_k$  não contribuem para causar o erro de decodificação específico  $\mathbf{x}'$ . A probabilidade de erro de decisão binária,  $\bar{P}(\mathbf{x}'|\mathbf{x})$ , pode ser então especificada em relação a  $d(\mathbf{x}',\mathbf{x})$  por [35]:

$$\bar{P}(\mathbf{x}'|\mathbf{x}) = \begin{cases} \sum_{d'=(d+1)/2}^d \binom{d}{d'} \lambda^{d'} (1-\lambda)^{d-d'} & \text{para } d \text{ ímpar} \\ \frac{1}{2} \binom{d}{d/2} \lambda^{d/2} (1-\lambda)^{d/2} + \sum_{d'=d/2+1}^d \binom{d}{d'} \lambda^{d'} (1-\lambda)^{d-d'} & \text{para } d \text{ par} \end{cases} \quad (4.30)$$

onde  $d = d(\mathbf{x}',\mathbf{x})$  e  $\lambda$  é a probabilidade de cruzamento do BSC. Através da equação (4.30) observa-se que  $\bar{P}(\mathbf{x}'|\mathbf{x})$  depende de  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}'$  somente através de  $d(\mathbf{x}',\mathbf{x})$ . Outra consideração importante a ser feita em relação à equação (4.30) é que  $P(\mathbf{x}'|\mathbf{x}) \leq \bar{P}(\mathbf{x}'|\mathbf{x})$  e este limitante é estreito para pequenos valores de  $\lambda$ , ou seja,  $P(\mathbf{x}'|\mathbf{x}) \cong \bar{P}(\mathbf{x}'|\mathbf{x})$ , sendo essencialmente uma função de  $d = d(\mathbf{x}',\mathbf{x})$  [35].

O modelo de polarização para a estimação de  $P(\mathbf{x}'|\mathbf{x})$  será baseado nesta aproximação de decisão binária. Como as saídas do canal não influenciam essa decisão binária quando  $x'_k = x_k$ , o canal não será polarizado para esses instantes de tempo, ou seja, a probabilidade de cruzamento do BSC não será modificada. A polarização utilizada será uniforme para os instantes de tempo em que  $x'_k \neq x_k$ . Desta forma, o modelo de polarização é um canal BSC sem memória, caracterizado por uma probabilidade de cruzamento variante com o tempo, dada por:

$$\lambda_k^* = \begin{cases} \lambda & \text{se } x'_k = x_k \\ 1/2 & \text{se } x'_k \neq x_k \end{cases} \quad (4.31)$$

Pode-se observar que neste modelo, o canal polarizado força a palavra-código transmitida para o erro de decodificação desejado, ou seja, esse modelo de polarização direciona a simulação para determinado centro de erro.

A implementação da Valorização das Amostras é realizada de forma direta e requer o conhecimento a respeito dos erros mais prováveis de ocorrerem. Desta forma é necessário conhecer o conjunto de palavras-código com suas respectivas distâncias de Hamming em relação à palavra-código transmitida, que no caso das simulações realizadas refere-se à palavra toda nula. No caso do código de Hamming (7,4) essas informações podem ser encontradas na Tabela 4 apresentada anteriormente.

Os possíveis erros de decodificação específicos, dados na Tabela 4, podem ser agrupados de acordo com a Tabela 5. A primeira coluna desta apresenta as distâncias de Hamming  $d = d(\mathbf{x}', \mathbf{0})$  existentes para o código de Hamming (7,4). A segunda coluna representa o número de palavras-código que possuem a mesma  $d = d(\mathbf{x}', \mathbf{0})$ , em relação a palavra-código toda nula. A terceira coluna representa o número de bits de informação decodificados erroneamente,  $n_b(\mathbf{0}, \mathbf{x}')$ , após a decodificação de  $\mathbf{x}'$  quando a palavra-código toda nula é transmitida. Desta forma o peso da informação será o número de bits de informação decodificados erroneamente para todos os erros específicos  $\mathbf{x}'$  com a mesma distância de Hamming,  $\sum_{\mathbf{x}': d=d(\mathbf{x}', \mathbf{0})} n_b(\mathbf{x}', \mathbf{0})$ .

**Tabela 5: Parâmetros do código de Hamming (7,4)**

Distância de Hamming	Número de palavras-código	Peso da informação
3	7	12
4	7	16
7	1	4

Nas simulações realizadas, o critério da escolha dos centros de erro se baseou nas menores distâncias de Hamming em relação à palavra-código transmitida, ou seja, os centros de erro foram escolhidos de acordo com sua maior probabilidade de ocorrência. Deste modo, nas simulações foram considerados os centros de erro com  $d = d(\mathbf{x}', \mathbf{0}) = 3$ . A probabilidade de

ocorrência desse erro específico foi estimada diretamente pela equação (4.18), reescrita aqui como:

$$\hat{P}^*(\mathbf{x}'|\mathbf{0}) = \frac{1}{N_{va}} \sum_{i=1}^{N_{va}} w(\mathbf{Y}^{(i)}|\mathbf{0}) I_{\mathbf{x}'}(\mathbf{Y}^{(i)}) \quad (4.32)$$

onde o parâmetro  $N_{va}$  representa o número de execuções da simulação para o evento de erro específico  $\mathbf{x}'$ ,  $w(\cdot)$  é a função peso,  $\mathbf{Y}^{(i)}$  representa a seqüência de saída do canal na  $i$ -ésima execução da simulação e  $I_{\mathbf{x}'}(\cdot)$  é a função indicadora de erro da palavra-código  $\mathbf{x}'$ . Através das simulações realizadas observou-se que a ocorrência de um erro de decodificação, sem ser o erro para o qual o canal foi polarizado, atingiu valores inferiores a 2%, o que ressalta a eficiência desse método de polarização.

As simulações foram realizadas adotando-se cinco diferentes valores da probabilidade de cruzamento original do canal BSC para estimação dos erros específicos de decodificação com  $d = d(\mathbf{x}', \mathbf{0}) = 3$ . Os resultados das estimativas da probabilidade do erro de decodificação específico através da Valorização das Amostras são listados na segunda coluna da Tabela 6. Ao invés de listar a probabilidade estimada do erro de decodificação específico para cada um dos 7 erros de decodificação possíveis, os resultados apresentados na Tabela 6 são referentes ao de  $\hat{P}^*(\mathbf{x}'|\mathbf{0})$  sobre um erro de decodificação específico, com  $d = d(\mathbf{x}', \mathbf{0}) = 3$ . Os valores da precisão relativa de cada estimativa foram calculados de acordo com o número de execuções de simulação, mostrados na quarta coluna, para cada probabilidade de cruzamento do BSC.

**Tabela 6: Estimativas da probabilidade de erro de decodificação específico para cada  $\lambda$ .**

Probabilidade de cruzamento $\lambda$	$\hat{P}^*(\mathbf{x}' \mathbf{0})$	Precisão Relativa $\varepsilon$	Execuções da simulação $N_{va}$
$10^{-1}$	$2.92 \times 10^{-2}$	8.30%	$75 \times 10^1$

$10^{-2}$	$3.39 \times 10^{-4}$	8.72%	$75 \times 10^2$
$10^{-3}$	$3.25 \times 10^{-6}$	9.00%	$75 \times 10^3$
$10^{-4}$	$3.40 \times 10^{-8}$	8.73%	$75 \times 10^4$
$10^{-5}$	$3.33 \times 10^{-10}$	8.94%	$75 \times 10^5$

Através das simulações realizadas constatou-se que as estimativas obtidas de  $\hat{P}^*(\mathbf{x}'|\mathbf{0})$  em relação a cada um dos 7 erros de decodificação específico, com igual distância de Hamming, não obtiveram desvios significativos do valor apresentado na Tabela 6. O valor da precisão relativa, em relação a cada um dos 7 erros de decodificação específico também não apresentou desvios significativos do valor apresentado na Tabela 6. Isto indica que os valores probabilidade do erro de decodificação específico, com igual distância de Hamming, possuem valores muito próximos.

A probabilidade do erro de decodificação específico foi também estimada pelo Método de Monte Carlo com os mesmos valores da precisão relativa das estimativas dados na Tabela 6. Deste modo, o número de execuções da simulação para ambos os métodos foram computados e comparados. É importante salientar que para o Método de Monte Carlo o canal não foi polarizado.

A probabilidade de erro de bit média dado que a palavra-código  $\mathbf{x}$  foi transmitida é expressa pela equação (4.19). Sabendo-se que o canal é simétrico e sem memória, o código é linear e a decodificação é de máxima verossimilhança, então a probabilidade de erro de bit independe da palavra-código transmitida, ou seja,  $P_b = P_b(\mathbf{x})$ . Sabendo-se que nas simulações realizadas se considerou o envio da palavra-código toda nula, a equação (4.19) pode ser reescrita como:

$$P_b = P_b(\mathbf{0}) = \frac{1}{k} \sum_{\mathbf{x}' \in D(\mathbf{x}')} n_b(\mathbf{0}, \mathbf{x}') P^*(\mathbf{x}' | \mathbf{0}) \quad (4.33)$$

onde  $k$  é o número de bits de informação transmitidos por palavra-código e  $n_b(\mathbf{0}, \mathbf{x}')$  é o número de bits de informação errados após a decodificação.

No cálculo da equação (4.33) somente se considerou  $P^*(\mathbf{x}' | \mathbf{0})$  em relação às palavras-código com  $d = d(\mathbf{x}', \mathbf{0}) = 3$ . É dito então que essa estimativa foi truncada para os centros de erro mais significativos, aqueles com maior probabilidade de ocorrerem durante a simulação. Para o método de Monte Carlo foi realizado o mesmo procedimento para o cálculo da probabilidade de erro de bit.

A eficiência da Valorização das Amostras será calculada da mesma forma que aquela realizada nas simulações pelo método do Escalonamento. Como para o cálculo da probabilidade de erro de bit foram consideradas somente as palavras-código com  $d = d(\mathbf{x}', \mathbf{0}) = 3$ , a eficiência da Valorização das Amostras foi medida em relação ao número de execuções de simulação necessárias por ambos os métodos para se obter o valor da precisão relativa dada na Tabela 6, em relação à estimação das probabilidades de erro de decodificação específico referentes às palavras-código com  $d = d(\mathbf{x}', \mathbf{0}) = 3$ .

Na Tabela 7 são listados os valores da probabilidade de erro de bit calculados para cada probabilidade de cruzamento do BSC e os ganhos de simulação em relação ao método de Monte Carlo.

**Tabela 7: Probabilidade de erro de bit e Ganho de simulação.**

Probabilidade de cruzamento	Probabilidade de erro de bit	Ganho de simulação
$\lambda$	$P_b$	$\eta$
$10^{-1}$	$8.76 \times 10^{-2}$	6.61

$10^{-2}$	$1.00 \times 10^{-3}$	51.58
$10^{-3}$	$9.75 \times 10^{-6}$	$5 \times 10^2$
$10^{-4}$	$1.04 \times 10^{-7}$	$5 \times 10^3$
$10^{-5}$	$1.00 \times 10^{-9}$	$5 \times 10^4$

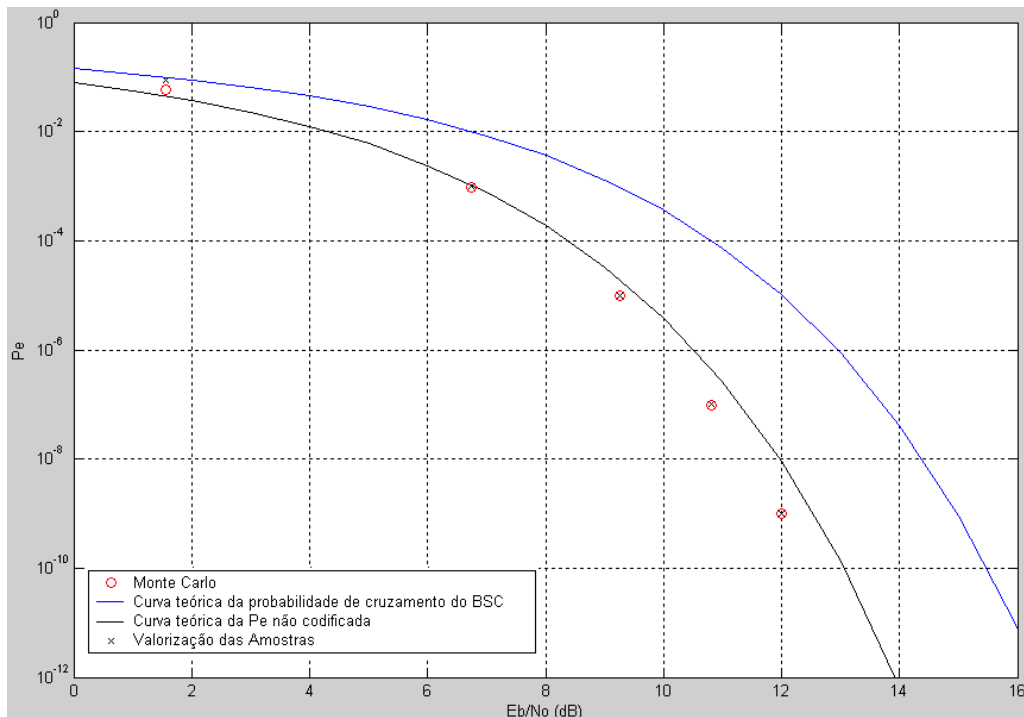
Os valores da probabilidade de erro de bit mostrados na Tabela 7 foram registrados no gráfico da Figura 21, permitindo comparação com os valores estimados da probabilidade de erro de bit pelo método de Monte Carlo para o código de Hamming (7,4) operando em um canal AWGN com decisão abrupta. No gráfico é traçada a curva da probabilidade de erro de bit versus a relação sinal-ruído. A relação sinal-ruído é expressa pela relação entre a energia por bit de informação,  $E_b$ , e a densidade espectral de potência do ruído,  $N_0$ . A relação entre a probabilidade de cruzamento do BSC e a relação sinal-ruído  $E_b / N_0$  é dada por:

$$\lambda = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{RE_b}{N_0}} \right) \quad (4.34)$$

onde  $R$  é a taxa do código. No gráfico também é traçada a curva teórica da probabilidade de erro de bit para uma sinalização antipodal em canal AWGN dada por:

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right) \quad (4.35)$$





**Figura 21: Gráfico comparativo da probabilidade de erro de bit teórica e simulada por Monte Carlo e Valorização das Amostras para o canal BSC.**

Através do gráfico pode-se observar que os valores obtidos da probabilidade de erro de bit através da Valorização das Amostras se aproximam muito dos valores estimados pelo método de Monte Carlo. Deste modo, pode-se confirmar que o truncamento realizado na equação (4.33) não comprometeu a estimação correta desse parâmetro.

A vantagem em se eliminar os termos com as maiores distâncias de Hamming no cálculo da probabilidade de erro de bit dada na equação (4.33) consiste em se conseguir maior flexibilidade na simulação, direcionando desta forma todo o seu esforço computacional para os termos com as menores distâncias de Hamming, aqueles que dominam o somatório da equação (4.33).

Na maioria dos códigos, somente uma pequena porcentagem dos erros de decodificação possui pequenas distâncias de Hamming, em relação à palavra-código toda nula, e isso se aplica principalmente aos códigos com grandes comprimentos [35]. Conseqüentemente, truncando a

equação (4.33) para esses erros de decodificação com pequenas distâncias de Hamming se obtém uma significativa redução no esforço computacional necessário.

Uma análise do erro cometido por não se considerar os erros de decodificação com as maiores distâncias de Hamming no cálculo da probabilidade de erro de bit é demonstrada em [1]. A análise realizada se aplica tanto a códigos de blocos ou a códigos convolucionais. A partir de [1] pode-se concluir que o modelo de polarização mostrado é viável a qualquer tipo de código utilizado, ou seja, a escolha dos centros de erro com maior probabilidade de ocorrerem durante a simulação garante maior rapidez na simulação e uma estimação segura da probabilidade de erro de bit do sistema.

#### **4.4 Considerações Finais**

Neste Capítulo foi mostrada a viabilidade e a precisão da aplicação da técnica da Valorização das Amostras em três cenários distintos. Observou-se que sua aplicação se torna particular de acordo com o tipo de sistema adotado. Contudo mostrou-se que a implementação da técnica não possui um nível de complexidade muito elevado, o que torna possível se utilizar essa poderosa ferramenta computacional em diversos tipos de sistema.

Através dos resultados obtidos observa-se que a técnica da Valorização das Amostras apresenta melhor desempenho em sistemas onde a ocorrência dos erros é muito baixa. Deste modo, para valores altos da probabilidade de erro de bit, a técnica não é tão eficiente em relação ao Método de Monte Carlo. Isso pode ser explicado pelo fato de que para altos valores da probabilidade de erro de bit, os eventos de erro já são frequentes e os pesos são “pequenos” devido à pequena polarização. Nesta situação o número de execuções de simulação da Valorização das Amostras, para alcançar determinada precisão, tende ao número de execuções do método de Monte Carlo. Conforme a probabilidade de erro de bit diminui a polarização torna-se mais forte, distanciando o número de simulações requeridas por ambos os métodos.

Observa-se também que a implementação da Valorização das Amostras em um canal com código corretor de erro difere da implementação realizada no canal AWGN e no canal com desvanecimento Rayleigh. No canal com código corretor de erro a implementação por eventos é necessária para que se consiga utilizar o modelo de polarização proposto.

Embora o método de polarização utilizado em um canal com código corretor de erro requeira o conhecimento dos centros de erro mais significativos, é possível visualizar através da análise matemática do erro cometido por se truncar a probabilidade de erro de bit [1], que poucos centros de erro devem ser utilizados na estimação desse parâmetro, sem acarretar dano significativo à precisão da estimativa.

## **5. CONSIDERAÇÕES FINAIS**

### **5.1 Contribuições da Dissertação**

A técnica da Valorização das Amostras embora seja conceitualmente simples carrega uma complexidade bastante elevada quando se pretende entendê-la a ponto de poder implementá-la em uma simulação. Além disso, a variedade de notação e de tratamento do assunto, incluindo as diversas formas de realizar sua aplicação faz com que a tarefa de implementação torne-se ainda mais complexa. Motivada por esta dificuldade, a autora desta dissertação utilizou uma abordagem unificada sobre a implementação da Valorização das Amostras na simulação de sistemas de comunicação digital em canal com ruído AWGN, canal com desvanecimento plano e em sistemas com codificação de canal. O trabalho apresenta-se como um compêndio realizado a partir do estudo e da interpretação de várias publicações a respeito do assunto, contendo as abordagens seguidas de estudos de caso com aplicações realizadas em simulações.

O ambiente de simulação utilizado neste trabalho é baseado no software Matlab da empresa Mathworks Incorporated. Para validação dos resultados obtidos através das simulações realizadas por ambos os métodos, de Monte Carlo e da Valorização das Amostras, fez-se uma comparação com os resultados obtidos por modelos teóricos de acordo com o tipo de sistema adotado. Os programas relativos às simulações realizadas se encontra em um CD anexado à dissertação.

### **5.2 Conclusões**

A aplicação da Valorização das Amostras no problema da estimação da probabilidade de erro de bit foi estudada neste trabalho. Sua aplicação se estendeu a diferentes tipos de sistemas de comunicações, classificados em sistemas com ou sem memória. Uma significativa redução do número de execuções de simulação em relação ao método de Monte Carlo foi conseguida através de sua aplicação nos três cenários distintos: sistema de comunicação digital em um canal AWGN, sistema de comunicação em um canal com desvanecimento plano e sistema de comunicação com código corretor de erro.

No Capítulo 4 mostrou-se que a implementação da técnica da Valorização das Amostras é realizada de forma particular de acordo com o tipo de sistema adotado. O principal fator que influencia na sua aplicação é a complexidade do sistema. Foi visto que para sistemas sem memória, a eficiência da técnica é alta e sua implementação é relativamente simples. Como mostrado a aplicação da técnica apresentou um bom desempenho no canal AWGN, alcançando ganhos de simulação em relação ao método de Monte Carlo de 15 a  $10^5$ , onde esse último valor foi conseguido para uma probabilidade de erro de bit de  $10^{-7}$ . Através das simulações realizadas no canal AWGN constatou-se que os ganhos obtidos se aproximaram muito dos ganhos teóricos mostrados no Capítulo 3.

No canal com desvanecimento plano o desempenho da técnica foi muito inferior ao alcançado no canal AWGN. Através dos resultados obtidos observou-se que a performance da técnica é influenciada também pela complexidade do sistema. O fator de redução das amostras chegou a vinte vezes para uma probabilidade de erro de bit de  $10^{-6}$ , diferentemente do ganho obtido para o canal AWGN que foi crescente com o aumento da relação sinal-ruído.

Já para um canal com código corretor de erro difere a implementação realizada se diferenciou bastante da realizada no canal AWGN e no canal com desvanecimento plano. Devido à complexidade do sistema se torna difícil determinar em quais regiões da função densidade de probabilidade deve-se polarizar e como polarizar essas regiões. Observa-se no canal com código corretor de erro que ao contrário das simulações pelo método do Escalonamento, esse modelo não pode ser implementado sequencialmente. Em outras palavras, a polarização é realizada em função dos centros de erro relevantes para o cálculo da probabilidade de erro de bit do sistema. Embora o método de polarização utilizado requeira o conhecimento dos centros de erro mais significativos, através da análise matemática realizada em [1], do erro cometido por se truncar a probabilidade de erro de bit, poucos centros de erro podem ser utilizados na estimação desse parâmetro sem acarretar dano significativo à precisão da estimativa. Essa análise mostrou que o erro médio tende a zero exponencialmente com o aumento da relação sinal-ruído.

No canal com código corretor de erro foi visto que a eficiência da Valorização das Amostras foi inferior à eficiência alcançada no canal AWGN. Esta limitação pode ser explicada pelo problema da memória do sistema, que como mostrado em [22] e [23] compromete o seu

desempenho. Porém o modelo de polarização utilizado é considerado mais flexível que o modelo de polarização por Escalonamento devido a direcionar todo o esforço computacional da simulação para os termos que dominam o somatório da equação da probabilidade de erro de bit.

Através dos resultados obtidos nos três tipos de sistemas propostos se observou que o método da Valorização das Amostras apresenta melhor desempenho em sistemas onde a ocorrência dos erros é muito baixa. Deste modo, para valores altos da probabilidade de erro de bit, a técnica não é tão eficiente em relação ao Método de Monte Carlo. Isso pode ser explicado pelo fato de que para altos valores da probabilidade de erro de bit os eventos de erro já são frequentes e os pesos “pequenos” devido a pequena polarização. Nesta situação o número de iterações da simulação pela Valorização das Amostras tende ao número de iterações de simulação pelo método de Monte Carlo. Conforme a probabilidade de erro de bit diminui, a polarização torna-se mais forte distanciando dessa forma o número de execuções requeridas por ambos os métodos.

A técnica de Valorização das amostras, por ter implementação relativamente complexa se comparada com o método direto de Monte Carlo, nem sempre apresenta vantagens. Por exemplo, quando se está realizando uma simulação com o objetivo de produzir um único resultado, como tipicamente acontece quando se investiga o desempenho de um sistema de comunicação para a produção de um artigo ou relatório, a implementação da técnica pode não ser atrativa, exceto quando se sabe a priori que o tempo de simulação por Monte Carlo será proibitivo.

A valorização das amostras passa a se tornar atrativa naqueles casos em que repetidas simulações devem ser executadas, de tal forma que a soma das durações individuais das simulações se torna proibitiva, mesmo que cada uma delas tenha duração aceitável. Além disso, como a aplicação da Valorização das amostras é fortemente dependente do sistema que se está analisando, torna-se inviável implementá-la de forma definitiva em softwares de simulação, os quais podem ser utilizados na análise de variados tipos de sistema. Para reforçar estes pontos de vista, a autora desta dissertação fez uma busca por softwares de simulação que contêm a técnica da Valorização das amostras implementada e foi encontrada uma única plataforma, o SPW4 [46] [50].

### 5.3 Sugestões para Trabalhos Futuros

As oportunidades de estudo e aplicação da técnica da Valorização das Amostras é bastante ampla, até certo ponto sendo limitada somente pela criatividade e, obviamente, pelo conhecimento sobre o tema.

De forma genérica, um trabalho futuro poderia ser uma investigação similar à que aqui foi apresentada, buscando detalhar a aplicação da Valorização das Amostras em outros tipos de sistemas e/ou canais de comunicação, por exemplo: canais com ruído impulsivo, canais com interferência intersimbólica, sistemas de comunicação em linhas de distribuição de energia (*PLC-Power Line Communication*) e sistemas de comunicação por ondas acústicas sob a água (*UWC-Under Water Communication*), apenas para citar alguns exemplos.

De forma mais específica, seria interessante estudar e descrever de forma detalhada a aplicação da Valorização das Amostras em sistemas com codificação de canal com decisão suave, estendendo os estudos para sistemas com códigos que permitem decisão iterativa, como por exemplo, códigos LDPC (Low Density Parity Check) e Turbo.

A elaboração de um bloco no VisSim/Comm que realize a técnica da Valorização das amostras assim como foi feito para o SPW4 [46]. O VisSim/Comm é um software de simulação de sistemas de comunicação, desenvolvido conjuntamente pela Visual Solutions, Inc. e a Eritek, Inc. (EUA).

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Albert, B. *Estimação da Probabilidade de Erro de sistemas de Comunicações Digitais Codificados via Valorização das Amostras*. Tese de Doutorado – Universidade Federal de Campina Grande, PB, Março 2004.
- [2] Al-qaq, W. A.; Devetsikiotis, M.; Townsend, J. K. Stochastic gradient optimization of importance sampling for the efficient simulation of digital communication systems. *IEEE Transactions on Communications*, Vol. 43, No. 12, pp. 2975-2985, December 1995.
- [3] Balaban, P. Statistical Evaluation of the Error Rate of the Fiber-Guide Repeater using Importance Sampling. *Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 55, No. 6, pp. 745-766, 1976.
- [4] Beaulieu, N.C. A Composite Importance Sampling Technique for Digital Communication System Simulation. *IEEE Transactions of Communications*, Vol. 38, No. 4, pp. 393-396, April 1990.
- [5] Beaulieu, N.C. An Investigation of Gaussian Tail and Rayleigh Tail Density Functions for Importance Sampling Digital Communication System Simulation. *IEEE Transactions of Communications*, Vol. 38, No. 9, pp. 1288-1292, September 1990.
- [6] Bellini, S.; Ferrai, M. Importance sampling simulation of concatenated block codes. *IEE Proceedings*, Vol. 140, No. 5, pp. 365-371, October 1993.
- [7] Bellini, S.; Molinari, C. Efficient simulation of multilevel and coded transmission systems. *IEE Proceedings*, Vol.140, No.5, pp.365-371, October 1993.
- [8] Bucklew, J. A.; Nitinawarat, S.; Wierer, J. Universal simulation distribution. *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 50, No. 11, pp. 2674-2685, November 2004.
- [9] Cavers, J.; Ho, P. Reducing the Computing Time in Simulations of Fading Channels. *IEEE Pacific Rim Conference on Communications Computers and Signal Processing*, pp. 310-314, May 1991.
- [10] Charles Lee, L. H. *Error-Control Block Codes*, Artech House Publishers, 2000;



- [11] Cottrell, M.; Fort, J. C.; Malgouyres, G. Large deviations and rare events in the study of stochastic algorithms. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 28, No.11, pp. 907-920, September 1983.
- [12] Davis, B.R. An Improved Importance Sampling Method for Digital Communication System Simulation. *IEEE Transactions of Communications*, COM-34, No.7, pp. 715-719, July 1986.
- [13] Fasolo, S. A. *Sistema de Comunicações Móveis*. Santa Rita do Sapucaí: Inatel, 2006.
- [14] Guimarães, D. A. Introdução às Comunicações Móveis. *Revista Telecomunicações*, Vol.1, No. 1, pp. 1-22: Inatel. Santa Rita do Sapucaí, MG, Agosto, 1998.
- [15] Guimarães, D. A. Uma Classe de Códigos Produto e sua Decodificação Turbo Aplicada em um Sistema CDMA Multiportadora. Tese de Doutorado. Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP. Campinas, SP, Junho de 2003.
- [16] Haykin, S. *Communications Systems*. 3 edition: John Wiley and Sons, Inc.. New York 1994.
- [17] Herro, M. A.; Nowack, J.M. Simulated viterbi decoding using importance sampling. *IEE Proceedings*, Vol.135, No.2, pp.133-142, April 1988.
- [18] Jeruchim, M. C.; Baladan, P.; Shanmugan, K. S., “*Simulation of Communication Systems: Modeling, Methodology, and Techniques*”, Kluwer Academic, 2000;
- [19] Jeruchim, M.C. On the Application of Importance Sampling to the Simulation of Digital Satellite and Multihop Links. *IEEE Transactions on Communications*, COM-32, No. 10, pp. 1088-1092, October 1984.
- [20] Jeruchim, M.C. Techniques for Estimating the Bit Error Rate in the Simulation of Digital Communication Systems. *IEEE Journal on Select Areas in Communications*, SAC-2, No.1, pp. 153-170, January 1984.

- [21] Jeruchim, M.C.; Balaban, P.; Shanmugan, K.S. *Simulation of Communications Systems*. Plenum Press, 1992.
- [22] Jeruchim, M.C.; Hahn, P.M. Developments in the Theory and Application of Importance Sampling. *IEEE Transactions of Communications*, COM-35, pp. 706-714, July 1987.
- [23] Jeruchim, M.C.; Wolfe, R.J.; Hahn, M.P. On Optimum and Suboptimum Biasing Procedures for Importance Sampling In Communication Simulation. *IEEE Transactions on Communications*, Vol. 38, No. 5, pp. 639-647, May 1990.
- [24] Kahn, H. Random sampling techniques in neutron attenuation problems – I. *Nucleonics*, pp. 27-37, May 1950.
- [25] Kahn, H. Use of different Monte Carlo sampling techniques. *Symp. Monte Carlo Methods*, H. A. Meyer, Ed. New York: Wiley, 1956.
- [26] Kahn, H.; Marshall, A. W. Methods of reducing sample size in monte carlo computations. *J. Oper. Res.*, pp. 263-278, 1953.
- [27] Leon-Garcia, A. *Probability and Random Processes for Electrical Engineering*, Addison-Wesley, 1994.
- [28] Lin, S.; Costello, J. R.; D. J. *Error Control Coding Fundamentals and Applications*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, Inc.; 1983.
- [29] Lu, D.; Yao, K. Estimation variance bounds of importance sampling simulations in digital communication systems. *IEEE Transactions on Communications*, Vol. 39, No. 10, pp. 1413-1417, October 1991.
- [30] Lu, D.; Yao, K. Improved Importance Sampling Technique for Efficient Simulation of Digital Communications Systems. *IEEE Journal on Select Areas in Communications*, Vol.6, No.1, pp. 67-75, January 1988.
- [31] Papoulis, A. *Probability, Random Variables, and Stochastic Process*. 3 edition, McGraw Hill, USA, 1991.

- [32] Proakis, J. G., *Digital Communications*, McGraw-Hill Science/Engineering/Math; 4 edition, 2000;
- [33] Ramundo, G. G. *Códigos Corretores de Erro*. Santa Rita do Sapucaí: Inatel, 2006.
- [34] Rappaport, T. S. *Wireless Communications – Principles and Practice*. IEEE Press. Inc.. New York and Prentice Hall, Inc., New Jersey, 1996.
- [35] Sadowsky, J.S. A New Method for Viterbi Decoder Simulation using Importance Sampling. *IEEE Transactions of Communications*, Vol.38, pp. 1341-1351, September 1990.
- [36] Sadowsky, J.S.; Bucklew, J. A. Large deviations theory techniques in Monte Carlo simulation. *Proceedings of the 1989 Winter Simulation Conference*.
- [37] Sadowsky, J.S.; Bucklew, J. A. On large deviations theory and asymptotically efficient Monte Carlo estimation. *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol.36, No.3, pp. 579-588, May 1990.
- [38] Sadowsky, J.S.; Lu, D.; Yao, K.; Chen, J.C. On Importance Sampling in digital communications – Part I: Fundamentals. *IEEE Journal on Select Areas in Communications*, Vol.11, No.3, pp. 289-299, January 1993.
- [39] Shanmugan, K.S.; Balaban, P. A Modified Monte Carlo Simulation Technique for the Evaluation of Error Rate in Digital Communications Systems. *IEEE Transactions on Communications*, COM-28, No.11, pp.1916-1924, November 1980.
- [40] Sklar, B. *Digital Communications: Fundamentals and Applications*, 2nd Edition, Prentice Hall, 2001;
- [41] Smith, P.J.; Shafi, M.; Gao, H. Quick Simulation: A Review of Importance Sampling in Communications Systems. *IEEE Journal on Select Areas in Communications*, Vol. 15, No. 4, pp. 597-613, May 1997.

- [42] Srinivasan, R. Importance Sampling – *Applications in Communications and Detection*. Berlin: Springer-Verlag, 2002.
- [43] Wang, N.; Srinivasan, R. On importance Sampling for iteratively decoded linear block codes. *IEE Proceedings*, Vol. 1, pp .18-23, May 2005.
- [44] Wang, Q.; Bhargava, K. V. On the Application of Importance Sampling to BER Estimation in the Simulation of Digital Communications Systems. *IEEE Transactions of Communications*, COM-35, No. 11, pp. 1231-1233, November 1987.
- [45] Wilson, J. R. Variance reduction techniques for digital simulation. *Am. J. Math. Manage. Sci*, Vol. 4, No.3,4, pp. 277-312, 1984.
- [46] Wyche, M.K.. Implementation of Importance Sampling Techniques Using the Signal Processing Worksystem (SPW). *Proceedings of IEEE MILCOM'92 Conference*, Vol.2, pp. 701-706, Oct. 1992.
- [47] Xia, B.; Ryan, W. On importance sampling for linear block codes. *IEEE International Conference in Communications*, 2003, pp. 2904-2908.
- [48] Ynoguti, C. A. *Probabilidade, Estatística e Processos Estocásticos*. Santa Rita do Sapucaí: Inatel, 2005.
- [49] Zhuang, W. Adaptive Importance Sampling for Fading Channels. *Electronics Letters*, Vol. 30, No. 14, pp. 1114-1116, July 1994.
- [50] SPW4 - Communications Library. CoWare, Inc. Brochura disponível em: [http://www.coware.com/PDF/products/SPW\\_COMM.pdf](http://www.coware.com/PDF/products/SPW_COMM.pdf) (último acesso em dezembro/2008).