

Inatel

Instituto Nacional de Telecomunicações

Canal de Desvanecimento
Sombreado Duplamente
Correlacionado

JEFFERSON DAVID SANTOS E SILVA

DEZEMBRO / 2019



**CANAL DE DESVANECIMENTO
SOMBREADO DUPLAMENTE COR-
RELACIONADO**

JEFFERSON DAVID SANTOS E SILVA

Dissertação apresentada ao Instituto Nacional de Telecomunicações, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Telecomunicações.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Rausley Adriano Amaral de Souza.

Silva, Jefferson David Santos e

S586c

Canal de Desvanecimento Sombreado Duplamente Correlacionado.
/ Jefferson David Santos e Silva. – Santa Rita do Sapucaí, 2019.
90 p.

Orientadores: Prof. Dr. Rausley Adriano Amaral de Souza.
Dissertação de Mestrado em Telecomunicações – Instituto Nacional
de Telecomunicações – INATEL.

Inclui bibliografia.

Inclui anexo.

1. Distribuição Nakagami 2. Desvanecimento α - μ 3.
Sombreamento Gama 4. Distribuição bivariável 5. Correlação 6. Combinador 7.
Probabilidade de Indisponibilidade 8. Mestrado em Telecomunicações. I. Souza,
Rausley Adriano Amaral de. II. Instituto Nacional de Telecomunicações –
INATEL. III. Título.

CDU 621.39

FOLHA DE APROVAÇÃO

Dissertação defendida e aprovada em ____/____/____,
pela comissão julgadora:

Prof. Dr. Rausley Adriano Amaral de Souza
INATEL

Prof. Dr. Danilo Henrique Spadoti
UNIFEI

Prof. Dr. Samuel Baraldi Mafra
INATEL

Coordenador do Curso de Mestrado
Prof. Dr. José Marcos Câmara Brito

*“Talento é 1% inspiração e 99%
transpiração.”*

Thomas Edison

*À minha amada Isabela,
pelo seu inigualável companheirismo.*

Agradecimentos

A Deus pois, sem Ele nada é possível.

Ao meu amor Isabela pelo seu apoio constante, motivação diária e imenso carinho.

Ao meu orientador Professor Dr. Rausley Adriano Amaral de Souza pelo exemplo de zelo, organização e competência.

Aos companheiros do Laboratório de Radio Cognitivo pelas discussões oportunas e informações compartilhadas.

Por fim, ao Instituto Nacional de Telecomunicações pela oportunidade de realizar este Mestrado.

Este trabalho foi parcialmente financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa de Minas Gerais (Fapemig), pelo CNPq contrato 308365/2017-8, pela Capes e pela RNP, com recursos do MCTIC, processo No 01250.075413/2018-04, sob o projeto Centro de Referência em Radiocomunicações (CRR) do Instituto Nacional de Telecomunicações - Inatel, Brasil.

Jefferson David Santos e Silva

Sumário

Sumário	ix
Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xi
Lista de Abreviaturas e Siglas	xiii
Lista de Símbolos	xv
Resumo	xvii
Abstract	xix
1 Introdução	1
1.1 Modelos de Desvanecimento	2
1.2 Modelos de Sombreamento	4
1.3 Modelos Compostos de Desvanecimento e Sombreamento	6
1.4 Combate ao Desvanecimento e Sombreamento	7
1.5 Objetivo, Contribuição e Estrutura da Dissertação	8
1.6 Publicações	9
2 Canal de Desvanecimento Sombreado Duplamente Correlacionado Nakagami-m_f/Nakagami-m_s	11
2.1 O Modelo Físico	11
2.2 A FDP Conjunta Nakagami- m_f /Nakagami- m_s	13
2.3 A FDC Conjunta Nakagami- m_f /Nakagami- m_s	14
2.4 Probabilidade de Indisponibilidade	15
2.5 Resultados Numéricos	16
2.6 Conclusões	19
3 Canal de Desvanecimento Sombreado Duplamente Correlacionado α-μ/Gama	21
3.1 O Modelo Físico	22
3.2 A FDP Conjunta α - μ /Gama	23
3.3 A FDC Conjunta α - μ /Gama	25
3.4 Momentos Conjuntos da Distribuição α - μ /Gama	26
3.5 FDPs Marginais α - μ /Gama	28
3.6 Momentos de R_1 e R_2	30

3.7	Coeficiente de Correlação na Potência	31
3.8	Casos Particulares da Distribuição α - μ /Gama	32
3.8.1	A Distribuição Nakagami/Gama	33
3.9	Probabilidade de Indisponibilidade	35
3.10	Resultados Numéricos	35
3.11	Conclusões	41
4	Conclusões e Trabalhos Futuros	43
4.1	Conclusões	43
4.2	Trabalhos Futuros	43
	Referências Bibliográficas	45
	A Códigos em MATLAB	
	B A função G de Meijer	

Lista de Figuras

1.1	Diagrama em blocos de um sistema de comunicação	1
1.2	A média em área, o sombreado e o desvanecimento em canais de comunicação sem fio	2
1.3	FDPs da distribuição de Nakagami	4
1.4	FDPs das distribuições lognormal e Gama	6
2.1	Perspectiva gráfica do padrão de correlação no desvanecimento Nakagami- m_f	12
2.2	A influência de ρ_f e ρ_s sobre a probabilidade de indisponibilidade em canal com desvanecimento sombreado duplamente correlacionado Nakagami- m_f /Nakagami- m_s	17
2.3	A influência de m_f e m_s sobre a probabilidade de indisponibilidade em canal com desvanecimento sombreado duplamente correlacionado Nakagami- m_f /Nakagami- m_s	18
2.4	A influência de ρ_f e ρ_s sobre a probabilidade de indisponibilidade em canal com desvanecimento sombreado duplamente correlacionado Nakagami- m_f /Nakagami- m_s	18
3.1	Perspectiva gráfica do padrão de correlação no canal de desvanecimento sombreado α - μ /Gama duplamente correlacionado	22
3.2	Coefficiente de correlação na potência em canal com desvanecimento sombreado α - μ /Gama duplamente correlacionado com ρ_f variando	37
3.3	Coefficiente de correlação na potência em canal com desvanecimento sombreado α - μ /Gama duplamente correlacionado com ρ_s variando	37
3.4	A influência de ρ_f e ρ_s sobre a probabilidade de indisponibilidade em canal com desvanecimento sombreado α - μ /Gama duplamente correlacionado	38
3.5	A influência de μ e de m sobre a probabilidade de indisponibilidade em canal com desvanecimento sombreado α - μ /Gama duplamente correlacionado	39
3.6	Diferentes valores de ρ_f e de ρ_s que resultam em um mesmo valor de coeficiente de correlação na potência em canal com desvanecimento sombreado α - μ /Gama duplamente correlacionado	40
3.7	Diferentes curvas de probabilidade de indisponibilidade referentes ao mesmo ρ em canal com desvanecimento sombreado α - μ /Gama duplamente correlacionado	40

Lista de Tabelas

2.1	Número de termos em (2.12) necessários para sete casas decimais de precisão	19
3.1	Número de termos em (3.51) necessários para sete casas decimais de precisão	41

Lista de Abreviaturas e Siglas

EGC	Combinador por ganho igual (<i>equal gain combining</i>)
FDC	Função de distribuição cumulativa
FDP	Função densidade de probabilidade
i.i.d.	Independente e identicamente distribuída
LoS	Linha de visada direta (<i>line-of-sight</i>)
MRC	Combinador por máxima razão (<i>maximal ratio combining</i>)
OP	Probabilidade de indisponibilidade (<i>outage probability</i>)
RSR	Relação sinal-ruído
SC	Combinador por seleção (<i>selection combining</i>)
UHF	Frequência ultra alta (<i>ultra high frequency</i>)
VHF	Frequência muito alta (<i>very high frequency</i>)

Lista de Símbolos

A_0	Constante relacionada ao modelo de sombreamento log-normal
α	Fator de não-linearidade do meio de propagação
$I_\nu(\cdot)$	Função de Bessel modificada de primeiro tipo e ordem ν
$K_\nu(\cdot)$	Função de Bessel modificada de segundo tipo e ordem ν
$\mathbb{C}(\cdot, \cdot)$	Operador covariância
dB	Decibéis
dBm	Decibéis de potência em relação a 1mW
$\psi(\cdot)$	Função digama
E_b	Energia média de bit
exp	Exponencial
$F(\cdot)$	Função de distribuição cumulativa
$f(\cdot)$	Função densidade de probabilidade
γ	Limiar da relação sinal-ruído instantânea
$\bar{\gamma}$	Valor referência médio da relação sinal-ruído
$\Gamma(\cdot)$	Função gama
$\gamma(\cdot, \cdot)$	Função gama incompleta inferior
${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z)$	Função hipergeométrica de Gauss
${}_pF_q(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \beta_1, \dots, \beta_q; z)$	Função hipergeométrica generalizada
J	Número de pontos de espalhamento no meio físico
δ_{kj}	Delta de Kronecker
λ	Coefficiente de correlação entre variáveis Gaussianas
ln	Logaritmo natural
m	Parâmetro do desvanecimento Nakagami- m
$\mathbb{E}(\cdot)$	Operador esperança matemática
$G_{p,q}^{m,n}(\cdot \cdot)$	Função de Meijer
μ	Número de <i>clusters</i> de multipercurso
μ_Z	Média de Z_{dBm}
N_0	Densidade espectral de potência unilateral do ruído
Ω	Média quadrática da envoltória R
P_i	Fração da potência espalhada no i -ésimo ponto de espalhamento
$(b)_n$	Símbolo de Pochhammer
$P_o(\cdot)$	Probabilidade de indisponibilidade

R	Envoltória do sinal recebido
ρ	Coefficiente de correlação na potência
Ξ	Relação sinal-ruído instantânea
$\bar{\Xi}$	Relação sinal-ruído média
σ	Desvio padrão das variáveis aleatórias Gaussianas
σ_{dB}	Desvio padrão de Z_{dBm}
σ^2	Variância das variáveis aleatórias Gaussianas
Θ	Valor médio do sombreamento
$\psi'(\cdot)$	Função trigama
$\mathbb{V}(\cdot)$	Operador variância
X	Processo Gaussiano
Y	Processo Gaussiano
Z	Potência média recebida sob a influência do sombreamento

Resumo

Silva, J. D. S. e. Canal de Desvanecimento Sombreado Duplamente Correlacionado [Dissertação de Mestrado]. Santa Rita do Sapucaí: Instituto Nacional de Telecomunicações; 2019.

Os canais de comunicação sem fio são modelados por meio de processos aleatórios. Esta dissertação contém a análise de dois modelos de canais compostos de desvanecimento e sombreamento multiplicativo: o modelo Nakagami- m_f /Nakagami- m_s e o modelo α - μ /Gama. São utilizadas distribuições bivariáveis sendo que, além da tradicional suposição de correlação no desvanecimento, admite-se correlação no sombreamento. Foram obtidas expressões da função densidade de probabilidade, da função de distribuição cumulativa, dos momentos, das funções características e do coeficiente de correlação. Como aplicação prática, utilizou-se a métrica de análise de desempenho probabilidade de indisponibilidade em um sistema de diversidade do tipo combinador por seleção, comparando-se as expressões teóricas com simulações computacionais. Como resultado sobre o desempenho do sistema, pode-se afirmar que os fatores de não linearidade do meio podem exercer grande influência, negativa ou positiva, o aumento dos fatores de desvanecimento e sombreamento contribui positivamente e a correlação é indesejada. Em especial, observou-se que a maneira como a correlação entre os processos internos ocorre, levando em consideração o modelo estocástico do canal, pode resultar em diferentes curvas de desempenho e o sombreamento pode exercer a mesma ou menor influência sobre este em comparação com o desvanecimento, dependendo do modelo de canal em questão.

Palavras-Chave: Desvanecimento α - μ . Sombreamento Gama. Distribuição Nakagami. Distribuição bivariável. Correlação. Combinador. Probabilidade de Indisponibilidade.

Abstract

Silva, J. D. S. e. Canal de Desvanecimento Sombreado Duplamente Correlacionado [Dissertação de Mestrado]. Santa Rita do Sapucaí: Instituto Nacional de Telecomunicações; 2019.

Wireless channels are modeled through stochastic processes. This dissertation contains the assessment of the composite channel model for fading and multiplicative shadowing: Nakagami- m_f /Nakagami- m_s and α - μ /Gamma. Bivariate distributions are used with, besides the traditional fading correlation, a shadowing correlation. Expressions such as probability density function, cumulative distribution function, moments, characteristic function and correlation coefficient were obtained. As an example of practical application, the performance metric outage probability in a selection combining diversity system was applied, comparing the theoretical expressions with computational simulations. As results from the performance analysis, it can be said that the nonlinearity medium parameters can greatly influence, negatively or positively, the increasing of the fading and shadowing factors contributes positively and the correlation is undesired. Especially, it was noticed that the manner in which the correlation between the inner processes occurs, considering the stochastic channel model, may result in different performance curves and the shadowing makes greater or less influence in comparison with the fading, depending on the channel model in question.

Keywords: α - μ fading. Gamma shadowing. Nakagami distribution. Bivariate distribution. Correlation. Combiners. Outage probability.

Capítulo 1

Introdução

UM sistema de comunicação pode ser representado, de forma simplificada, por um diagrama de blocos como mostrado na Figura 1.1. Neste diagrama estão representados alguns elementos como *fonte de informação*, *transmissor*, *meio físico*, *receptor* e *destino da informação*. No entanto, será dada especial atenção ao elemento identificado como *meio físico*. Ele representa o ambiente de propagação das ondas eletromagnéticas entre o transmissor e o receptor e as suas características físicas permitem modelá-lo matematicamente. Além disso, o meio físico governa a maior parte das características e necessidades do sistema de comunicação [1].

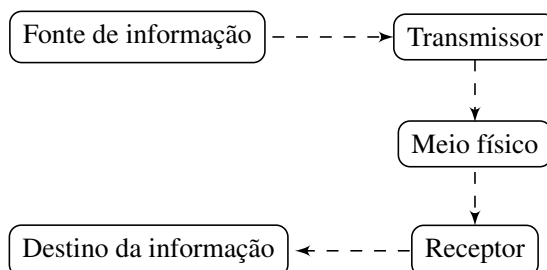


Figura 1.1: Diagrama em blocos de um sistema de comunicação.

Quando propagando-se pelo meio físico, o qual pode ser um canal de comunicação sem fio, também denominado de canal rádio-móvel, o sinal pode sofrer atenuações impostas pelos objetos e pelas distâncias entre o transmissor e o receptor. Essas atenuações podem ser divididas em *média em área* (*area-mean*) e *média local* (*local-mean*), ou *sombreamento* (*shadowing*) [1]. As médias em área correspondem às médias de medidas realizadas em intervalos espaciais equivalentes a centenas de comprimentos de onda. As médias locais correspondem às médias de medidas realizadas em intervalos espaciais de dezenas de comprimentos de onda [1]. Além disso, a média em área é dependente da distância entre o transmissor e o receptor enquanto a média local é dependente dos objetos entre eles, justificando o uso do nome *sombreamento*. Graficamente, como é possível ver na Figura 1.2, o sombreamento é o resultado das variações da potência do sinal recebido em torno na potência média em área [1, 2].

Quando analisa-se a média em área, ou local, da potência recebida de um sinal, diz-se que analisa-se a *propagação em larga escala* [1]. No entanto, há também a

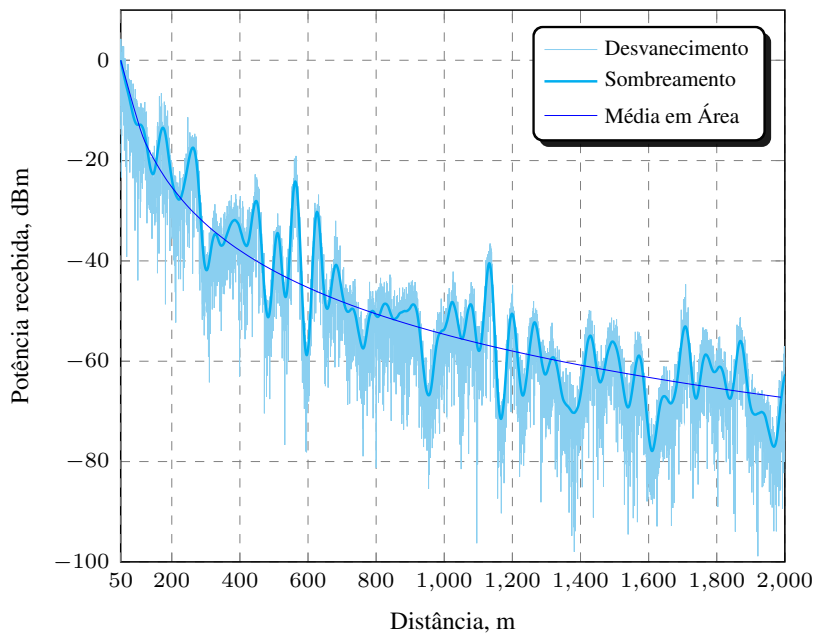


Figura 1.2: A média em área, o sombreamento e o desvanecimento em canais de comunicação sem fio.

propagação em pequena escala [3]. Neste caso, a propagação é resultado de mecanismos de propagação tais como reflexão, difração, espalhamento e outros [1–4]. Cada um desses mecanismos surge do encontro entre as ondas eletromagnéticas que representam o sinal transmitido com os diferentes objetos entre o transmissor e o receptor gerando, a cada encontro, múltiplas ondas parciais e, conseqüentemente, a combinação construtiva e destrutiva destas ondas no receptor causa variações instantâneas do sinal recebido. Este fenômeno é denominado de *fading* (desvanecimento) ou *multipath fading* (desvanecimento multipercursos), resultado da combinação no receptor de ondas parciais provenientes de diferentes percursos [1, 2, 4]. Na Figura 1.2, é possível ver a representação gráfica do desvanecimento.

1.1 Modelos de Desvanecimento

Para a modelagem de canais de desvanecimento, supõem-se algumas características para o campo de espalhamento de ondas. Um campo de ondas difuso e homogêneo pode ser descrito pelas seguintes características: um grande número de ondas parciais, amplitudes iguais entre as ondas parciais, correlação não-existente entre as ondas parciais, correlação não-existente entre a fase e a amplitude de uma mesma onda parcial e distribuição de fase homogênea em $[0, 2\pi]$ [5]. Estas suposições resultam de um campo no qual múltiplos pontos de espalhamento estão aleatoriamente distribuídos. Com base no teorema do limite central, o campo elétrico será um processo Gaussiano complexo composto por variáveis Gaussianas X e Y tais que, $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0$, $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Y) = \sigma^2$ e $\mathbb{C}(X, Y) = 0$, em que $\mathbb{E}(\cdot)$, $\mathbb{V}(\cdot)$ e $\mathbb{C}(\cdot, \cdot)$ representam os operadores esperança, variância e covariância, respectivamente [5]. Em um determinado ponto do espaço, onde se localizaria o receptor por exemplo, a amplitude e a fase ins-

tantâneas do sinal recebido são a superposição das amplitudes e fases de cada uma das ondas parciais. Sem perda de generalização, considere agora que os pontos de espalhamento localizados aleatoriamente dentro do campo podem ser reunidos em *clusters*, ou agrupamentos. Admitindo que o número de ondas parciais pertencentes a cada agrupamento é suficientemente grande, as fases das componentes de um mesmo agrupamento são aleatórias, o atraso temporal entre as componentes de um mesmo agrupamento é semelhante e o atraso temporal entre diferentes agrupamentos é relativamente grande, a envoltória do sinal recebido pode ser representada como [2]

$$R^2 = \sum_{k=1}^m X_k^2 + Y_k^2 \quad (1.1)$$

em que R representa a envoltória do sinal recebido, m o número de *clusters* de multipercurso e X_k e Y_k são as componentes em fase e em quadratura de cada *cluster*, respectivamente, com distribuições Gaussianas tais que, $\mathbb{E}(X_k) = \mathbb{E}(Y_k) = 0$, $\mathbb{V}(X_k) = \mathbb{V}(Y_k) = \sigma^2$ e $\mathbb{C}(X_k, Y_k) = 0$. A expressão em (1.1) é a base para diversos modelos de desvanecimento *plano*, também chamado de *não-seletivo em frequência*, o qual admite que o canal não introduz nenhuma mudança dependente da frequência ou ainda, que o canal afeta pelo mesmo ganho todas as componentes do sinal enviado [1, 2, 4].

Para o caso em que $m = 1$ em (1.1), a envoltória do sinal é dita ser distribuída segundo o modelo de Rayleigh [2, eq. (4.41)]. Segundo este modelo, a aleatoriedade da amplitude do sinal recebido pode ser representada por uma função densidade de probabilidade (FDP) da forma [2, eq. (4.6)]

$$f_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right), \quad r > 0, \quad (1.2)$$

na qual R representa a envoltória do sinal recebido e $2\sigma^2$ é a potência média total do sinal. A Figura 1.3 contém exemplos de FDPs da distribuição de Rayleigh. Medidas das variações instantâneas do sinal cuja frequência f está dentro do intervalo (50 MHz, 11200 MHz) tomadas em intervalos espaciais iguais a algumas dezenas de comprimentos de onda e realizadas em um veículo em movimento uniforme concordam com o modelo de Rayleigh [3].

Genericamente, para o caso em que $m > 0$ em (1.1), a envoltória do sinal é dita obedecer o modelo de Nakagami- m [6]. Neste caso, o parâmetro m é comumente denominado de *fator de desvanecimento*, ou ainda de *fator de forma*, e é definido como o inverso da variância normalizada de R [6, eq. (21)]; isto é

$$m = \frac{\mathbb{E}^2(R^2)}{\mathbb{V}(R^2)}. \quad (1.3)$$

Em [6], a FDP da envoltória R do sinal recebido propagando-se em um canal de desvanecimento Nakagami foi obtida como

$$f_R(r) = \frac{2m^m r^{2m-1}}{\Gamma(m)\Omega^m} \exp\left(-\frac{m}{\Omega}r^2\right), \quad r > 0, \quad (1.4)$$

em que $\Gamma(\cdot)$ é a função gama [7, eq. (6.1.1)] e Ω representa a média quadrática da envoltória R tal que, $\Omega = \mathbb{E}(R^2)$. A Figura 1.3 apresenta diferentes FDPs da distribuição Nakagami para $\Omega = 0$ dB e $\Omega = 3$ dB. Note que a dispersão das FDPs Nakagami diminui conforme m aumenta em torno do valor da média quadrática Ω . Experimentos realizados em campo sugerem alguns valores para o fator de desvanecimento m para a classificação de diferentes canais rádio-móveis. A saber, grandes centros urbanos e áreas abertas com baixa densidade de objetos podem ser modelados com $1 \leq m \leq 15$, enquanto que regiões montanhosas podem ser modeladas com $10 \leq m \leq 20$ [5, 6, 8]. A distribuição de Rayleigh pode ser derivada da distribuição de Nakagami tomando $m = 1$, bem como outras distribuições como a Gaussiana unilateral tomando $m = 0.5$ [2, 5, 6].

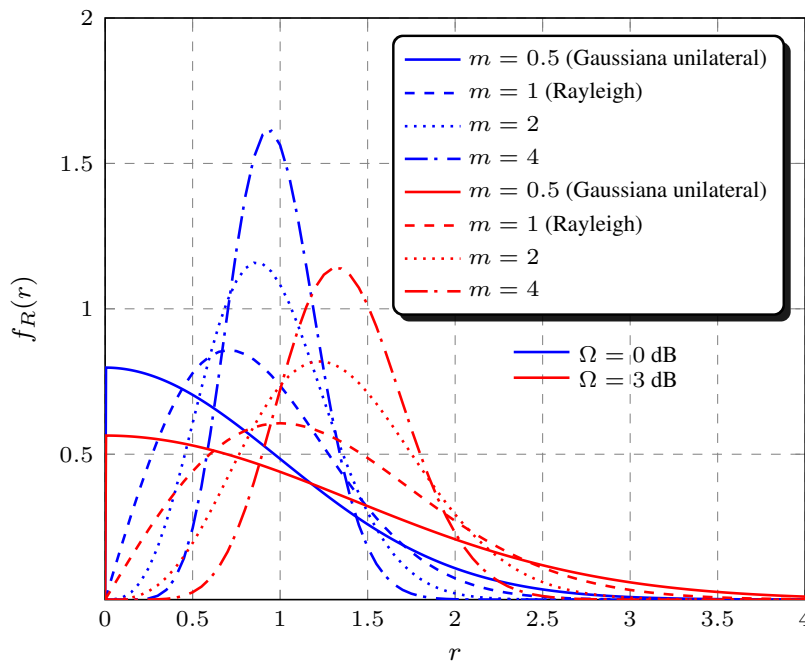


Figura 1.3: FDPs da distribuição de Nakagami.

Outras modificações podem ser feitas em (1.1) para a obtenção de outros modelos de desvanecimento. Por exemplo, admitindo que as variáveis Gaussianas X_k e Y_k são não-centralizadas, isto é, têm médias não nulas, obtém-se o modelo κ - μ [9] enquanto que admitindo que a envoltória do sinal é elevada a um expoente qualquer $\alpha > 0$ ao invés de 2, obtém-se o modelo α - μ [10]. Será dada especial atenção ao modelo α - μ no Capítulo 3.

1.2 Modelos de Sombreamento

No estudo do fenômeno de sombreamento sobre as comunicações móveis, supõe-se que as variações de longo-prazo da potência média do sinal recebido podem ser modeladas como o produto de frações de potências espalhadas em cada um dos pontos de espalhamentos distribuídos pelo campo [2]. Matematicamente, a potência média

recebida é representada por

$$Z = \prod_{i=1}^J P_i \quad (1.5)$$

na qual Z é a potência média recebida, J é o número de pontos de espalhamento e P_i é a fração de potência espalhada no i -ésimo ponto de espalhamento [2]. Em seguida, convertendo cada uma das frações de potências P_i em dBm e utilizando a propriedade de logaritmo do produto, (1.5) torna-se

$$Z_{\text{dBm}} = \sum_{i=1}^J 10 \log_{10} \left(\frac{P_i}{1\text{mW}} \right). \quad (1.6)$$

Para J suficientemente grande, admite-se que Z_{dBm} tem distribuição Gaussiana baseado no teorema do limite central. De fato, como mencionado em [3], a distribuição do sinal recebido em dBm, com as alturas das antenas, frequências e distâncias fixas, é uma distribuição denominada de *lognormal*. A FDP da potência média recebida Z dada em watts ou miliwatts é dada como [2, 4]

$$f_Z(z) = \frac{A_0}{\sqrt{2\pi\sigma_{\text{dB}}^2 z^2}} \exp \left[-\frac{(10 \log_{10} z - \mu_z)^2}{2\sigma_{\text{dB}}^2} \right] \quad (1.7)$$

na qual $A_0 = 10/\ln 10 = 4.3429$ e μ_z e σ_{dB} representam a média e o desvio padrão de Z_{dBm} , respectivamente. Valores de desvios padrões do sombreamento reportados na literatura a partir de dados experimentais estão dentro dos intervalos (4.5 dB, 9 dB) para 850 MHz e (8 dB, 12 dB) para 11200 MHz [3]. Além disso, em [11] é mostrado que $J > 15$ em (1.6) é suficiente para que Z_{dBm} apresente distribuição lognormal.

Além da distribuição lognormal, a distribuição Gama também é comumente utilizada na modelagem do sombreamento em comunicações móveis. Em [12], por exemplo, é possível encontrar diversos resultados reunidos justificando o uso de tal distribuição. Dentre eles, é reportado que a distribuição Gama adequa-se às medidas da potência recebida em sistemas de frequência muito alta (*very high frequency*, VHF) ou frequência ultra alta (*ultra high frequency*, UHF) tão bem quanto a distribuição lognormal bem como, apresenta um melhor tratamento matemático [13]. Em especial, [14] defende que a distribuição Gama aproxima-se melhor aos dados experimentais do que a distribuição lognormal. A FDP da distribuição Gama tem a forma

$$f_Z(z) = \frac{z^{m-1}}{\Theta^m \Gamma(m)} \exp \left(-\frac{z}{\Theta} \right) \quad (1.8)$$

na qual $\Theta = \mathbb{E}(Z)$ e $m = \mathbb{E}^2(Z)/\mathbb{V}(Z)$. Comparando-se (1.4) com (1.8), nota-se que a FDP da distribuição Gama pode ser obtida a partir da distribuição Nakagami- m por intermédio do procedimento padrão de transformação de variáveis [2, eq. (2.144)]. A relação entre os parâmetros σ_{dB} e μ_z da distribuição lognormal com os parâmetros m e Θ da distribuição Gama pode ser feita por meio de [2, eq. (4.72)]

$$\sigma_{\text{dB}}^2 = A_0^2 \psi'(m) \quad (1.9)$$

e [2, eq. (4.73)]

$$\mu = A_0 (\ln \Theta + \psi(m)) \quad (1.10)$$

em que $\psi'(\cdot)$ e $\psi(\cdot)$ são as funções trigama [7, eq. (6.4.1)] e digama [7, eq. (6.3.1)], respectivamente. A Figura 1.4 apresenta algumas curvas para efeito de comparação entre as FDPs das distribuições lognormal e Gama. Note que, as curvas referentes à distribuição Gama não sobrepõem as curvas referentes à distribuição lognormal. Como mencionado em [15], as curvas referentes às duas distribuições coincidem a medida que m aumenta. Além disso, em concordância com [2], a Figura 1.4 mostra que σ_{dB} é inversamente proporcional a m : à medida que os valores de σ_{dB} diminuem de 9.65 para 3.49, os valores de m aumentam de 0.5 para 2.

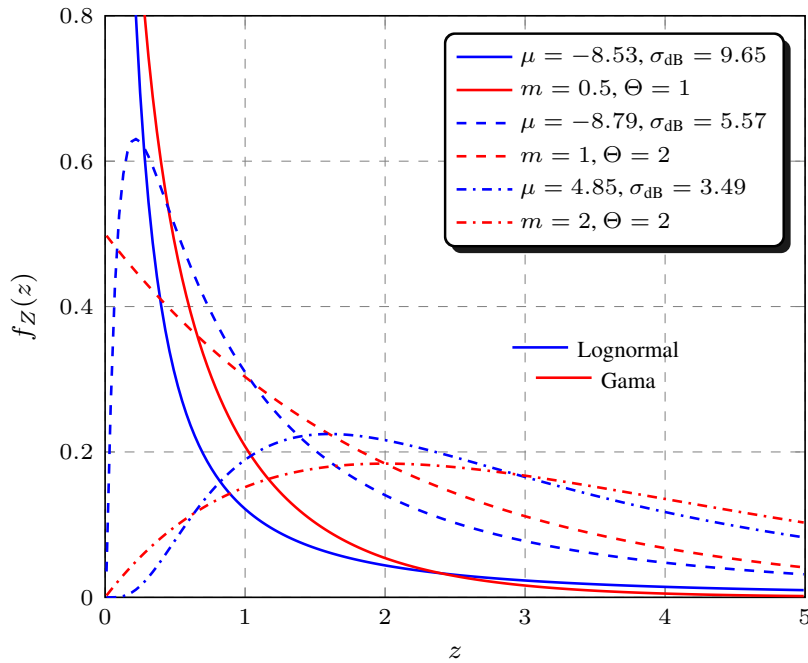


Figura 1.4: FDPs das distribuições lognormal e Gama.

1.3 Modelos Compostos de Desvanecimento e Sombreamento

É possível afirmar que as variações instantâneas ou médias da potência de um sinal proveniente da propagação através de um canal rádio-móvel em um sistema de comunicação sem fio têm sido tratadas por meio de modelos probabilísticos que têm por objetivo englobar a presença de desvanecimento multipercurso, sombreamento ou de ambos [16]. Como já mencionado, quando o foco é a avaliação da propagação em larga escala, no fenômeno de sombreamento consideram-se as variações de potência de recepção denominadas média local, que mais fortemente é governada pela presença de obstáculos entre transmissor e receptor. Por outro lado, nas análises em pequena escala, o foco está nas variações instantâneas da potência do sinal recebido produzidas

pelo desvanecimento por múltiplos percursos. No modelo que englobe ambos, normalmente denominado na literatura como modelo composto multipercurso/sombreamento ou ainda modelo com desvanecimento sombreado, duas estratégias diferentes têm sido adotadas em relação ao sombreamento. A primeira admite que o sombreamento atuará diretamente na potência média total do sinal desvanecido, denominado modelo de desvanecimento sombreado multiplicativo. A segunda pressupõe que o sombreamento influencie somente as componentes dominantes do sinal, denominado desvanecimento sombreado na linha de visada direta (*line-of-sight*, LoS). Qualquer que seja a estratégia adotada na modelagem, a influência será na mudança da natureza de parâmetros físicos antes determinísticos tratando-os como aleatórios.

O tema desvanecimento sombreado tem sido frequentemente foco de diversas pesquisas em diferentes cenários de aplicação. Em [17] é apresentada uma análise do desempenho em um ambiente com interferência co-canal operando em canais com desvanecimento Nakagami- m sombreados por um modelo de canal do tipo Gama. Além da suposição tradicional de sinais independentes e identicamente distribuídos (i.i.d.), os autores em [18] apresentam uma análise em um cenário com canais não identicamente distribuídos, ou seja na suposição de parâmetros de desvanecimento e sombreamento não necessariamente idênticos. Estudos sobre predição de cobertura e da probabilidade de indisponibilidade (*outage probability*) foram realizados em [18] na suposição de canais sombreados do tipo Rice e Nakagami- m . O sinal desejado é admitido possuir desvanecimento Rice, enquanto os sinais interferentes possuem densidade Nakagami- m . Em [19] é feita a investigação do desvanecimento sombreado no modelo de canal κ - μ . É admitida uma variação na LoS que está sujeita ao sombreamento de um modelo Nakagami- m . Tendo cada um destes modelos teóricos ou empíricos suas qualidades particulares em relação à concordância com medidas realizadas em campo, a distribuição Nakagami- m ou a distribuição Gama são comumente utilizadas para representar tanto o desvanecimento quanto o sombreamento [18, 19]. Uma das estratégias utilizadas para a obtenção de um modelo de canal com desvanecimento sombreado multiplicativo será detalhada nos Capítulos 2 e 3.

1.4 Combate ao Desvanecimento e Sombreamento

Uma vez que a propagação em larga escala ou pequena escala do sinal em um canal de comunicação sem fio pode apresentar fenômenos que contribuem negativamente, por exemplo, para a relação sinal-ruído (RSR) do sinal, técnicas têm sido desenvolvidas para melhorar o desempenho do sistema de comunicação móvel. Tais técnicas baseiam-se no envio de cópias do sinal com a mesma informação e na utilização de algoritmos para combiná-las na recepção, supondo que a probabilidade de todas estas cópias apresentarem RSR baixa é muito pequena [2, 4]. Estas técnicas são divididas em duas categorias: *técnicas de microdiversidade* e *técnicas de macrodiversidade*. As técnicas de microdiversidade são utilizadas no combate ao desvanecimento enquanto as técnicas de macrodiversidade são utilizadas no combate ao sombreamento [20]. Além disso, a primeira utiliza múltiplas antenas no receptor e/ou no transmissor enquanto que a segunda utiliza múltiplas estações base. As melhorias proporcionadas pelas técnicas de diversidade ao sistema dependem da modulação, da codificação, do

número de canais de microdiversidade, do número de estações base no arranjo de macrodiversidade, da correlação entre os canais, da correlação entre as estações base, entre outros [2]. Em resumo, as técnicas de diversidade podem ser divididas em [2, 4]

- Diversidade espacial: arranjo de múltiplos transmissores ou receptores;
- Diversidade em frequência: utilização de múltiplas bandas para transmissão;
- Diversidade angular: múltiplas antenas direcionais;
- Diversidade em polarização: transmissão por meio de duas polarizações ortogonais.

A maneira como as cópias do sinal transmitido se combinam na recepção é determinada pelo algoritmo de diversidade utilizado. Dentre eles, pode-se citar: combinador por seleção (*selection combining*, SC), combinador por máxima razão (*maximal ratio combining*, MRC) e combinador por ganho igual (*equal gain combining*, EGC) [4]. Além disso, cada uma das cópias do sinal é dita estar em um *ramo* de diversidade. O SC é implementado quando a cópia do sinal recebido que apresenta maior RSR é escolhida em detrimento das demais. No MRC, todas as cópias são multiplicadas por um fator tal que, a RSR na saída do MRC é máxima. Por fim, no caso do EGC, todas as cópias são multiplicadas pelo mesmo fator. Dentre estes três algoritmos, o SC é o que apresenta maior facilidade do ponto de vista de implementação prática [2].

1.5 Objetivo, Contribuição e Estrutura da Dissertação

O objetivo principal deste trabalho é explorar modelos probabilísticos de canais com desvanecimento sombreado multiplicativo duplamente correlacionado úteis na caracterização de um sinal propagando-se por um canal que apresente conjuntamente desvanecimento e sombreado. Os modelos aqui tratados denominam-se Nakagami- m_f /Nakagami- m_s e α - μ /Gama. Para as suas devidas apresentações, serão discutidas as características pertinentes a cada um destes modelos e será explicada a obtenção de estatísticas conjuntas e marginais como FDP, função de distribuição cumulativa (FDC), momentos e coeficiente de correlação. Além disso, a métrica de análise de desempenho de probabilidade de indisponibilidade (*outage probability*, OP) na saída de um sistema SC é utilizada como um exemplo de aplicação prática destes modelos compostos de desvanecimento e sombreado.

Um aspecto comum nos trabalhos citados na Secção 1.3 é a inexistência da suposição da correlação entre as componentes de sombreado ao se analisar a combinação de múltiplos sinais na recepção. Um exemplo comum deste tipo de sistema são as estratégias utilizadas para melhorar o desempenho dos sistemas com a utilização das técnicas de diversidade [21–23]. A análise do impacto desta correlação com especial atenção à sua influência sobre a correlação na potência entre as envoltórias do sinal recebido é também uma contribuição deste artigo.

Como estrutura utilizada, os Capítulos a seguir apresentarão os modelos Nakagami- m_f /Nakagami- m_s e α - μ /Gama sendo, o modelo Nakagami/Gama brevemente discutido no Capítulo 3. Cada um dos Capítulos são divididos em introdução, detalhamento sobre as deduções matemáticas e estatísticas, resultados numéricos e conclusão.

1.6 Publicações

O seguinte artigo foi produzido como resultado das pesquisas relacionadas a este trabalho:

- ① Jefferson D. S. e Silva, Rausley A. A. de Souza, Michel D. Yacoub. **Desvanecimento Sombreado Duplamente Correlacionado**. XXXVII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações e Processamento de Sinais (SBrT 2019). Petrópolis, RJ, 29 de Setembro a 02 de Outubro. 2019.

Capítulo 2

Canal de Desvanecimento Sombreado Duplamente Correlacionado Nakagami- m_f /Nakagami- m_s

ESTE Capítulo apresenta um novo modelo de canal de desvanecimento sombreado multiplicativo duplamente correlacionado, o qual utiliza duas distribuições bivariáveis Nakagami para modelar tanto o desvanecimento quanto o sombreado. Tal modelo é denominado de Nakagami- m_f /Nakagami- m_s em que os subíndices f e s denotam os parâmetros relacionados ao desvanecimento e o sombreado, respectivamente. São obtidas expressões para a FDP e FDC conjuntas bem como, uma expressão para a probabilidade de indisponibilidade aplicada diretamente em um sistema com diversidade do tipo SC. No entanto, tais expressões não foram obtidas em forma fechada. Uma das justificativas para a utilização da distribuição Nakagami para modelar o sombreado é encontrada a partir da distribuição α - μ . Como mencionado em [10], a distribuição α - μ engloba as distribuições Gama e Nakagami e, além disso, [24] avalia o modelo composto de desvanecimento e sombreado univariável α - μ/α - μ , tornando plausível modelar o sombreado a partir da distribuição Nakagami.

2.1 O Modelo Físico

Sejam R_1 e R_2 duas envoltórias Nakagami- m_f , representativas do fenômeno de desvanecimento plano de curto prazo, dadas por

$$R_1^2 = \sum_{i=1}^{2m_f} X_i^2 \quad (2.1a)$$

$$R_2^2 = \sum_{i=1}^{2m_f} Y_i^2 \quad (2.1b)$$

com parâmetros (m_f, Ω_1) e (m_f, Ω_2) , respectivamente. O parâmetro $m_f > 0$ denota o fator de desvanecimento do modelo Nakagami- m_f , e os parâmetros $\Omega_1 = \mathbb{E}(R_1^2) = 2m_f\sigma_{1f}^2$ e $\Omega_2 = \mathbb{E}(R_2^2) = 2m_f\sigma_{2f}^2$ denotam as potências médias dos processos R_1 e

R_2 , respectivamente. As variáveis X_i e Y_i são processos Gaussianos mutuamente independentes com médias nulas e variâncias σ_{1f}^2 e σ_{2f}^2 , respectivamente. Em termos matemáticos $\mathbb{C}(X_k, X_j) = \mathbb{C}(Y_k, Y_j) = 0$ para $k \neq j$, $\mathbb{C}(X_k, X_j) = \sigma_{1f}^2$ e $\mathbb{C}(Y_k, Y_j) = \sigma_{2f}^2$ para $k = j$, sendo $\mathbb{C}(\cdot, \cdot)$ o operador covariância. Admite-se correlação entre os processos X_k e Y_j para $k = j$. Define-se o coeficiente de correlação

$$\lambda_f = \frac{\mathbb{C}(X_k, Y_j)}{\sqrt{\sigma_{1f}^2 \sigma_{2f}^2}} \delta_{kj}, \quad (2.2)$$

$-1 < \lambda_f < 1$, δ_{kj} é o delta de Kronecker tal que $\delta_{kj} = 1$ se $k = j$ e $\delta_{kj} = 0$ se $k \neq j$. Por fim, o coeficiente de correlação entre as potências Nakagami- m_f R_1^2 e R_2^2 é dado por $\rho_f = \lambda_f^2$ [23, eq. (15)] e o padrão de correlação pode ser visto na Figura 2.1.

$$\begin{array}{ccccccc} R_1^2 & = & X_1^2 & + & X_2^2 & + & \cdots & + & X_{2m_f}^2 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \rho_f & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \lambda_f & & \lambda_f & & & & \lambda_f \\ R_2^2 & = & Y_1^2 & + & Y_2^2 & + & \cdots & + & Y_{2m_f}^2 \end{array}$$

Figura 2.1: Perspectiva gráfica do padrão de correlação no desvanecimento Nakagami- m_f .

A modelagem do sombreamento considerada tem como efeito a variação aleatória da potência média de cada uma das variáveis R_1 e R_2 [16]. Ou seja, as potências médias Ω_1 e Ω_2 são variáveis aleatórias seguindo um dado modelo de canal. Adota-se aqui o mesmo modelo utilizado na componente do desvanecimento de curto prazo dada em (2.1). Especificamente, sejam Ω_1 e Ω_2 duas variáveis Nakagami- m_s , representativas do fenômeno de desvanecimento de longo prazo caracterizando o sombreamento, dadas por

$$\Omega_1^2 = \sum_{i=1}^{2m_s} W_i^2 \quad (2.3a)$$

$$\Omega_2^2 = \sum_{i=1}^{2m_s} Z_i^2 \quad (2.3b)$$

com parâmetros (m_s, Θ_1) e (m_s, Θ_2) , respectivamente. Para a correta distinção do *fator de desvanecimento* m_s , característico do desvanecimento de curto prazo, o parâmetro $m_s > 0$ será nomeado por *fator de sombreamento*, característico do sombreamento Nakagami- m_s . Os parâmetros $\Theta_1 = \mathbb{E}(\Omega_1^2) = 2m_s\sigma_{1s}^2$ e $\Theta_2 = \mathbb{E}(\Omega_2^2) = 2m_s\sigma_{2s}^2$ denotam as potências médias dos processos Ω_1 e Ω_2 , respectivamente. As variáveis W_i e Z_i são processos Gaussianos mutuamente independentes com médias nulas e variâncias σ_{1s}^2 e σ_{2s}^2 , respectivamente. Em termos matemáticos $\mathbb{C}(W_k, W_j) = \mathbb{C}(Z_k, Z_j) = 0$ para $k \neq j$, $\mathbb{C}(W_k, W_j) = \sigma_{1s}^2$ e $\mathbb{C}(Z_k, Z_j) = \sigma_{2s}^2$ para $k = j$. Admite-se, também para o sombreamento, a correlação entre os processos W_k e Z_j para $k = j$, gerando assim naturalmente uma correlação entre os processos Nakagami- m_s Ω_1 e Ω_2 . Assim, define-se o coeficiente de correlação

$$\lambda_s = \frac{\mathbb{C}(W_k, Z_j)}{\sqrt{\sigma_{1s}^2 \sigma_{2s}^2}} \delta_{kj}, \quad (2.4)$$

$-1 < \lambda_s < 1$. O coeficiente de correlação entre as potências Nakagami- m_s Ω_1^2 e Ω_2^2 é dado por $\rho_s = \lambda_s^2$.

Notar que a aleatoriedade pretendida nas variáveis Ω_1 e Ω_2 é obtida a partir das variâncias σ_{1f}^2 e σ_{2f}^2 dos processos Gaussianos X_i e Y_i , respectivamente. Ou seja, $\sigma_{1f}^2 = \Omega_1/(2m_f)$ e $\sigma_{2f}^2 = \Omega_2/(2m_f)$ permite concluir que as respectivas variâncias σ_{1f}^2 e σ_{2f}^2 , de R_1 e R_2 , respectivamente, serão caracterizadas por uma distribuição Nakagami escalonada pelo fator $2m_f$. Obviamente, na ausência do sombreamento, as potências médias Ω_1 e Ω_2 tornam-se determinísticas.

Vale ressaltar neste ponto a importância de se admitir correlação tanto no desvanecimento quanto no sombreamento. O coeficiente de correlação no modelo isotrópico é dado por [25] $J_0(\beta d)/(1 + (\Delta\omega\bar{T})^2)$ em que β é uma constante de fase, d é a distância entre dois pontos de recepção, $\Delta\omega = 2\pi(f_2 - f_1)$ é a diferença entre as frequências dos processos envolvidos, \bar{T} é o espalhamento de retardo e $J_n(\cdot)$ é a função de Bessel de primeiro tipo e ordem n . Note que, para $\beta d = 0$, a correlação fase-fase e quadratura-quadratura será não nula sempre que $\Delta\omega\bar{T}$ for finito. Especificamente, $\Delta\omega$ finito (os processos envolvidos propagando-se com frequências ligeiramente diferentes, ou seja $f_1 \neq f_2$, ou ainda propagando-se na mesma frequência, ou seja $f_1 = f_2$) e \bar{T} finito (banda de coerência finita ($0 < \bar{T} < \infty$) ou $\bar{T} = 0$ (canal plano, ou de maneira semelhante, banda de coerência infinita)). Portanto, é razoável, e necessário, admitir correlação fase-fase e quadratura-quadratura dos processos envolvidos descritos em (2.1) ou (2.3).

2.2 A FDP Conjunta Nakagami- m_f /Nakagami- m_s

A FDP conjunta entre duas variáveis Nakagami R_1 e R_2 condicionadas em relação às potências médias de R_1 e R_2 pode ser representada por [26, eq. (1)]

$$f_{R_1, R_2}(r_1, r_2 | \Omega_1 = \omega_1, \Omega_2 = \omega_2) = \frac{4m_f^{m_f+1}(r_1 r_2)^{m_f} \exp\left(-\frac{m_f r_1^2}{\omega_1(1-\rho_f)} - \frac{m_f r_2^2}{\omega_2(1-\rho_f)}\right)}{\Gamma(m_f)\omega_1\omega_2(1-\rho_f)(\sqrt{\omega_1\omega_2\rho_f})^{m_f-1}} \times I_{m_f-1}\left(\frac{2m_f r_1 r_2 \sqrt{\rho_f}}{(1-\rho_f)\sqrt{\omega_1\omega_2}}\right) \quad (2.5)$$

na qual Ω_1 e Ω_2 representam as potências médias de R_1 e R_2 , respectivamente, ρ_f representa o coeficiente de correlação na potência entre R_1 e R_2 , m_f representa o fator de desvanecimento característico da distribuição de Nakagami- m_f e $I_\nu(\cdot)$ representa a função de Bessel modificada de primeiro tipo e ordem ν [7, eq. (9.6.3)].

Como pode ser visto em (2.5), ambas as variáveis R_1 e R_2 estão caracterizadas pelo mesmo fator de desvanecimento m_f [26]. Os parâmetros ρ_f e m_f são determinísticos e as variáveis Ω_1 e Ω_2 são aleatórias. Esta estratégia permite representar a influência do sombreamento sobre o canal com desvanecimento Nakagami por meio da aleatoriedade das potências médias.

Utilizando (2.5) é possível determinar a FDP conjunta das variáveis R_1 e R_2 descondicionando (2.5) em relação às variáveis Ω_1 e Ω_2 [16, eq. (3)], ou seja

$$f_{R_1, R_2}(r_1, r_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty f_{R_1, R_2}(r_1, r_2 | \omega_1, \omega_2) f_{\Omega_1, \Omega_2}(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \quad (2.6)$$

em que $f_{\Omega_1, \Omega_2}(\omega_1, \omega_2)$ representa a FDP conjunta de Ω_1 e Ω_2 . Desejando-se analisar a influência de um sombreamento Nakagami- m_s sobre um canal de desvanecimento Nakagami- m_f com diversidade, tal sombreamento é caracterizado por

$$f_{\Omega_1, \Omega_2}(\omega_1, \omega_2) = \frac{4m_s^{m_s+1}(\omega_1\omega_2)^{m_s} \exp\left(-\frac{m_s\omega_1^2}{\Theta_1(1-\rho_s)} - \frac{m_s\omega_2^2}{\Theta_2(1-\rho_s)}\right)}{\Gamma(m_s)\Theta_1\Theta_2(1-\rho_s)(\sqrt{\Theta_1\Theta_2\rho_s})^{m_s-1}} \times I_{m_s-1}\left(\frac{2m_s\omega_1\omega_2\sqrt{\rho_s}}{(1-\rho_s)\sqrt{\Theta_1\Theta_2}}\right). \quad (2.7)$$

As variáveis Θ_1 e Θ_2 representam as potências médias de Ω_1 e Ω_2 , respectivamente, ρ_s representa o coeficiente de correlação na potência entre Ω_1 e Ω_2 , e m_s representa o fator de sombreamento característico da distribuição Nakagami- m_s .

Substituindo (2.5) e (2.7) em (2.6) e após algumas simplificações algébricas obtém-se

$$f_{R_1, R_2}(r_1, r_2) = \frac{16m_f^{m_f+1}m_s^{m_s+1}(r_1r_2)^{m_f}}{\Gamma(m_f)\Gamma(m_s)\Theta_1\Theta_2(1-\rho_f)(1-\rho_s)(\sqrt{\rho_f})^{m_f-1}(\sqrt{\Theta_1\Theta_2\rho_s})^{m_s-1}} \times \int_0^\infty \omega_1^{m_s-\frac{m_f}{2}-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m_fr_1^2}{\omega_1(1-\rho_f)} - \frac{m_s\omega_1^2}{\Theta_1(1-\rho_s)}\right) \times \int_0^\infty \omega_2^{m_s-\frac{m_f}{2}-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m_fr_2^2}{\omega_2(1-\rho_f)} - \frac{m_s\omega_2^2}{\Theta_2(1-\rho_s)}\right) \times I_{m_f-1}\left(\frac{2m_fr_1r_2\sqrt{\rho_f}}{(1-\rho_f)\sqrt{\omega_1\omega_2}}\right) I_{m_s-1}\left(\frac{2m_s\omega_1\omega_2\sqrt{\rho_s}}{(1-\rho_s)\sqrt{\Theta_1\Theta_2}}\right) d\omega_2 d\omega_1 \quad (2.8)$$

a qual representa a FDP conjunta Nakagami- m_f /Nakagami- m_s entre duas variáveis Nakagami R_1 e R_2 correlacionadas quando as suas respectivas potências são correlacionadas e apresentam comportamento aleatório representado por uma FDP Nakagami conjunta.

2.3 A FDC Conjunta Nakagami- m_f /Nakagami- m_s

A função de distribuição cumulativa (FDC) conjunta de duas variáveis Nakagami R_1 e R_2 quando as suas respectivas potências médias Ω_1 e Ω_2 são aleatórias pode ser representada por uma FDC condicionada escrita como [26, eq. (7)]

$$F_{R_1, R_2}(r_1, r_2|\omega_1, \omega_2) = \frac{(1-\rho_f)^{m_f}}{\Gamma(m_f)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho_f^k}{k!\Gamma(m_f+k)} \gamma\left(m_f+k, \frac{m_fr_1^2}{\omega_1(1-\rho_f)}\right) \times \gamma\left(m_f+k, \frac{m_fr_2^2}{\omega_2(1-\rho_f)}\right) \quad (2.9)$$

na qual $\gamma(\cdot, \cdot)$ representa a função Gamma incompleta inferior [27, eq. (8.350.1)]. Pode ser visto em (2.9) que as variáveis Nakagami- m_f R_1 e R_2 estão caracterizadas pelo mesmo fator de desvanecimento m_f . Uma expressão para a FDC Nakagami conjunta das variáveis R_1 e R_2 descondicionada das variáveis Ω_1 e Ω_2 pode ser obtida

observando que

$$\begin{aligned}
F_{R_1, R_2}(r_1, r_2) &= \int_0^{r_2} \int_0^{r_1} f_{R_1, R_2}(r_1, r_2) dr_1 dr_2 \\
&= \int_0^{r_2} \int_0^{r_1} \int_0^\infty \int_0^\infty f_{R_1, R_2}(r_1, r_2 | \omega_1, \omega_2) f_{\Omega_1, \Omega_2}(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 dr_1 dr_2 \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty F_{R_1, R_2}(r_1, r_2 | \omega_1, \omega_2) f_{\Omega_1, \Omega_2}(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2. \tag{2.10}
\end{aligned}$$

Como deseja-se representar a FDC Nakagami conjunta entre duas variáveis R_1 e R_2 quando as suas respectivas potências médias Ω_1 e Ω_2 são aleatórias e caracterizadas por uma distribuição Nakagami conjunta, isto pode ser realizado substituindo-se (2.9) e (2.7) em (2.10). Após algumas simplificações algébricas a FDC conjunta correlacionada do modelo de canal Nakagami- m_f /Nakagami- m_s é obtida como

$$\begin{aligned}
F_{R_1, R_2}(r_1, r_2) &= \frac{4m_s^{m_s+1}(1-\rho_f)^{m_f}}{\Gamma(m_f)\Gamma(m_s)\Theta_1\Theta_2(1-\rho_s)(\sqrt{\Theta_1\Theta_2\rho_s})^{m_s-1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho_f^k}{k!\Gamma(m_f+k)} \\
&\times \int_0^\infty \omega_1^{m_s} \exp\left(-\frac{m_s\omega_1^2}{\Theta_1(1-\rho_s)}\right) \gamma\left(m_f+k, \frac{m_fr_1^2}{\omega_1(1-\rho_f)}\right) \\
&\times \int_0^\infty \omega_2^{m_s} \exp\left(-\frac{m_s\omega_2^2}{\Theta_2(1-\rho_s)}\right) \gamma\left(m_f+k, \frac{m_fr_2^2}{\omega_2(1-\rho_f)}\right) \\
&\times I_{m_s-1}\left(\frac{2m_s\omega_1\omega_2\sqrt{\rho_s}}{(1-\rho_s)\sqrt{\Theta_1\Theta_2}}\right) d\omega_2 d\omega_1. \tag{2.11}
\end{aligned}$$

2.4 Probabilidade de Indisponibilidade

A probabilidade de indisponibilidade é definida como a probabilidade do sinal recebido estar abaixo de um determinado limiar [18, 20, 22] e, portanto, pode ser utilizada para análise de cobertura, por exemplo. Considerando esse limiar γ igual a RSR instantânea Ξ_i , $i = 1, 2$, $P_o(\gamma)$ pode ser interpretada como a OP do sinal recebido propagando-se em um canal de desvanecimento Nakagami- m_f com sombreamento Nakagami- m_s ser menor do que Ξ_i , sendo i cada um dos dois ramos de diversidade considerados. A partir de (2.11), reescrevendo $F_{R_1, R_2}(r_1, r_2)$ como $F_{\Xi_1, \Xi_2}(\xi_1, \xi_2)$ para $\Xi_i = R_i^2 E_b/N_0$, $i = 1, 2$, obtém-se

$$\begin{aligned}
P_o(\gamma) = F_{\Xi_1, \Xi_2}(\xi_1, \xi_2) &= \frac{4m_s^{m_s+1}(1-\rho_f)^{m_f}}{\Gamma(m_f)\Gamma(m_s)\Theta_1\Theta_2(1-\rho_s)(\sqrt{\Theta_1\Theta_2\rho_s})^{m_s-1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho_f^k}{k!\Gamma(m_f+k)} \\
&\times \int_0^\infty \omega_1^{m_s} \exp\left(-\frac{m_s\omega_1^2}{\Theta_1(1-\rho_s)}\right) \gamma\left(m_f+k, \frac{m_f\gamma}{\omega_1(1-\rho_f)}\right) \\
&\times \int_0^\infty \omega_2^{m_s} \exp\left(-\frac{m_s\omega_2^2}{\Theta_2(1-\rho_s)}\right) \gamma\left(m_f+k, \frac{m_f\gamma}{\omega_2(1-\rho_f)}\right) \\
&\times I_{m_s-1}\left(\frac{2m_s\omega_1\omega_2\sqrt{\rho_s}}{(1-\rho_s)\sqrt{\Theta_1\Theta_2}}\right) d\omega_2 d\omega_1 \tag{2.12}
\end{aligned}$$

na qual admite-se que $\xi_1 = \xi_2 = \gamma$. A equação (2.12) é de fato a expressão de cálculo da probabilidade de indisponibilidade $P_o(\gamma)$ na saída de um SC.

2.5 Resultados Numéricos

Nesta seção, os resultados numéricos apresentados têm como objetivo investigar o impacto dos parâmetros característicos do modelo no desempenho do sistema em termos de probabilidade de indisponibilidade. Nos gráficos apresentados, as linhas, contínuas ou tracejadas, representam os resultados teóricos obtidos nesta dissertação e os símbolos representam os pontos de simulações.

As simulações foram implementadas utilizando-se o MATLAB conforme código apresentado no Apêndice A com o seguinte algoritmo:

1. Informados os parâmetros m_f , m_s , λ_f , λ_s e o número n de amostras desejado, calcular o desvio padrão $\sigma_{1s} = \sigma_{2s} = \sqrt{1/(2m_s)}$;
2. Definir uma matriz de covariância $\Sigma_{4m_s \times 4m_s}$ a partir dos valores de σ_{1s} , σ_{2s} e de λ_s ;
3. Calcular a matriz triangular inferior que representa a matriz fator de Cholesky da matriz $\Sigma_{4m_s \times 4m_s}$;
4. Gerar uma matriz $A_{4m_s \times n}$ de variáveis Gaussianas correlacionadas, cujos desvios padrões são $\sigma_{1s} = \sigma_{2s}$;
5. Calcular $\Omega_1^2 = \sum_{i=1}^{2m_s} a_{ij}^2$ e $\Omega_2^2 = \sum_{i=2m_s+1}^{4m_s} a_{ij}^2$, sendo a_{ij} os elementos da matriz $A_{4m_s \times n}$ gerada no passo anterior;
6. Determinar os desvios padrões $\sigma_{1f} = \sqrt{\Omega_1/(2m_f)}$ e $\sigma_{2f} = \sqrt{\Omega_2/(2m_f)}$;
7. Definir uma matriz de covariância $\Sigma_{4m_f \times 4m_f}$ a partir dos valores de σ_{1f} , σ_{2f} e de λ_f ;
8. Calcular a matriz triangular inferior fator de Cholesky da matriz $\Sigma_{4m_f \times 4m_f}$;
9. Gerar a matriz $B_{4m_f \times n}$ de variáveis Gaussianas correlacionadas, cujos desvios padrões são σ_{1f} para b_{ij} com $i \leq 2m_f$ e σ_{2f} para b_{ij} com $2m_f + 1 \leq i \leq 4m_f$;
10. Calcular $R_1^2 = \sum_{i=1}^{2m_f} b_{ij}^2$ e $R_2^2 = \sum_{i=2m_f+1}^{4m_f} b_{ij}^2$, sendo b_{ij} os elementos da matriz $B_{4m_f \times n}$ gerada no passo anterior.

Foram geradas para cada ponto de simulação 10^7 amostras correlacionadas. Sem perda de generalidade, admite-se que o ganho médio de potência do sombreado no canal é unitário, ou seja, $\Theta_1 = \mathbb{E}(\Omega_1^2) = \Theta_2 = \mathbb{E}(\Omega_2^2) = 1$.

A Figura 2.2 apresenta a probabilidade de indisponibilidade teórica em função do limiar de RSR instantânea, a partir de (2.12), e os pontos simulados, para diferentes valores de coeficientes de correlação ρ_f e ρ_s , e variando-se os valores de $m_f = m_s$. As curvas em linha contínua foram obtidas por meio da escolha de valores $\rho_f = \rho_s = 0$, permitindo interpretar o resultado no cenário em que não existe qualquer dependência entre R_1 , R_2 , Ω_1 e Ω_2 , ou seja desvanecimento e sombreado independentes. Primeiramente, observar que os pontos simulados estão de acordo com as curvas teóricas, confirmando o correto procedimento nas deduções matemáticas e a precisão da simulação desenvolvida. O aumento dos parâmetros m_f e m_s contribui positivamente para o desempenho do sistema, ou seja a probabilidade de indisponibilidade é menor à medida que m_f e m_s aumentam, para um mesmo valor de limiar de RSR instantânea. Este resultado está de acordo com o esperado uma vez que, a definição do parâmetro m na distribuição Nakagami é o inverso da variância normalizada da

variável aleatória. Ou seja, o aumento do respectivo fator, por exemplo m_s , significa a redução da variância normalizada de ambas as variáveis aleatórias Ω_1 e Ω_2 em torno das suas respectivas potências médias Θ_1 e Θ_2 as quais, na Figura 2.2, são iguais a 1. Claramente a existência de correlação impacta negativamente no desempenho do sistema, resultando em um aumento da probabilidade de indisponibilidade. Este impacto negativo é maior para valores maiores de m_f e m_s , ou de maneira semelhante, quando o desvanecimento é menos severo.

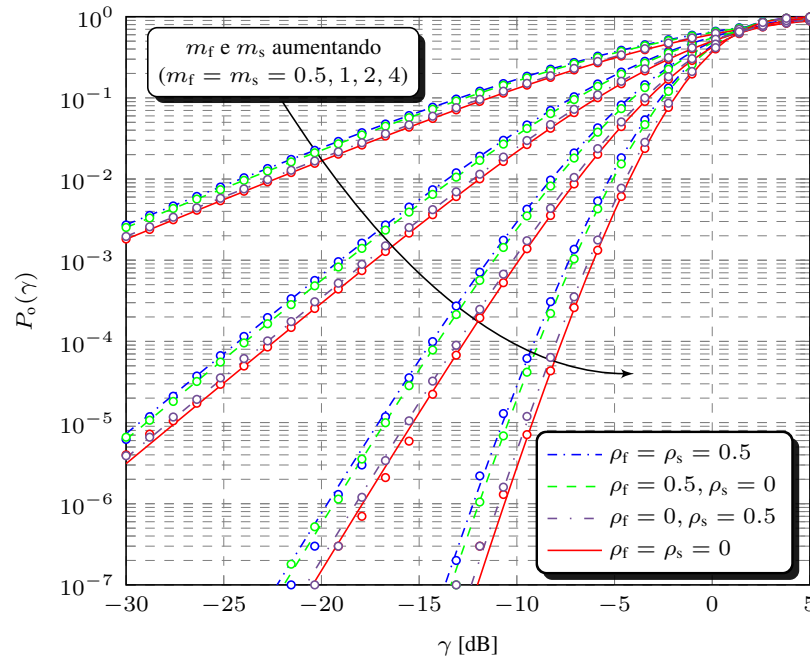


Figura 2.2: A influência de ρ_f e ρ_s sobre a probabilidade de indisponibilidade em canal com desvanecimento sombreado duplamente correlacionado Nakagami- m_f /Nakagami- m_s .

Na Figura 2.3 os fatores de desvanecimento e sombreamento m_f e m_s são variados e os coeficientes de correlação ρ_f e ρ_s são mantidos constantes. A partir da Figura 2.3 é possível avaliar a influência isolada dos fatores m_f e m_s sobre o desempenho do sistema. O fator m_f referente ao desvanecimento tem maior impacto sobre o desempenho do sistema do que o fator m_s referente ao sombreamento. Notar o reduzido impacto da variação do fator de sombreamento m_s sob o cenário de desvanecimento severo ($m_f = 0.5$). Já o impacto da variação do parâmetro de desvanecimento m_f é significativamente maior sob sombreamento severo ($m_s = 0.5$). Portanto, embora o aumento dos fatores m_f e m_s seja benéfico para o desempenho do sistema, o aumento do fator m_f referente ao desvanecimento tem maior influência do que o fator m_s referente ao sombreamento.

A Figura 2.4 contém a probabilidade de indisponibilidade em função dos parâmetros de correlação ρ_f e ρ_s para distintos valores de $m_f = m_s$ e limiar de RSR instantânea igual a -10 dB. A correlação entre os sinais recebidos por ambos os ramos de diversidade contribui negativamente para o desempenho do sistema pois a probabilidade da RSR instantânea ocorrer aumenta conforme a correlação aumenta, seja ela referente ao desvanecimento ou ao sombreamento.

As estatísticas conjuntas (FDP e FDC), embora representadas por meio de uma

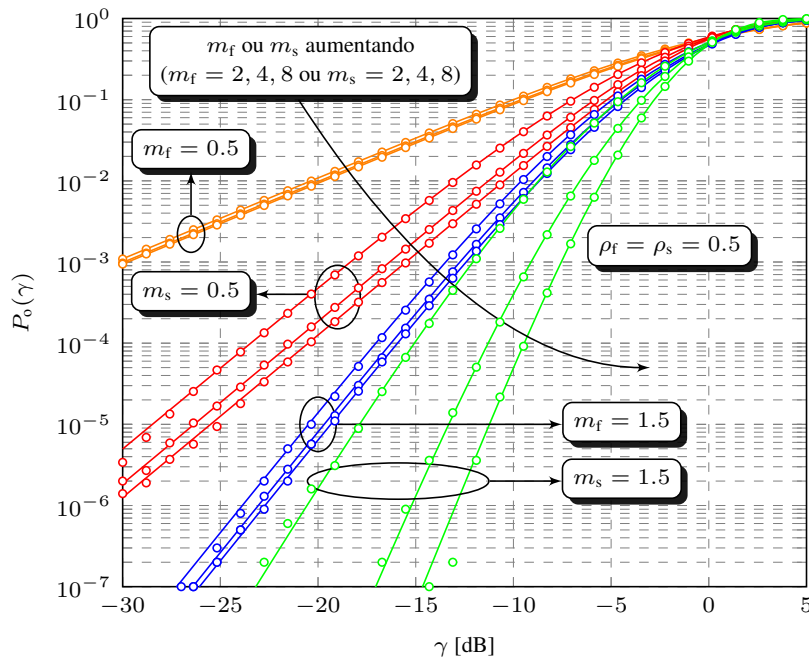


Figura 2.3: A influência de m_f e m_s sobre a probabilidade de indisponibilidade em canal com desvanecimento sombreado duplamente correlacionado Nakagami- m_f /Nakagami- m_s .

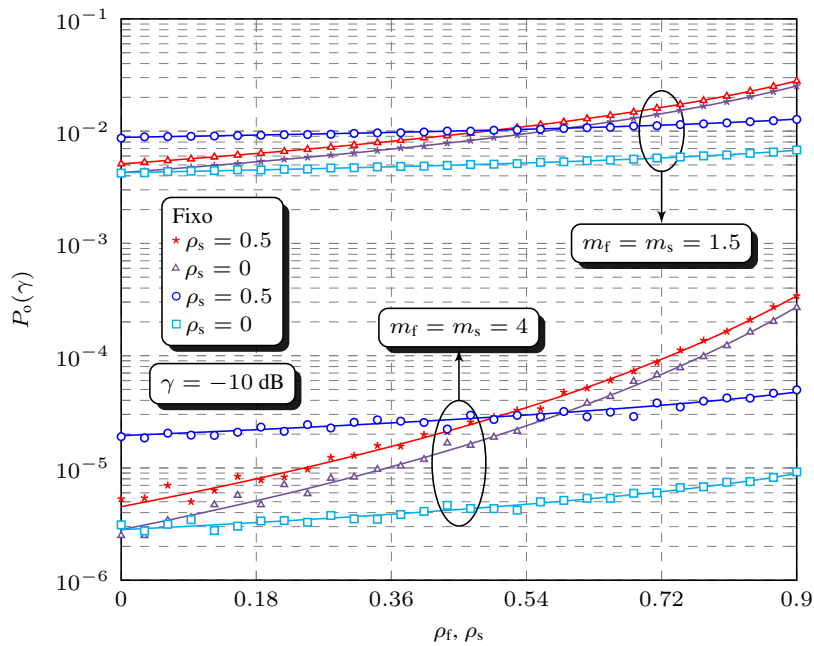


Figura 2.4: A influência de ρ_f e ρ_s sobre a probabilidade de indisponibilidade em canal com desvanecimento sombreado duplamente correlacionado Nakagami- m_f /Nakagami- m_s .

série infinita, convergem de maneira rápida para um dado valor prático de precisão. O mesmo aplica-se à probabilidade de indisponibilidade. Como exemplo, a Tabela 2.1 fornece o número de termos K de (2.12) considerando sete casas decimais de precisão e para vários valores de m_f , m_s , ρ_f e ρ_s , para um valor fixo de γ tal que, $\gamma = -10$ dB. Note que, de uma maneira geral, o número de termos necessários na série é pequeno. De maneira particular, perceba que o número de termos cresce com o aumento de ρ_f .

Tabela 2.1: Número de termos em (2.12) necessários para sete casas decimais de precisão.

m_f	m_s	ρ_f	ρ_s	K
0.5	0.5	0	0.7	2
		0	0.9	2
0.5	0.5	0.7	0	14
		0.9	0	37
0.5	0.5	0.3	0.9	7
1	2			4
2	1	0.9	0.3	9

2.6 Conclusões

Neste Capítulo, o canal de desvanecimento Nakagami com dupla diversidade foi analisado admitindo-se a existência de sombreamento Nakagami com efeito na aleatoriedade da potência média em cada um dos ramos de diversidade. Foi possível obter resultados teóricos e provenientes de simulações que concordam satisfatoriamente. Foram obtidas estatísticas conjuntas como função densidade de probabilidade e função de distribuição cumulativa, e a probabilidade de indisponibilidade. Demonstrou-se que a inclusão do sombreamento resulta em uma queda no desempenho. Os resultados demonstraram a influência negativa de ambos os coeficientes de correlação no desempenho do sistema.

Capítulo 3

Canal de Desvanecimento Sombreado Duplamente Correlacionado α - μ /Gama

O modelo de canal de desvanecimento α - μ foi formalmente proposto em [10] trazendo as vantagens de incluir as distribuições Nakagami- m , Weibull, Gaussiana unilateral, Rayleigh e exponencial negativa como casos particulares. Em [10], são apresentadas algumas estatísticas conjuntas e marginais da distribuição α - μ como FDP, FDC, momentos e coeficiente de correlação. Um dos motivadores para o estudo do canal de desvanecimento α - μ é que, dependendo do comprimento de onda utilizado, podem existir elementos dentro do meio de propagação das ondas eletromagnéticas que tornam inadequada a suposição de um campo de espalhamento difuso [5]. Em adição, como motivador para a modelagem do sombreado por meio da distribuição Gama em detrimento da distribuição lognormal, pode-se citar a possível derivação de outras distribuições a partir da distribuição Gama e a sua tratabilidade matemática como mostrado em [15, 16, 28–33]. Com o intuito de atender aos sistemas de comunicação que utilizam técnicas de diversidade, optou-se por distribuições α - μ e Gama bivariáveis. Por fim, seguindo a estratégia presente em [16] e [28, eq. (7)] para a modelagem de canais de desvanecimento sombreado multiplicativo, o modelo de desvanecimento sombreado multiplicativo α - μ /Gama será apresentado nas secções seguintes. Os resultados aqui encontrados podem ser comparados com os resultados em [29]. A estrutura utilizada destina-se a explicar o modelo físico, deduzir algumas das suas estatísticas com ênfase no coeficiente de correlação, apresentar o algoritmo utilizado nas simulações para comprovação dos resultados teóricos e analisar o desempenho de um sistema de comunicações sem fio operando sobre tal canal por meio da métrica de OP.

3.1 O Modelo Físico

Sejam R_1 e R_2 duas envoltórias α - μ [10], representativas do fenômeno de desvanecimento plano sombreado, dadas por

$$R_1^{\alpha_1} = \Omega_1 \sum_{i=1}^{2\mu} X_i^2 \quad (3.1a)$$

$$R_2^{\alpha_2} = \Omega_2 \sum_{i=1}^{2\mu} Y_i^2 \quad (3.1b)$$

com parâmetros (α_1, μ) e (α_2, μ) , respectivamente. O parâmetro $\mu > 0$ é o inverso da variância normalizada de $R_i^{\alpha_i}$ e os parâmetros α_i representam a não-linearidade do meio de propagação, $i = 1, 2$. As variáveis X_i e Y_i são processos Gaussianos mutuamente independentes com médias nulas e variâncias σ_f^2 tais que, $2\mu\sigma_f^2 = 1$. Em termos matemáticos $\mathbb{C}(X_k, X_j) = \mathbb{C}(Y_k, Y_j) = 0$ para $k \neq j$, $\mathbb{C}(X_k, X_j) = \sigma_f^2$ e $\mathbb{C}(Y_k, Y_j) = \sigma_f^2$ para $k = j$, sendo $\mathbb{C}(\cdot, \cdot)$ o operador covariância. Admite-se correlação entre os processos X_k e Y_j para $k = j$ de maneira que o coeficiente de correlação é definido como

$$\lambda_f = \frac{\mathbb{C}(X_k, Y_j)}{\sigma_f^2} \delta_{kj}, \quad (3.2)$$

$-1 < \lambda_f < 1$, δ_{kj} é o delta de Kronecker tal que $\delta_{kj} = 1$ se $k = j$ e $\delta_{kj} = 0$ se $k \neq j$. Por fim, tem-se que $\rho_f = \lambda_f^2$ [10, 23] e o subíndice f denota os parâmetros relacionados ao desvanecimento. A Figura 3.1 mostra o padrão de correlação em uma perspectiva gráfica.

$$\begin{array}{cccccc} R_1^{\alpha_1} = \Omega_1 (X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_{2\mu}^2) & & & & & \\ \updownarrow \rho & \updownarrow \rho_s & \updownarrow \lambda_f & \updownarrow \lambda_f & \updownarrow \lambda_f & \\ R_2^{\alpha_2} = \Omega_2 (Y_1^2 + Y_2^2 + \cdots + Y_{2\mu}^2) & & & & & \end{array}$$

Figura 3.1: *Perspectiva gráfica do padrão de correlação no canal de desvanecimento sombreado α - μ /Gama duplamente correlacionado.*

Em (3.1), Ω_1 e Ω_2 são variáveis aleatórias representativas do fenômeno de desvanecimento de longo prazo caracterizando o sombreado. Admitindo que o comportamento aleatório destas variáveis pode ser representado por uma distribuição Gama bivariável, determina-se que [9]

$$\Omega_1 = \sum_{i=1}^{2m} W_i^2 \quad (3.3a)$$

$$\Omega_2 = \sum_{i=1}^{2m} Z_i^2 \quad (3.3b)$$

em que Ω_1 e Ω_2 têm parâmetros (m, Θ_1) e (m, Θ_2) , respectivamente. O parâmetro $m > 0$ também é definido como o inverso da variância normalizada de Ω_i , $i = 1, 2$. As variáveis W_i e Z_i são processos Gaussianos mutuamente independentes com médias nulas e variâncias $\sigma_{W_s}^2$ ou $\sigma_{Z_s}^2$, respectivamente. Em termos matemáticos $\mathbb{C}(W_k, W_j) = \mathbb{C}(Z_k, Z_j) = 0$ para $k \neq j$, $\mathbb{C}(W_k, W_j) = \sigma_{W_s}^2$ e $\mathbb{C}(Z_k, Z_j) = \sigma_{Z_s}^2$ para $k = j$. Admitese correlação para o sombreamento entre os processos W_k e Z_j para $k = j$, gerando assim, naturalmente, uma correlação entre os processos Gama Ω_1 e Ω_2 . Logo, define-se o coeficiente de correlação

$$\lambda_s = \frac{\mathbb{C}(W_k, Z_j)}{\sqrt{\sigma_{W_s}^2 \sigma_{Z_s}^2}} \delta_{kj}, \quad (3.4)$$

$-1 < \lambda_s < 1$. O coeficiente de correlação entre as variáveis Gama Ω_1 e Ω_2 é dado por $\rho_s = \lambda_s^2$. Os parâmetros $\Theta_1 = \mathbb{E}(\Omega_1) = 2m\sigma_{W_s}^2$ e $\Theta_2 = \mathbb{E}(\Omega_2) = 2m\sigma_{Z_s}^2$ denotam os valores médios dos processos Ω_1 e Ω_2 , respectivamente, e o subíndice s denota os parâmetros relacionados ao sombreamento.

3.2 A FDP Conjunta α - μ /Gama

A FDP conjunta entre duas variáveis α - μ , R_1 e R_2 , condicionadas em relação às suas respectivas potências médias pode ser representada por [26, eq. (1)]

$$\begin{aligned} f_{R_1, R_2}(r_1, r_2 | \Omega_1 = \omega_1, \Omega_2 = \omega_2) &= \frac{\alpha_1 \alpha_2 \mu^{\mu+1} r_1^{\frac{\alpha_1}{2}(\mu+1)-1} r_2^{\frac{\alpha_2}{2}(\mu+1)-1}}{\Gamma(\mu) \omega_1 \omega_2 (1 - \rho_f) (\sqrt{\rho_f \omega_1 \omega_2})^{\mu-1}} \\ &\times \exp \left[-\frac{\mu}{1 - \rho_f} \left(\frac{r_1^{\alpha_1}}{\omega_1} + \frac{r_2^{\alpha_2}}{\omega_2} \right) \right] I_{\mu-1} \left(\frac{2\mu \sqrt{r_1^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2} \rho_f}}{(1 - \rho_f) \sqrt{\omega_1 \omega_2}} \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

na qual os parâmetros α_1 e α_2 denotam a não-linearidade do meio, $\Omega_1 = \mathbb{E}(R_1^{\alpha_1})$ e $\Omega_2 = \mathbb{E}(R_2^{\alpha_2})$, ρ_f representa o coeficiente de correlação entre $R_1^{\alpha_1}$ e $R_2^{\alpha_2}$ e μ representa o inverso da variância normalizada de $R_1^{\alpha_1}$ e $R_2^{\alpha_2}$. Fisicamente, o parâmetro μ representa o número de *clusters* de multipercurso. A expressão (3.5) é obtida seguindo o procedimento padrão de transformação de variáveis aplicado à [26, eq. (1)] fazendo $R_{iN}^2 = R_i^{\alpha_i}$, sendo o subíndice N referente à variável Nakagami [6].

Como pode ser visto em (3.5), ambas as variáveis R_1 e R_2 estão caracterizadas pelo mesmo parâmetro μ [26]. Os parâmetros ρ_f e μ são determinísticos enquanto as variáveis Ω_1 e Ω_2 são aleatórias. Esta estratégia permite representar a influência do sombreamento multiplicativo sobre um canal de desvanecimento α - μ por meio da aleatoriedade das potências médias. O mesmo método foi adotado para distribuições univariáveis em [15–17, 19, 28] e para distribuições bivariáveis em [21, 29–33].

Utilizando (3.5), é possível determinar a FDP conjunta das variáveis R_1 e R_2 como [16, eq. (3)]

$$f_{R_1, R_2}(r_1, r_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty f_{R_1, R_2}(r_1, r_2 | \omega_1, \omega_2) f_{\Omega_1, \Omega_2}(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \quad (3.6)$$

em que $f_{\Omega_1, \Omega_2}(\omega_1, \omega_2)$ representa a FDP conjunta entre Ω_1 e Ω_2 . Como deseja-se analisar a influência de um sombreamento Gama sobre um canal de desvanecimento α - μ

com diversidade, tal sombreamento pode ser caracterizado por [34, eq. (3)]

$$f_{\Omega_1, \Omega_2}(\omega_1, \omega_2) = \frac{m^{m+1}(\omega_1\omega_2)^{\frac{m-1}{2}} \exp\left(-\frac{m\omega_1}{\Theta_1(1-\rho_s)} - \frac{m\omega_2}{\Theta_2(1-\rho_s)}\right)}{\Gamma(m)\Theta_1\Theta_2(1-\rho_s)(\sqrt{\Theta_1\Theta_2\rho_s})^{m-1}} \\ \times I_{m-1}\left(\frac{2m\sqrt{\omega_1\omega_2\rho_s}}{(1-\rho_s)\sqrt{\Theta_1\Theta_2}}\right). \quad (3.7)$$

Como pode ser visto em (3.7), as variáveis Ω_1 e Ω_2 estão condicionadas ao mesmo parâmetro m , o qual é o inverso da variância normalizada de Ω_i , $i = 1, 2$. Além disso, ρ_s representa o coeficiente de correlação entre Ω_1 e Ω_2 .

Substituindo (3.5) e (3.7) em (3.6) e reescrevendo $I_\nu(\cdot)$ com o auxílio de [27, eq. (8.445)]

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\Gamma(\nu+k+1)}, \quad (3.8)$$

obtém-se

$$f_{R_1, R_2}(r_1, r_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha_1\alpha_2\mu^{\mu+1}r_1^{\frac{\alpha_1}{2}(\mu+1)-1}r_2^{\frac{\alpha_2}{2}(\mu+1)-1}}{\Gamma(\mu)\omega_1\omega_2(1-\rho_f)(\sqrt{\rho_f\omega_1\omega_2})^{\mu-1}} \\ \times \exp\left[-\frac{\mu}{1-\rho_f}\left(\frac{r_1^{\alpha_1}}{\omega_1} + \frac{r_2^{\alpha_2}}{\omega_2}\right)\right] \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\mu\sqrt{r_1^{\alpha_1}r_2^{\alpha_2}\rho_f}}{(1-\rho_f)\sqrt{\omega_1\omega_2}}\right)^{\mu+2l-1} m^{m+1}(\omega_1\omega_2)^{\frac{m-1}{2}}}{l!\Gamma(\mu+l)\Gamma(m)\Theta_1\Theta_2} \\ \times \frac{\exp\left(-\frac{m\omega_1}{\Theta_1(1-\rho_s)} - \frac{m\omega_2}{\Theta_2(1-\rho_s)}\right)}{(1-\rho_s)(\sqrt{\Theta_1\Theta_2\rho_s})^{m-1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{m\sqrt{\omega_1\omega_2\rho_s}}{(1-\rho_s)\sqrt{\Theta_1\Theta_2}}\right)^{m+2k-1}}{k!\Gamma(m+k)} d\omega_1 d\omega_2. \quad (3.9)$$

Alterando a ordem de integração em (3.9) e separando as variáveis dos termos constantes tem-se

$$f_{R_1, R_2}(r_1, r_2) = \frac{\alpha_1\alpha_2\mu^{\mu+1}m^{m+1}r_1^{\frac{\alpha_1}{2}(\mu+1)-1}r_2^{\frac{\alpha_2}{2}(\mu+1)-1}}{\Gamma(\mu)\Gamma(m)(1-\rho_f)(1-\rho_s)(\sqrt{\rho_f})^{\mu-1}(\sqrt{\Theta_1\Theta_2\rho_s})^{m-1}\Theta_1\Theta_2} \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{m\sqrt{\rho_s}}{(1-\rho_s)\sqrt{\Theta_1\Theta_2}}\right]^{m+2k-1}}{k!\Gamma(m+k)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\mu\sqrt{r_1^{\alpha_1}r_2^{\alpha_2}\rho_f}}{1-\rho_f}\right)^{\mu+2l-1}}{l!\Gamma(\mu+l)} \\ \times \int_0^\infty \omega_1^{m-\mu+k-l-1} \exp\left(-\frac{\mu r_1^{\alpha_1}}{\omega_1(1-\rho_f)} - \frac{m\omega_1}{\Theta_1(1-\rho_s)}\right) d\omega_1 \\ \times \int_0^\infty \omega_2^{m-\mu+k-l-1} \exp\left(-\frac{\mu r_2^{\alpha_2}}{\omega_2(1-\rho_f)} - \frac{m\omega_2}{\Theta_2(1-\rho_s)}\right) d\omega_2 \quad (3.10)$$

a qual, pode ser resolvida utilizando [27, eq. (3.471.9)], obtendo-se

$$\begin{aligned}
 f_{R_1, R_2}(r_1, r_2) = & \frac{4\alpha_1\alpha_2\mu^{\mu+m}m^{\mu+m}r_1^{\alpha_1\frac{\mu+m}{2}-1}r_2^{\alpha_2\frac{\mu+m}{2}-1}}{\Gamma(\mu)\Gamma(m)(1-\rho_f)^m(1-\rho_s)^\mu\Theta_1^{\frac{\mu+m}{2}}\Theta_2^{\frac{\mu+m}{2}}}\sum_{k,l=0}^{\infty}\frac{\rho_f^l\rho_s^k}{k!l!\Gamma(m+k)\Gamma(\mu+l)} \\
 & \times \left[\frac{\mu m}{(1-\rho_f)(1-\rho_s)}\sqrt{\frac{r_1^{\alpha_1}r_2^{\alpha_2}}{\Theta_1\Theta_2}} \right]^{k+l} K_{m-\mu+k-l}\left(2\sqrt{\frac{\mu m r_1^{\alpha_1}}{\Theta_1(1-\rho_f)(1-\rho_s)}}\right) \\
 & \times K_{m-\mu+k-l}\left(2\sqrt{\frac{\mu m r_2^{\alpha_2}}{\Theta_2(1-\rho_f)(1-\rho_s)}}\right), \tag{3.11}
 \end{aligned}$$

após algumas simplificações algébricas. Em (3.11) $K_\nu(\cdot)$ é a função de Bessel modificada de segundo tipo e ordem ν [7, eq. (9.6.4)]. A expressão em (3.11) representa a FDP conjunta α - μ /Gama entre duas variáveis α - μ , R_1 e R_2 , correlacionadas quando as suas respectivas potências médias estão também correlacionadas e apresentam comportamento aleatório representado por uma FDP conjunta Gama.

3.3 A FDC Conjunta α - μ /Gama

A FDC conjunta entre duas variáveis, R_1 e R_2 , representada por $F_{R_1, R_2}(r_1, r_2) = P[R_1 \leq r_1, R_2 \leq r_2]$ [35, eq. (5.8)] é a probabilidade do evento $\{R_1 \leq r_1\} \cap \{R_2 \leq r_2\}$. Dessa forma, a FDC conjunta entre duas variáveis, R_1 e R_2 , cujas respectivas potências médias Ω_1 e Ω_2 são aleatórias e representadas por uma distribuição Gama bivariável pode ser calculada a partir da FDP conjunta dada em (3.11) como

$$F_{R_1, R_2}(r_1, r_2) = \int_0^{r_2} \int_0^{r_1} f_{R_1, R_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \tag{3.12}$$

Substituindo-se (3.11) em (3.12) e utilizando a substituição $x_i = r_i t_i^{1/\alpha_i}$, da qual resulta que se $x_i \rightarrow 0$, então $t_i \rightarrow 0$ e se $x_i \rightarrow r_i$, então $t_i \rightarrow 1$, $i = 1, 2$, obtém-se

$$\begin{aligned}
 F_{R_1, R_2}(r_1, r_2) = & \int_0^1 \int_0^1 \frac{4\alpha_1\alpha_2\mu^{\mu+m}m^{\mu+m}\left(r_1 t_1^{\frac{1}{\alpha_1}}\right)^{\alpha_1\frac{\mu+m}{2}-1}\left(r_2 t_2^{\frac{1}{\alpha_2}}\right)^{\alpha_2\frac{\mu+m}{2}-1}}{\Gamma(\mu)\Gamma(m)(1-\rho_f)^m(1-\rho_s)^\mu\Theta_1^{\frac{\mu+m}{2}}\Theta_2^{\frac{\mu+m}{2}}} \\
 & \times \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{\rho_f^l\rho_s^k}{k!l!\Gamma(m+k)\Gamma(\mu+l)} \left[\frac{\mu m}{(1-\rho_f)(1-\rho_s)}\sqrt{\frac{\left(r_1 t_1^{\frac{1}{\alpha_1}}\right)^{\alpha_1}\left(r_2 t_2^{\frac{1}{\alpha_2}}\right)^{\alpha_2}}{\Theta_1\Theta_2}} \right]^{k+l} \\
 & \times K_{m-\mu+k-l}\left(2\sqrt{\frac{\mu m \left(r_1 t_1^{\frac{1}{\alpha_1}}\right)^{\alpha_1}}{\Theta_1(1-\rho_f)(1-\rho_s)}}\right)
 \end{aligned}$$

$$\times K_{m-\mu+k-l} \left(2 \sqrt{\frac{\mu m \left(r_2 t_2^{\frac{1}{\alpha_2}} \right)^{\alpha_2}}{\Theta_2(1-\rho_f)(1-\rho_s)}} \right) \frac{r_1 t_1^{\frac{1}{\alpha_1}-1}}{\alpha_1} dt_1 \frac{r_2 t_2^{\frac{1}{\alpha_2}-1}}{\alpha_2} dt_2. \quad (3.13)$$

Alterando a ordem de integração em (3.13) e separando as variáveis dos termos constantes tem-se

$$\begin{aligned} F_{R_1, R_2}(r_1, r_2) &= \frac{4\mu^{\mu+m} m^{\mu+m} (r_1)^{\alpha_1 \frac{\mu+m}{2}} (r_2)^{\alpha_2 \frac{\mu+m}{2}}}{\Gamma(\mu)\Gamma(m)(1-\rho_f)^m(1-\rho_s)^\mu \Theta_1^{\frac{\mu+m}{2}} \Theta_2^{\frac{\mu+m}{2}}} \\ &\times \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{\rho_f^l \rho_s^k}{k!l!\Gamma(m+k)\Gamma(\mu+l)} \left[\frac{\mu m}{(1-\rho_f)(1-\rho_s)} \sqrt{\frac{r_1^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2}}{\Theta_1 \Theta_2}} \right]^{k+l} \\ &\times \int_0^1 t_1^{\frac{\mu+m+k+l}{2}-1} K_{m-\mu+k-l} \left(2 \sqrt{\frac{\mu m r_1^{\alpha_1} t_1}{\Theta_1(1-\rho_f)(1-\rho_s)}} \right) dt_1 \\ &\times \int_0^1 t_2^{\frac{\mu+m+k+l}{2}-1} K_{m-\mu+k-l} \left(2 \sqrt{\frac{\mu m r_2^{\alpha_2} t_2}{\Theta_2(1-\rho_f)(1-\rho_s)}} \right) dt_2. \quad (3.14) \end{aligned}$$

Por fim, utilizando [27, eq. (6.592.2)] e após algumas simplificações algébricas obtém-se

$$\begin{aligned} F_{R_1, R_2}(r_1, r_2) &= \frac{\mu^{2\mu} m^{2\mu} r_1^{\alpha_1 \mu} r_2^{\alpha_2 \mu}}{\Gamma(\mu)\Gamma(m)(1-\rho_f)^\mu(1-\rho_s)^{2\mu-m} \Theta_1^\mu \Theta_2^\mu} \\ &\times \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{\rho_f^l \rho_s^k}{k!l!\Gamma(m+k)\Gamma(\mu+l)} \left[\frac{\mu m}{(1-\rho_f)(1-\rho_s)} \sqrt{\frac{r_1^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2}}{\Theta_1 \Theta_2}} \right]^{2l} \\ &\times G_{1,3}^{2,1} \left(\frac{\mu m r_1^{\alpha_1}}{\Theta_1(1-\rho_f)(1-\rho_s)} \left|_{m-\mu+k-l, 0, -\mu-l}^{1-\mu-l} \right. \right) \\ &\times G_{1,3}^{2,1} \left(\frac{\mu m r_2^{\alpha_2}}{\Theta_2(1-\rho_f)(1-\rho_s)} \left|_{m-\mu+k-l, 0, -\mu-l}^{1-\mu-l} \right. \right) \quad (3.15) \end{aligned}$$

na qual $G_{p,q}^{m,n}(\cdot|\cdot)$ representa a função G de Meijer [27, eq. (9.301)]. O Apêndice B fornece alguns detalhes adicionais relacionados à função G de Meijer. Esta função está disponível nos principais *softwares* matemáticos como o WOLFRAM MATHEMATICA, por exemplo. A expressão (3.15) representa a FDC conjunta α - μ /Gama entre duas variáveis α - μ , R_1 e R_2 , correlacionadas quando as suas respectivas potências médias estão também correlacionadas e apresentam comportamento aleatório representado por uma FDP conjunta Gama.

3.4 Momentos Conjuntos da Distribuição α - μ /Gama

Utilizando [2, eq. (2.124)], os momentos conjuntos da distribuição α - μ /Gama podem ser calculados por meio de

$$\mathbb{E}(R_1^{n_1} R_2^{n_2}) = \int_0^\infty \int_0^\infty r_1^{n_1} r_2^{n_2} f_{R_1 R_2}(r_1, r_2) dr_1 dr_2. \quad (3.16)$$

Substituindo (3.11) em (3.16) e separando as variáveis dos termos constantes tem-se

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(R_1^{n_1} R_2^{n_2}) &= \frac{4\alpha_1\alpha_2\mu^{\mu+m}m^{\mu+m}}{\Gamma(\mu)\Gamma(m)(1-\rho_f)^m(1-\rho_s)^\mu\Theta_1^{\frac{\mu+m}{2}}\Theta_2^{\frac{\mu+m}{2}}}\sum_{k,l=0}^{\infty}\frac{\rho_f^l\rho_s^k}{k!l!\Gamma(m+k)\Gamma(\mu+l)} \\ &\times \left[\frac{\mu m}{(1-\rho_f)(1-\rho_s)\sqrt{\Theta_1\Theta_2}}\right]^{k+l}\int_0^\infty\int_0^\infty r_1^{n_1+\alpha_1\frac{\mu+m+k+l}{2}-1}r_2^{n_2+\alpha_2\frac{\mu+m+k+l}{2}-1} \\ &\times K_{m-\mu+k-l}\left(2\sqrt{\frac{\mu m r_1^{\alpha_1}}{\Theta_1(1-\rho_f)(1-\rho_s)}}\right)K_{m-\mu+k-l}\left(2\sqrt{\frac{\mu m r_2^{\alpha_2}}{\Theta_2(1-\rho_f)(1-\rho_s)}}\right)dr_1dr_2 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Fazendo a substituição $r_i = u_i^{2/\alpha_i}$, da qual resulta que se $r_i \rightarrow 0$ então $u_i \rightarrow 0$ e se $r_i \rightarrow \infty$ então $u_i \rightarrow \infty$, $i = 1, 2$, obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(R_1^{n_1} R_2^{n_2}) &= \frac{4\alpha_1\alpha_2\mu^{\mu+m}m^{\mu+m}}{\Gamma(\mu)\Gamma(m)(1-\rho_f)^m(1-\rho_s)^\mu\Theta_1^{\frac{\mu+m}{2}}\Theta_2^{\frac{\mu+m}{2}}}\sum_{k,l=0}^{\infty}\frac{\rho_f^l\rho_s^k}{k!l!\Gamma(m+k)\Gamma(\mu+l)} \\ &\times \left[\frac{\mu m}{(1-\rho_f)(1-\rho_s)\sqrt{\Theta_1\Theta_2}}\right]^{k+l}\int_0^\infty\int_0^\infty \left(u_1^{\frac{2}{\alpha_1}}\right)^{n_1+\alpha_1\frac{\mu+m+k+l}{2}-1} \\ &\times \left(u_2^{\frac{2}{\alpha_2}}\right)^{n_2+\alpha_2\frac{\mu+m+k+l}{2}-1}K_{m-\mu+k-l}\left(2\sqrt{\frac{\mu m}{\Theta_1(1-\rho_f)(1-\rho_s)}}u_1\right) \\ &\times K_{m-\mu+k-l}\left(2\sqrt{\frac{\mu m}{\Theta_2(1-\rho_f)(1-\rho_s)}}u_2\right)\frac{2u_1^{\frac{2}{\alpha_1}-1}}{\alpha_1}du_1\frac{2u_2^{\frac{2}{\alpha_2}-1}}{\alpha_2}du_2. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Alterando a ordem de integração e realizando simplificações algébricas tem-se

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(R_1^{n_1} R_2^{n_2}) &= \frac{16\mu^{\mu+m}m^{\mu+m}}{\Gamma(\mu)\Gamma(m)(1-\rho_f)^m(1-\rho_s)^\mu\Theta_1^{\frac{\mu+m}{2}}\Theta_2^{\frac{\mu+m}{2}}} \\ &\times \sum_{k,l=0}^{\infty}\frac{\rho_f^l\rho_s^k}{k!l!\Gamma(m+k)\Gamma(\mu+l)}\left[\frac{\mu m}{(1-\rho_f)(1-\rho_s)\sqrt{\Theta_1\Theta_2}}\right]^{k+l} \\ &\times \int_0^\infty u_1^{\frac{2n_1}{\alpha_1}+\mu+m+k+l-1}K_{m-\mu+k-l}\left(2\sqrt{\frac{\mu m}{\Theta_1(1-\rho_f)(1-\rho_s)}}u_1\right) \\ &\times \int_0^\infty u_2^{\frac{2n_2}{\alpha_2}+\mu+m+k+l-1}K_{m-\mu+k-l}\left(2\sqrt{\frac{\mu m}{\Theta_2(1-\rho_f)(1-\rho_s)}}u_2\right)du_1du_2 \end{aligned} \quad (3.19)$$

e com o auxílio de [27, eq. (6.561.16)] obtém-se, após algumas simplificações algébricas,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(R_1^{n_1} R_2^{n_2}) &= \frac{\mu^{\mu+m}m^{\mu+m}}{\Gamma(\mu)\Gamma(m)(1-\rho_f)^m(1-\rho_s)^\mu\Theta_1^{\frac{\mu+m}{2}}\Theta_2^{\frac{\mu+m}{2}}} \\ &\times \sum_{k,l=0}^{\infty}\frac{\rho_f^l\rho_s^k}{k!l!\Gamma(m+k)\Gamma(\mu+l)}\left[\frac{\mu m}{\sqrt{\Theta_1\Theta_2}(1-\rho_f)(1-\rho_s)}\right]^{k+l} \\ &\times \left[\frac{\mu m}{\sqrt{\Theta_1\Theta_2}(1-\rho_f)(1-\rho_s)}\right]^{-\mu-m-k-l-\frac{n_1}{\alpha_1}-\frac{n_2}{\alpha_2}}\Gamma\left(\mu+l+\frac{n_1}{\alpha_1}\right) \\ &\times \Gamma\left(m+k+\frac{n_1}{\alpha_1}\right)\Gamma\left(\mu+l+\frac{n_2}{\alpha_2}\right)\Gamma\left(m+k+\frac{n_2}{\alpha_2}\right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Por fim, simplificando a expressão em (3.20) com base no símbolo de Pochhammer [7, eq. (6.1.22)]

$$(b)_n = \frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(b)} \quad (3.21)$$

e na série hipergeométrica generalizada [27, eq. (9.14.1)]

$${}_pF_q(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k (\alpha_2)_k \dots (\alpha_p)_k z^k}{(\beta_1)_k (\beta_2)_k \dots (\beta_q)_k k!}, \quad (3.22)$$

a expressão (3.20) pode ser simplificada para

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(R_1^{n_1} R_2^{n_2}) &= \frac{(1-\rho_f)^\mu (1-\rho_s)^m}{(\Gamma(\mu)\Gamma(m))^2} \left[\frac{\sqrt{\Theta_1\Theta_2}(1-\rho_f)(1-\rho_s)}{\mu m} \right]^{\frac{n_1}{\alpha_1} + \frac{n_2}{\alpha_2}} \\ &\times \Gamma\left(\mu + \frac{n_1}{\alpha_1}\right) \Gamma\left(\mu + \frac{n_2}{\alpha_2}\right) \Gamma\left(m + \frac{n_1}{\alpha_1}\right) \Gamma\left(m + \frac{n_2}{\alpha_2}\right) \\ &\times {}_2F_1\left(\mu + \frac{n_1}{\alpha_1}, \mu + \frac{n_2}{\alpha_2}; \mu; \rho_f\right) {}_2F_1\left(m + \frac{n_1}{\alpha_1}, m + \frac{n_2}{\alpha_2}; m; \rho_s\right) \end{aligned} \quad (3.23)$$

na qual ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z)$ representa a função hipergeométrica de Gauss [7, eq. (15.1.1)]. Utilizando-se mais uma vez o símbolo de Pochhammer obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(R_1^{n_1} R_2^{n_2}) &= \frac{(1-\rho_f)^\mu (1-\rho_s)^m}{\Gamma(\mu)\Gamma(m)\Gamma(\mu)\Gamma(m)} \left[\frac{\sqrt{\Theta_1\Theta_2}(1-\rho_f)(1-\rho_s)}{\mu m} \right]^{\frac{n_1}{\alpha_1} + \frac{n_2}{\alpha_2}} \\ &\times \Gamma(\mu) (\mu)_{\frac{n_1}{\alpha_1}} \Gamma(\mu) (\mu)_{\frac{n_2}{\alpha_2}} \Gamma(m) (m)_{\frac{n_1}{\alpha_1}} \Gamma(m) (m)_{\frac{n_2}{\alpha_2}} \\ &\times {}_2F_1\left(\mu + \frac{n_1}{\alpha_1}, \mu + \frac{n_2}{\alpha_2}; \mu; \rho_f\right) {}_2F_1\left(m + \frac{n_1}{\alpha_1}, m + \frac{n_2}{\alpha_2}; m; \rho_s\right) \end{aligned} \quad (3.24)$$

que permite simplificar a expressão para o cálculo dos momentos conjuntos de uma distribuição α - μ /Gama para

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(R_1^{n_1} R_2^{n_2}) &= (1-\rho_f)^\mu (1-\rho_s)^m (\mu)_{\frac{n_1}{\alpha_1}} (\mu)_{\frac{n_2}{\alpha_2}} (m)_{\frac{n_1}{\alpha_1}} (m)_{\frac{n_2}{\alpha_2}} \\ &\times \left[\frac{\sqrt{\Theta_1\Theta_2}(1-\rho_f)(1-\rho_s)}{\mu m} \right]^{\frac{n_1}{\alpha_1} + \frac{n_2}{\alpha_2}} {}_2F_1\left(\mu + \frac{n_1}{\alpha_1}, \mu + \frac{n_2}{\alpha_2}; \mu; \rho_f\right) \\ &\times {}_2F_1\left(m + \frac{n_1}{\alpha_1}, m + \frac{n_2}{\alpha_2}; m; \rho_s\right). \end{aligned} \quad (3.25)$$

3.5 FDPs Marginais α - μ /Gama

Com base em [2, eq. (2.117)], as FDPs marginais podem ser obtidas por

$$f_{R_1}(r_1) = \int_0^\infty f_{R_1, R_2}(r_1, r_2) dr_2 \quad (3.26a)$$

$$f_{R_2}(r_2) = \int_0^\infty f_{R_1, R_2}(r_1, r_2) dr_1. \quad (3.26b)$$

Substituindo (3.11) em (3.26a) tem-se

$$\begin{aligned}
 f_{R_1}(r_1) &= \int_0^\infty \frac{4\alpha_1\alpha_2\mu^{\mu+m}m^{\mu+m}r_1^{\alpha_1\frac{\mu+m}{2}-1}r_2^{\alpha_2\frac{\mu+m}{2}-1}}{\Gamma(\mu)\Gamma(m)(1-\rho_f)^m(1-\rho_s)^\mu\Theta_1^{\frac{\mu+m}{2}}\Theta_2^{\frac{\mu+m}{2}}}\sum_{k,l=0}^\infty \frac{\rho_f^l\rho_s^k}{k!l!\Gamma(m+k)\Gamma(\mu+l)} \\
 &\times \left[\frac{\mu m}{(1-\rho_f)(1-\rho_s)}\sqrt{\frac{r_1^{\alpha_1}r_2^{\alpha_2}}{\Theta_1\Theta_2}} \right]^{k+l} K_{m-\mu+k-l} \left(2\sqrt{\frac{\mu m r_1^{\alpha_1}}{\Theta_1(1-\rho_f)(1-\rho_s)}} \right) \\
 &\times K_{m-\mu+k-l} \left(2\sqrt{\frac{\mu m r_2^{\alpha_2}}{\Theta_2(1-\rho_f)(1-\rho_s)}} \right) dr_2 \quad (3.27)
 \end{aligned}$$

para a qual, separando a variável dos fatores constantes obtém-se

$$\begin{aligned}
 f_{R_1}(r_1) &= \frac{4\alpha_1\alpha_2\mu^{\mu+m}m^{\mu+m}r_1^{\alpha_1\frac{\mu+m}{2}-1}}{\Gamma(\mu)\Gamma(m)(1-\rho_f)^m(1-\rho_s)^\mu\Theta_1^{\frac{\mu+m}{2}}\Theta_2^{\frac{\mu+m}{2}}}\sum_{k,l=0}^\infty \frac{\rho_f^l\rho_s^k}{k!l!\Gamma(m+k)\Gamma(\mu+l)} \\
 &\times \left[\frac{\mu m}{(1-\rho_f)(1-\rho_s)}\sqrt{\frac{r_1^{\alpha_1}}{\Theta_1\Theta_2}} \right]^{k+l} K_{m-\mu+k-l} \left(2\sqrt{\frac{\mu m r_1^{\alpha_1}}{\Theta_1(1-\rho_f)(1-\rho_s)}} \right) \\
 &\times \int_0^\infty r_2^{\alpha_2\frac{\mu+m+k+l}{2}-1} K_{m-\mu+k-l} \left(2\sqrt{\frac{\mu m r_2^{\alpha_2}}{\Theta_2(1-\rho_f)(1-\rho_s)}} \right) dr_2. \quad (3.28)
 \end{aligned}$$

A expressão em (3.28) pode ser resolvida adotando-se a mesma estratégia de substituição de variáveis, $r_1 = u_1^{2/\alpha_1}$, utilizada em (3.18). Fazendo isto, a expressão em (3.28) resulta em

$$\begin{aligned}
 f_{R_1}(r_1) &= \frac{4\alpha_1\alpha_2\mu^{\mu+m}m^{\mu+m}r_1^{\alpha_1\frac{\mu+m}{2}-1}}{\Gamma(\mu)\Gamma(m)(1-\rho_f)^m(1-\rho_s)^\mu\Theta_1^{\frac{\mu+m}{2}}\Theta_2^{\frac{\mu+m}{2}}}\sum_{k,l=0}^\infty \frac{\rho_f^l\rho_s^k}{k!l!\Gamma(m+k)\Gamma(\mu+l)} \\
 &\times \left[\frac{\mu m}{(1-\rho_f)(1-\rho_s)}\sqrt{\frac{r_1^{\alpha_1}}{\Theta_1\Theta_2}} \right]^{k+l} K_{m-\mu+k-l} \left(2\sqrt{\frac{\mu m r_1^{\alpha_1}}{\Theta_1(1-\rho_f)(1-\rho_s)}} \right) \\
 &\times \int_0^\infty \left(u_2^{\frac{2}{\alpha_2}} \right)^{\alpha_2\frac{\mu+m+k+l}{2}-1} K_{m-\mu+k-l} \left(2\sqrt{\frac{\mu m \left(u_2^{\frac{2}{\alpha_2}} \right)^{\alpha_2}}{\Theta_2(1-\rho_f)(1-\rho_s)}} \right) \frac{2u_2^{\frac{2}{\alpha_2}-1}}{\alpha_2} du_2 \quad (3.29)
 \end{aligned}$$

que pode ser simplificada para

$$\begin{aligned}
 f_{R_1}(r_1) &= \frac{8\alpha_1\mu^{\mu+m}m^{\mu+m}r_1^{\alpha_1\frac{\mu+m}{2}-1}}{\Gamma(\mu)\Gamma(m)(1-\rho_f)^m(1-\rho_s)^\mu\Theta_1^{\frac{\mu+m}{2}}\Theta_2^{\frac{\mu+m}{2}}}\sum_{k,l=0}^\infty \frac{\rho_f^l\rho_s^k}{k!l!\Gamma(m+k)\Gamma(\mu+l)} \\
 &\times \left[\frac{\mu m}{(1-\rho_f)(1-\rho_s)}\sqrt{\frac{r_1^{\alpha_1}}{\Theta_1\Theta_2}} \right]^{k+l} K_{m-\mu+k-l} \left(2\sqrt{\frac{\mu m r_1^{\alpha_1}}{\Theta_1(1-\rho_f)(1-\rho_s)}} \right) \\
 &\times \int_0^\infty u_2^{\mu+m+k+l-1} K_{m-\mu+k-l} \left(2\sqrt{\frac{\mu m}{\Theta_2(1-\rho_f)(1-\rho_s)}} u_2 \right) du_2 \quad (3.30)
 \end{aligned}$$

e esta pode ser solucionada utilizando-se [27, 6.561.16], obtendo-se

$$\begin{aligned}
f_{R_1}(r_1) &= \frac{2\alpha_1\mu^{\mu+m}m^{\mu+m}r_1^{\alpha_1\frac{\mu+m}{2}-1}}{\Gamma(\mu)\Gamma(m)(1-\rho_f)^m(1-\rho_s)^\mu\Theta_1^{\frac{\mu+m}{2}}\Theta_2^{\frac{\mu+m}{2}}}\sum_{k,l=0}^{\infty}\frac{\rho_f^l\rho_s^k}{k!l!\Gamma(m+k)\Gamma(\mu+l)} \\
&\times \left[\frac{\mu m}{(1-\rho_f)(1-\rho_s)}\sqrt{\frac{r_1^{\alpha_1}}{\Theta_1\Theta_2}} \right]^{k+l} K_{m-\mu+k-l}\left(2\sqrt{\frac{\mu m r_1^{\alpha_1}}{\Theta_1(1-\rho_f)(1-\rho_s)}}\right) \\
&\times \left[\sqrt{\frac{\mu m}{\Theta_2(1-\rho_f)(1-\rho_s)}} \right]^{-\mu-m-k-l} \Gamma\left(\frac{2m+2k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2\mu+2l}{2}\right) \quad (3.31)
\end{aligned}$$

após algumas simplificações algébricas. Por fim, utilizando o teorema da multiplicação [7, eq. (9.6.51)]

$$K_\nu(bz) = b^\pm \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-b^2)^k \left(\frac{z}{2}\right)^k}{k!} K_{\nu\pm k}(z), \quad (3.32)$$

é possível simplificar a expressão em (3.31) para

$$f_{R_1}(r_1) = \frac{2\alpha_1}{\Gamma(\mu)\Gamma(m)} \left(\sqrt{\frac{\mu m}{\Theta_1}}\right)^{\mu+m} r_1^{\frac{\alpha_1}{2}(\mu+m)-1} K_{m-\mu}\left(2\sqrt{\frac{\mu m r_1^{\alpha_1}}{\Theta_1}}\right). \quad (3.33)$$

A FDP marginal α - μ /Gama $f_{R_2}(r_2)$ pode ser encontrada de maneira semelhante a partir de (3.26b).

3.6 Momentos de R_1 e R_2

Utilizando as FDPs marginais de R_1 e R_2 em (3.33), pode-se calcular os seus respectivos momentos como [2, eq. (2.7)]

$$\mathbb{E}(R_i^{n_i}) = \int_0^\infty r_i^{n_i} f_{R_i}(r_i) dr_i \quad (3.34)$$

em que $i = 1, 2$. Substituindo (3.33) em (3.34), realizando a substituição $r_i = u_i^{2/\alpha_i}$, utilizando [27, eq. (6.561.16)] e após algumas simplificações algébricas, os momentos de R_1 e R_2 podem ser calculados como

$$\mathbb{E}(R_i^{n_i}) = \frac{1}{\Gamma(\mu)\Gamma(m)} \left(\frac{\Theta_i}{\mu m}\right)^{\frac{n_i}{\alpha_i}} \Gamma\left(\mu + \frac{n_i}{\alpha_i}\right) \Gamma\left(m + \frac{n_i}{\alpha_i}\right) \quad (3.35)$$

na qual $i = 1, 2$. A expressão (3.35) ainda pode ser simplificada utilizando-se o símbolo de Pochhammer para

$$\mathbb{E}(R_i^{n_i}) = (\mu)_{\frac{n_i}{\alpha_i}} (m)_{\frac{n_i}{\alpha_i}} \left(\frac{\Theta_i}{\mu m}\right)^{\frac{n_i}{\alpha_i}}. \quad (3.36)$$

3.7 Coeficiente de Correlação na Potência

O coeficiente de correlação na potência entre R_1^2 e R_2^2 pode ser calculado por

$$\rho = \frac{\mathbb{C}(R_1^2, R_2^2)}{\sqrt{\mathbb{V}(R_1^2)\mathbb{V}(R_2^2)}}. \quad (3.37)$$

Além disso, $\mathbb{C}(R_1^2, R_2^2) = \mathbb{E}(R_1^2, R_2^2) - \mathbb{E}(R_1^2)\mathbb{E}(R_2^2)$ [2, eq. (2.129)] e $\mathbb{V}(R_i^2) = \mathbb{E}(R_i^4) - \mathbb{E}^2(R_i^2)$ [2, eq. (2.8)], $i = 1, 2$. Logo, utilizando (3.23) e (3.35) para o cálculo dos momentos e após algumas manipulações algébricas, o coeficiente de correlação na potência entre R_1 e R_2 pode ser calculado como

$$\begin{aligned} \rho = & \frac{\Gamma\left(\mu + \frac{2}{\alpha_1}\right) \Gamma\left(\mu + \frac{2}{\alpha_2}\right) \Gamma\left(m + \frac{2}{\alpha_1}\right) \Gamma\left(m + \frac{2}{\alpha_2}\right)}{\Gamma(\mu)\Gamma(m) \sqrt{\Gamma\left(\mu + \frac{4}{\alpha_1}\right) \Gamma\left(m + \frac{4}{\alpha_1}\right) - \frac{\left(\Gamma\left(\mu + \frac{2}{\alpha_1}\right)\Gamma\left(m + \frac{2}{\alpha_1}\right)\right)^2}{\Gamma(\mu)\Gamma(m)}}} \\ & \times \left[\frac{(1 - \rho_f)^{\mu + \frac{2}{\alpha_1} + \frac{2}{\alpha_2}} (1 - \rho_s)^{m + \frac{2}{\alpha_1} + \frac{2}{\alpha_2}}}{\sqrt{\Gamma\left(\mu + \frac{4}{\alpha_2}\right) \Gamma\left(m + \frac{4}{\alpha_2}\right) - \frac{\left(\Gamma\left(\mu + \frac{2}{\alpha_2}\right)\Gamma\left(m + \frac{2}{\alpha_2}\right)\right)^2}{\Gamma(\mu)\Gamma(m)}}}} \right. \\ & \times {}_2F_1\left(\mu + \frac{2}{\alpha_1}, \mu + \frac{2}{\alpha_2}; \mu; \rho_f\right) {}_2F_1\left(m + \frac{2}{\alpha_1}, m + \frac{2}{\alpha_2}; m; \rho_s\right) \\ & \left. - \frac{1}{\sqrt{\Gamma\left(\mu + \frac{4}{\alpha_2}\right) \Gamma\left(m + \frac{4}{\alpha_2}\right) - \frac{\left(\Gamma\left(\mu + \frac{2}{\alpha_2}\right)\Gamma\left(m + \frac{2}{\alpha_2}\right)\right)^2}{\Gamma(\mu)\Gamma(m)}}}} \right] \quad (3.38) \end{aligned}$$

a qual reescrevendo-se por meio do símbolo de Pochhammer torna-se

$$\begin{aligned} \rho = & \frac{\Gamma(\mu) (\mu)_{\frac{2}{\alpha_1}} \Gamma\left(\mu + \frac{2}{\alpha_2}\right) \Gamma(m) (m)_{\frac{2}{\alpha_1}} \Gamma\left(m + \frac{2}{\alpha_2}\right)}{\Gamma(\mu)\Gamma(m) \sqrt{\Gamma\left(\mu + \frac{4}{\alpha_1}\right) \Gamma\left(m + \frac{4}{\alpha_1}\right) - \frac{\Gamma(\mu)(\mu)_{\frac{2}{\alpha_1}} \Gamma(m)(m)_{\frac{2}{\alpha_1}} \Gamma\left(\mu + \frac{2}{\alpha_1}\right) \Gamma\left(m + \frac{2}{\alpha_1}\right)}{\Gamma(\mu)\Gamma(m)}}} \\ & \times \left[\frac{(1 - \rho_f)^{\mu + \frac{2}{\alpha_1} + \frac{2}{\alpha_2}} (1 - \rho_s)^{m + \frac{2}{\alpha_1} + \frac{2}{\alpha_2}}}{\sqrt{\Gamma\left(\mu + \frac{4}{\alpha_2}\right) \Gamma\left(m + \frac{4}{\alpha_2}\right) - \frac{\Gamma(\mu)(\mu)_{\frac{2}{\alpha_2}} \Gamma(m)(m)_{\frac{2}{\alpha_2}} \Gamma\left(\mu + \frac{2}{\alpha_2}\right) \Gamma\left(m + \frac{2}{\alpha_2}\right)}{\Gamma(\mu)\Gamma(m)}}}} \right. \\ & \times {}_2F_1\left(\mu + \frac{2}{\alpha_1}, \mu + \frac{2}{\alpha_2}; \mu; \rho_f\right) {}_2F_1\left(m + \frac{2}{\alpha_1}, m + \frac{2}{\alpha_2}; m; \rho_s\right) \\ & \left. - \frac{1}{\sqrt{\Gamma\left(\mu + \frac{4}{\alpha_2}\right) \Gamma\left(m + \frac{4}{\alpha_2}\right) - \frac{\Gamma(\mu)(\mu)_{\frac{2}{\alpha_2}} \Gamma(m)(m)_{\frac{2}{\alpha_2}} \Gamma\left(\mu + \frac{2}{\alpha_2}\right) \Gamma\left(m + \frac{2}{\alpha_2}\right)}{\Gamma(\mu)\Gamma(m)}}}} \right] \quad (3.39) \end{aligned}$$

que pode ser simplificada para

$$\rho = \frac{(\mu)_{\frac{2}{\alpha_1}} (m)_{\frac{2}{\alpha_1}} \Gamma\left(\mu + \frac{2}{\alpha_2}\right) \Gamma\left(m + \frac{2}{\alpha_2}\right)}{\sqrt{\Gamma\left(\mu + \frac{4}{\alpha_1}\right) \Gamma\left(m + \frac{4}{\alpha_1}\right) - (\mu)_{\frac{2}{\alpha_1}} (m)_{\frac{2}{\alpha_1}} \Gamma\left(\mu + \frac{2}{\alpha_1}\right) \Gamma\left(m + \frac{2}{\alpha_1}\right)}} \times \left[\frac{(1 - \rho_f)^{\mu + \frac{2}{\alpha_1} + \frac{2}{\alpha_2}} (1 - \rho_s)^{m + \frac{2}{\alpha_1} + \frac{2}{\alpha_2}}}{\sqrt{\Gamma\left(\mu + \frac{4}{\alpha_2}\right) \Gamma\left(m + \frac{4}{\alpha_2}\right) - (\mu)_{\frac{2}{\alpha_2}} (m)_{\frac{2}{\alpha_2}} \Gamma\left(\mu + \frac{2}{\alpha_2}\right) \Gamma\left(m + \frac{2}{\alpha_2}\right)}} \times {}_2F_1\left(\mu + \frac{2}{\alpha_1}, \mu + \frac{2}{\alpha_2}; \mu; \rho_f\right) {}_2F_1\left(m + \frac{2}{\alpha_1}, m + \frac{2}{\alpha_2}; m; \rho_s\right) - \frac{1}{\sqrt{\Gamma\left(\mu + \frac{4}{\alpha_2}\right) \Gamma\left(m + \frac{4}{\alpha_2}\right) - (\mu)_{\frac{2}{\alpha_2}} (m)_{\frac{2}{\alpha_2}} \Gamma\left(\mu + \frac{2}{\alpha_2}\right) \Gamma\left(m + \frac{2}{\alpha_2}\right)}} \right]. \quad (3.40)$$

3.8 Casos Particulares da Distribuição α - μ /Gama

Em [10], é demonstrado que a distribuição α - μ compreende outras distribuições que representam modelos de canais como a Gama, Nakagami- m , exponencial, Weibull, Gaussiana unilateral e Rayleigh. Logo, é então possível obter distribuições como Gama/Gama, Nakagami/Gama, Exponencial/Gama, Weibull/Gama, Gaussiana Unilateral Gama e Rayleigh/Gama a partir da α - μ /Gama. Para tanto, é suficiente aplicar às expressões obtidas nas Secções 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6 e 3.7 o procedimento padrão de transformação de variáveis [10] para $\mu > 0$ indicado por

$$R_{i_{\alpha-\mu}}^{\alpha_i} = R_{i_{\text{Nakagami}-m}}^2 = R_{i_{\text{Gama}}} \quad (3.41)$$

e para $\mu \in \mathbb{Z}$

$$R_{i_{\alpha-\mu}}^{\alpha_i} = \sum_{j=1}^{\mu} R_{i_{\text{Exponencial}-j}} \quad (3.42a)$$

$$R_{i_{\alpha-\mu}}^{\alpha_i} = \sum_{j=1}^{\mu} R_{i_{\text{Rayleigh}-j}}^2 \quad (3.42b)$$

$$R_{i_{\alpha-\mu}}^{\alpha_i} = \sum_{j=1}^{2\mu} R_{i_{\text{Gaussiana}-j}}^2 \quad (3.42c)$$

em que $i = 1, 2$. Em particular, algumas destas distribuições já foram exploradas em [29] (Nakagami/Gama e Rayleigh/Gama) e [31] (Weibull/Gama). Tal fato demonstra a importância das deduções e análises desenvolvidas nesta dissertação, no sentido de generalizar diversos resultados disponíveis na literatura e, ainda, explorar cenários não analisados. A obtenção da distribuição Nakagami/Gama, ainda não explorada na literatura, a partir da α - μ /Gama será detalhada a seguir.

3.8.1 A Distribuição Nakagami/Gama

Aplicando o procedimento padrão de transformação de variáveis em (3.41) sendo, o subíndice N referente à distribuição Nakagami- m , em (3.11), é possível obter a FDP conjunta da distribuição Nakagami- m_f /Gama- m_s como

$$f_{R_{1N}, R_{2N}}(r_1, r_2) = \frac{16m_f^{m_f+m_s} m_s^{m_f+m_s} (r_1 r_2)^{m_f+m_s-1}}{\Gamma(m_f)\Gamma(m_s)(1-\rho_f)^{m_s}(1-\rho_s)^{m_f} (\sqrt{\Theta_1\Theta_2})^{m_f+m_s}} \\ \times \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{\rho_f^l \rho_s^k}{k!l!\Gamma(m_s+k)\Gamma(m_f+l)} \left[\frac{m_f m_s r_1 r_2}{\sqrt{\Theta_1\Theta_2}(1-\rho_f)(1-\rho_s)} \right]^{k+l} \\ \times K_{m_s-m_f+k-l} \left(2r_1 \sqrt{\frac{m_f m_s}{\Theta_1(1-\rho_f)(1-\rho_s)}} \right) K_{m_s-m_f+k-l} \left(2r_2 \sqrt{\frac{m_f m_s}{\Theta_2(1-\rho_f)(1-\rho_s)}} \right) \quad (3.43)$$

na qual m_f e m_s denotam os fatores de desvanecimento m da distribuição de Nakagami sendo, os subíndices f e s referentes ao desvanecimento (distribuição Nakagami) e ao sombreamento (distribuição Gama), respectivamente. Os demais parâmetros em (3.43) têm a mesma definição que em (3.11). As demais estatísticas como FDC, momentos conjuntos e marginais e FDPs marginais da distribuição Nakagami- m_f /Gama- m_s podem ser obtidas a partir de (3.15), (3.23), (3.35) e (3.33), respectivamente, tomando $\alpha_i = 2$, $i = 1, 2$. O mesmo é verdade para o cálculo do coeficiente de correlação na potência da distribuição Nakagami- m_f /Gama- m_s . De fato, tomando $\alpha_i = 2$, $i = 1, 2$, em (3.40) tem-se

$$\rho = \frac{(\mu)_{\frac{1}{2}} (m)_{\frac{1}{2}} \Gamma(\mu + \frac{1}{2}) \Gamma(m + \frac{1}{2})}{\sqrt{\Gamma(\mu + \frac{1}{2}) \Gamma(m + \frac{1}{2}) - (\mu)_{\frac{1}{2}} (m)_{\frac{1}{2}} \Gamma(\mu + \frac{1}{2}) \Gamma(m + \frac{1}{2})}} \\ \times \left[\frac{(1-\rho_f)^{\mu+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} (1-\rho_s)^{m+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\Gamma(\mu + \frac{1}{2}) \Gamma(m + \frac{1}{2}) - (\mu)_{\frac{1}{2}} (m)_{\frac{1}{2}} \Gamma(\mu + \frac{1}{2}) \Gamma(m + \frac{1}{2})}} \right. \\ \times {}_2F_1 \left(\mu + \frac{1}{2}, \mu + \frac{1}{2}; \mu; \rho_f \right) {}_2F_1 \left(m + \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}; m; \rho_s \right) \\ \left. - \frac{1}{\sqrt{\Gamma(\mu + \frac{1}{2}) \Gamma(m + \frac{1}{2}) - (\mu)_{\frac{1}{2}} (m)_{\frac{1}{2}} \Gamma(\mu + \frac{1}{2}) \Gamma(m + \frac{1}{2})}} \right]. \quad (3.44)$$

Observando que as funções hipergeométricas em (3.44) têm a forma ${}_2F_1(a, b; b-1; z)$, a fórmula [36]

$${}_2F_1(a, b; b-1; z) = \frac{(1-z)^{-a-1} (b + (a-b+1)z - 1)}{b-1} \quad (3.45)$$

permite reescrever (3.44) como

$$\rho = \frac{(\mu)_{\frac{1}{2}} (m)_{\frac{1}{2}} \Gamma(\mu + \frac{1}{2}) \Gamma(m + \frac{1}{2})}{\Gamma(\mu + \frac{1}{2}) \Gamma(m + \frac{1}{2}) - (\mu)_{\frac{1}{2}} (m)_{\frac{1}{2}} \Gamma(\mu + \frac{1}{2}) \Gamma(m + \frac{1}{2})} \\ \times \left[(1-\rho_f)^{\mu+2} (1-\rho_s)^{m+2} \left(\frac{(1-\rho_f)^{-\mu-2} (\mu + \rho_f)}{\mu} \right) \left(\frac{(1-\rho_s)^{-m-2} (m + \rho_s)}{m} \right) - 1 \right] \quad (3.46)$$

após algumas simplificações algébricas. Por fim, utilizando a fórmula de recorrência $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ [27, eq. (8.331.1)], reescrevendo o símbolo de Pochhammer como a razão entre funções gama e realizando outras simplificações algébricas, obtém-se

$$\rho = \frac{\mu\rho_s + m\rho_f + \rho_f\rho_s}{\mu + m + 1} \quad (3.47)$$

a qual, considerando $\mu = m_f$ e $m = m_s$, representa o coeficiente de correlação na potência da distribuição Nakagami- m_f /Gama- m_s , ou seja

$$\rho_N = \frac{m_f\rho_s + m_s\rho_f + \rho_f\rho_s}{m_f + m_s + 1}. \quad (3.48)$$

Por fim, ao contrário da distribuição α - μ /Gama, é possível calcular em forma fechada a função característica marginal da distribuição Nakagami- m_f /Gama- m_s como [2, eq. (2.16)]

$$\begin{aligned} \psi_{R_{iN}}(\omega_i) &= \frac{4^{m_s-m_f+1}\sqrt{\pi}\Gamma(2m_f)\Gamma(2m_s)}{\Gamma(m_f)\Gamma(m_s)\Gamma(m_f+m_s+\frac{1}{2})} \left(2\sqrt{\frac{m_fm_s}{\Theta_i}} - j\omega_i\right)^{2m_s} \left(\sqrt{\frac{m_fm_s}{\Theta_i}}\right)^{2m_s} \\ &\times {}_2F_1\left(2m_s, m_s - m_f + \frac{1}{2}; m_f + m_s + \frac{1}{2}; \frac{2\sqrt{\frac{m_fm_s}{\Theta_i}} + j\omega_i}{j\omega_i - 2\sqrt{\frac{m_fm_s}{\Theta_i}}}\right), \end{aligned} \quad (3.49)$$

$i = 1, 2$, e a função característica conjunta como [37, eq. (7.23)]

$$\begin{aligned} \psi_{R_{1N}, R_{2N}}(\omega_1, \omega_2) &= \frac{16^{m_s-m_f+1}\pi m_f^{2m_s} m_s^{2m_s} (1-\rho_f)^{m_f-2m_s}}{\Gamma(m_f)\Gamma(m_s)(1-\rho_s)^{m_s} (\Theta_1\Theta_2)^{m_s}} \\ &\times \frac{1}{\left[\left(2\sqrt{\frac{m_fm_s}{\Theta_1(1-\rho_f)(1-\rho_s)}} - j\omega_1\right)\left(2\sqrt{\frac{m_fm_s}{\Theta_2(1-\rho_f)(1-\rho_s)}} - j\omega_2\right)\right]^{2m_s}} \\ &\times \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{16^{k-l}\rho_f^l\rho_s^k \left[\frac{m_fm_s}{\sqrt{\Theta_1\Theta_2(1-\rho_f)(1-\rho_s)}}\right]^{2k} \left(\frac{\Gamma(2m_s+2k)\Gamma(2m_f+2l)}{\Gamma(m_f+m_s+k+l+\frac{1}{2})}\right)^2}{k!l!\Gamma(m_s+k)\Gamma(m_f+l) \left[\left(2\sqrt{\frac{m_fm_s}{\Theta_1(1-\rho_f)(1-\rho_s)}} - j\omega_1\right)\left(2\sqrt{\frac{m_fm_s}{\Theta_2(1-\rho_f)(1-\rho_s)}} - j\omega_2\right)\right]^{2k}} \\ &\times {}_2F_1\left(2m_s+2k, m_s - m_f + k - l + \frac{1}{2}; m_f + m_s + k + l + \frac{1}{2}; \frac{j\omega_1 + 2\sqrt{\frac{m_fm_s}{\Theta_1(1-\rho_f)(1-\rho_s)}}}{j\omega_1 - 2\sqrt{\frac{m_fm_s}{\Theta_1(1-\rho_f)(1-\rho_s)}}}\right) \\ &\times {}_2F_1\left(2m_s+2k, m_s - m_f + k - l + \frac{1}{2}; m_f + m_s + k + l + \frac{1}{2}; \frac{j\omega_2 + 2\sqrt{\frac{m_fm_s}{\Theta_2(1-\rho_f)(1-\rho_s)}}}{j\omega_2 - 2\sqrt{\frac{m_fm_s}{\Theta_2(1-\rho_f)(1-\rho_s)}}}\right), \end{aligned} \quad (3.50)$$

com o auxílio de [27, eq. (6.621.3)] para a resolução das integrais.

Outras distribuições já mencionadas na literatura ainda podem ser derivadas da distribuição Nakagami- m_f /Gama- m_s . Por exemplo, [16, eq. (5)] representa a FDP marginal da distribuição Nakagami- m_f /Gama- m_s e [30] apresenta a distribuição K generalizada a qual, pode ser comparada à distribuição Nakagami- m_f /Gama- m_s tomando $m_f = 1$ e admitindo que as variáveis Ω_i , $i = 1, 2$, estão condicionadas ao mesmo fator m_s .

3.9 Probabilidade de Indisponibilidade

Denominando-se o limiar por γ , a probabilidade de indisponibilidade $P_o(\gamma)$ pode ser comparada a FDC de uma distribuição pois, a FDC representa a probabilidade do evento $\{X \leq x\}$. Logo, a FDC dada em (3.15) pode ser utilizada para representar a probabilidade do sinal recebido, propagando-se em um canal com desvanecimento sombreado α - μ /Gama, estar abaixo do limiar γ , admitindo-se dupla diversidade.

Considerando o limiar γ igual a RSR instantânea Ξ_i , sendo $i = 1, 2$, cada um dos dois ramos de diversidade, com $\Xi_i = R_i^2 E_b/N_0$ e E_b/N_0 a razão entre a energia média por bit e a densidade espectral de potência unilateral do ruído, $P_o(\gamma)$ pode ser interpretada como a probabilidade de indisponibilidade da RSR instantânea $\Xi_i = \gamma$, admitindo-se uma dada RSR média, $\bar{\Xi}_i = \mathbb{E}(R_i^{\alpha_i}) E_b/N_0$. Além disso, sabendo que $\Theta_i = \mathbb{E}(\Omega_i) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(R_i^{\alpha_i})) = \mathbb{E}(R_i^{\alpha_i})$, $i = 1, 2$, a RSR média em cada um dos dois ramos de diversidade pode ser então calculada por $\bar{\Xi}_i = \Theta_i E_b/N_0$. Portanto, reescrevendo (3.15) por métodos de transformação de variáveis fazendo $r_i^2 = \Theta_i^{2/\alpha_i} \xi_i/\bar{\xi}_i$, $i = 1, 2$, a probabilidade de indisponibilidade $P_o(\gamma) = F_{\Xi_1, \Xi_2}(\xi_1, \xi_2)$ para $\xi_1 = \xi_2 = \gamma$ é obtida como

$$\begin{aligned}
 P_o(\gamma) = F_{\Gamma, \Gamma}(\gamma, \gamma) &= \frac{\mu^{2\mu} m^{2\mu} \gamma^{\frac{\mu}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)}}{\Gamma(\mu)\Gamma(m)(1 - \rho_f)^\mu (1 - \rho_s)^{2\mu - m} \bar{\gamma}_1^{\frac{\alpha_1 \mu}{2}} \bar{\gamma}_2^{\frac{\alpha_2 \mu}{2}}} \\
 &\times \sum_{k, l=0}^{\infty} \frac{\rho_f^l \rho_s^k}{k! l! \Gamma(m+k)\Gamma(\mu+l)} \left[\frac{\mu m \gamma^{\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{4}}}{(1 - \rho_f)(1 - \rho_s) \bar{\gamma}_1^{\frac{\alpha_1}{4}} \bar{\gamma}_2^{\frac{\alpha_2}{4}}} \right]^{2l} \\
 &\times G_{1,3}^{2,1} \left(\frac{\mu m \gamma^{\frac{\alpha_1}{2}}}{(1 - \rho_f)(1 - \rho_s) \bar{\gamma}_1^{\frac{\alpha_1}{2}}} \middle| \begin{matrix} 1 - \mu - l \\ m - \mu + k - l, 0, -\mu - l \end{matrix} \right) \\
 &\times G_{1,3}^{2,1} \left(\frac{\mu m \gamma^{\frac{\alpha_2}{2}}}{(1 - \rho_f)(1 - \rho_s) \bar{\gamma}_2^{\frac{\alpha_2}{2}}} \middle| \begin{matrix} 1 - \mu - l \\ m - \mu + k - l, 0, -\mu - l \end{matrix} \right) \quad (3.51)
 \end{aligned}$$

a qual, é de fato a expressão de cálculo da probabilidade de indisponibilidade $P_o(\gamma)$ na saída de um SC.

3.10 Resultados Numéricos

Nesta seção, os resultados numéricos apresentados têm como objetivo investigar o impacto dos parâmetros característicos do sistema sobre o seu desempenho, utilizando a expressão para o cálculo do coeficiente de correlação dada em (3.40) e da probabilidade de indisponibilidade apresentada em (3.51) e investigar a convergência das séries infinitas. Nos gráficos apresentados, as linhas, contínuas ou tracejadas, representam os resultados teóricos utilizando as expressões matemáticas, e os símbolos representam os pontos de simulações as quais, foram implementadas utilizando-se o MATLAB conforme código apresentado no Apêndice A. As amostras correlacionadas foram geradas a partir do método de decomposição de Cholesky [38] obedecendo ao seguinte algoritmo:

1. Informados os parâmetros α_1 , α_2 , μ , m , λ_f , λ_s e o número n de amostras desejado, calcular o desvio padrão $\sigma_f = \sqrt{1/(2\mu)}$;

2. Definir uma matriz de covariância $\Sigma_{4\mu \times 4\mu}$ com os valores de σ_f e λ_f ;
3. Calcular a matriz triangular inferior que representa a matriz fator de Cholesky da matriz $\Sigma_{4\mu \times 4\mu}$;
4. Gerar uma matriz $A_{4\mu \times n}$ de variáveis Gaussianas correlacionadas, cujos desvios padrões são σ_f ;
5. Determinar os desvios padrões $\sigma_{W_s} = \sqrt{\Theta_1/(2m)}$ e $\sigma_{Z_s} = \sqrt{\Theta_2/(2m)}$;
6. Definir uma matriz de covariância $\Sigma_{4m \times 4m}$ com os valores de σ_{W_s} , σ_{Z_s} e λ_s ;
7. Calcular a matriz triangular inferior que representa a matriz fator de Cholesky da matriz $\Sigma_{4m \times 4m}$;
8. Gerar a matriz $B_{4m \times n}$ de variáveis Gaussianas correlacionadas, cujos desvios padrões são σ_{W_s} para b_{ij} com $i \leq 2m$ e σ_{Z_s} para b_{ij} com $2m + 1 \leq i \leq 4m$;
9. Calcular $R_1^{\alpha_1} = (\sum_{i=1}^{2m} b_{ij}^2) (\sum_{i=1}^{2\mu} a_{ij}^2)$ e $R_2^{\alpha_2} = (\sum_{i=2m+1}^{4m} b_{ij}^2) (\sum_{i=2\mu+1}^{4\mu} a_{ij}^2)$, sendo a_{ij} os elementos da matriz $A_{4\mu \times n}$ gerada no passo 4.

Foram geradas para cada ponto de simulação 10^7 amostras correlacionadas. Sem perda de generalidade, admite-se que a RSR média em cada ramo é unitária na análise da probabilidade de indisponibilidade.

Nas Figuras 3.2 e 3.3 encontram-se curvas do coeficiente de correlação na potência, ρ , entre as variáveis R_1^2 e R_2^2 representativas do canal de desvanecimento sombreado α - μ /Gama duplamente correlacionado, em função dos coeficientes de correlação na potência, ρ_f e ρ_s , característicos dos canais de desvanecimento α - μ e de sombreamento Gama, respectivamente. Estes gráficos foram obtidos ora variando ρ_f e mantendo os demais parâmetros constantes, ora variando ρ_s e mantendo os demais parâmetros constantes. Comparando as curvas com ρ_f variando na Figura 3.2, nota-se que para $\alpha_i \geq 1$ as curvas assemelham-se a uma reta de coeficiente angular positivo e proporcional aos parâmetros α_i e m e inversamente proporcional ao parâmetro μ . Já para $\alpha_i < 1$, as curvas assemelham-se a uma curva exponencial de variação proporcional aos parâmetros α_i e μ e inversamente proporcional ao parâmetro m , $i = 1, 2$. Por outro lado, as curvas com ρ_s variando na Figura 3.3 têm crescimento proporcional aos parâmetros α_i e μ e inversamente proporcional ao parâmetro m , sendo semelhantes a uma reta para $\alpha_i \geq 1$ e a uma curva exponencial para $\alpha_i < 1$, $i = 1, 2$. Em especial, note que comparando-se as Figuras 3.2 e 3.3, para $\alpha_i \geq 1$, as curvas com ρ_f variando têm valores máximos maiores que as curvas com ρ_s variando enquanto que para $\alpha_i < 1$, são as curvas com ρ_s variando que têm valores máximos maiores que as curvas com ρ_f variando, $i = 1, 2$.

A Figura 3.4 contém os gráficos da probabilidade de indisponibilidade obtidos a partir de (3.51) para diferentes valores dos coeficientes de correlação na potência, ρ_f e ρ_s , dos parâmetros referentes ao desvanecimento e sombreamento, μ e m , e da não-linearidade do meio, α_1 e α_2 . Na Figura 3.4, alguns gráficos foram omitidos para melhor interpretação dos resultados pois, as curvas mais superiores estão muito próximas umas das outras. Como pode ser deduzido a partir da observação da Figura 3.4, a presença da correlação afeta negativamente o desempenho do sistema SC uma vez que a probabilidade de ocorrência de menores RSRs instantâneas aumenta conforme os coeficientes de correlação ρ_f e ρ_s aumentam. Em outras palavras, quanto menor for a correlação entre os ramos de diversidade do sistema SC, melhor será o

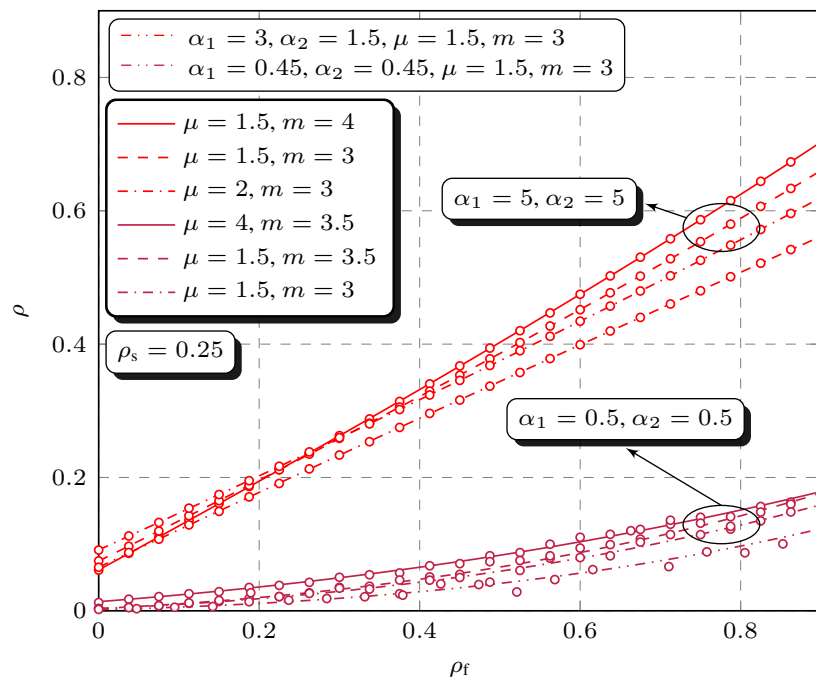


Figura 3.2: Coeficiente de correlação na potência em canal com desvanecimento sombreado α - μ /Gama duplamente correlacionado com ρ_f variando.

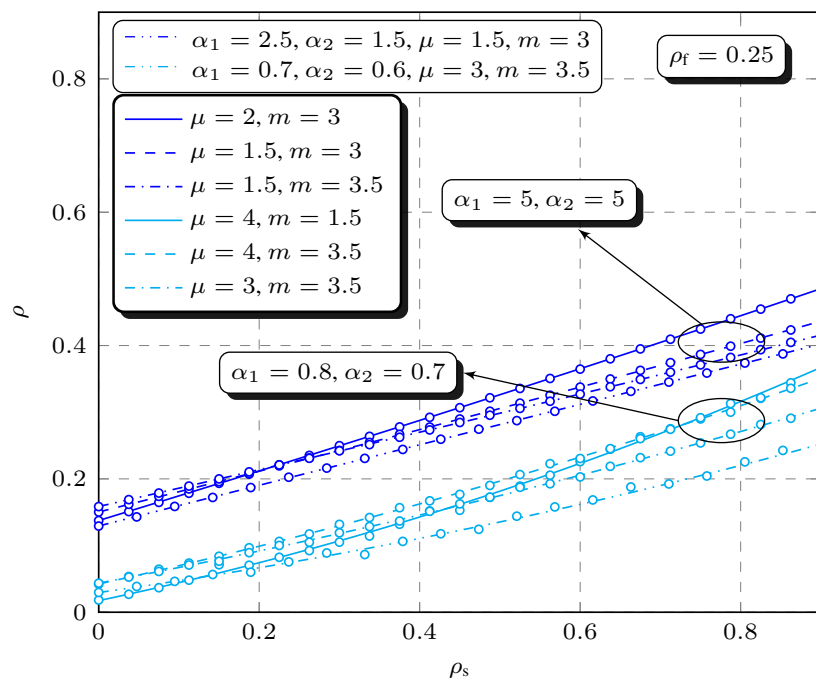


Figura 3.3: Coeficiente de correlação na potência em canal com desvanecimento sombreado α - μ /Gama duplamente correlacionado com ρ_s variando.

seu desempenho. Além disso, a Figura 3.4 mostra que a não-linearidade do meio pode afetar consideravelmente o desempenho do sistema uma vez que a probabilidade de ocorrência de uma mesma RSR instantânea, -25 dB por exemplo, aumenta conforme α_i diminui. Isto é justificado observando-se os valores de limiar de RSR instantânea avaliados no cálculo da probabilidade de indisponibilidade. Sejam estes valores $\gamma = \Xi_i = R_i^2 E_b/N_0$, eles são maiores para $0 < \alpha_i < 1$ do que para $\alpha_i \geq 1$, $i = 1, 2$, quando $\gamma \leq 0$ dB. Outro resultado importante obtido a partir da Figura 3.4 é sobre os parâmetros referentes ao desvanecimento e sombreamento, μ e m . Tais parâmetros influenciam positivamente o desempenho do sistema SC conforme aumentam. Isto será melhor identificado na Figura 3.5.

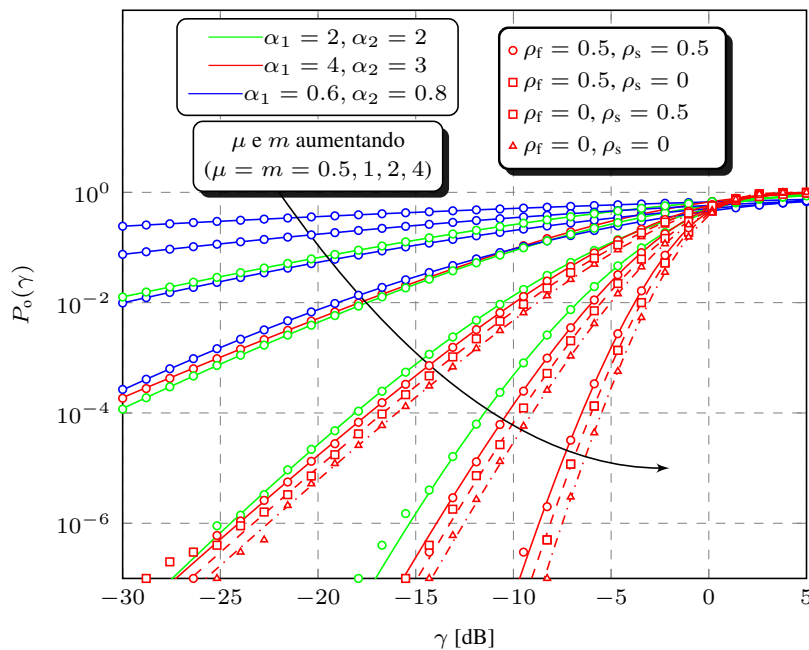


Figura 3.4: A influência de ρ_f e ρ_s sobre a probabilidade de indisponibilidade em canal com desvanecimento sombreado α - μ /Gama duplamente correlacionado.

A Figura 3.5 permite interpretar a influência dos parâmetros de desvanecimento, μ , e de sombreamento, m , sobre a probabilidade de indisponibilidade dada em (3.51). Os gráficos foram obtidos mantendo-se os coeficientes de correlação na potência referentes ao desvanecimento e ao sombreamento constantes tais que, $\rho_f = 0.3$ e $\rho_s = 0.6$. Com base na Figura 3.5 conclui-se que o aumento dos fatores de desvanecimento e sombreamento, μ e m , tem influência positiva sobre o desempenho do sistema SC. Em outras palavras, o aumento de tais fatores diminui a probabilidade de que os sinais recebidos pelos ramos de diversidade do sistema apresentem RSRs instantâneas menores do que 0 dB. Este resultado está de acordo com a definição dos fatores μ e m , a qual pode ser encontrada em [10, eq. (2)] para μ e em [6, eq. (21)] para m . Quanto maiores forem estes fatores, menores serão as variâncias tanto do desvanecimento quanto do sombreamento. Logo, um canal de comunicação composto de desvanecimento e sombreamento cujos fatores de desvanecimento e sombreamento são relativamente grandes, é menos agressivo à comunicação sem fio do que um canal de comunicação composto de desvanecimento e sombreamento em que os fatores de desvanecimento e sombreamento são pequenos.

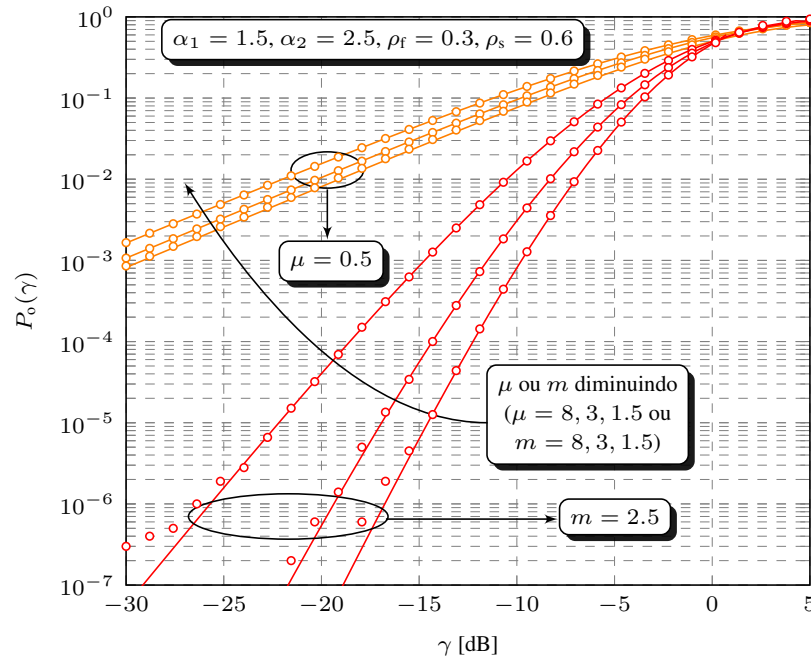


Figura 3.5: A influência de μ e de m sobre a probabilidade de indisponibilidade em canal com desvanecimento sombreado α - μ /Gama duplamente correlacionado.

A Figura 3.6 contém curvas que relacionam diferentes valores de ρ_f e ρ_s a um mesmo valor de ρ . Essas curvas foram obtidas reescrevendo-se a expressão em (3.40) como uma função de ρ_f em ρ_s , admitindo-se diferentes valores de ρ . Por exemplo, considere que ρ é tal que, $\rho = 0.1$ em (3.40), e reescreva a relação matemática entre ρ_f e ρ_s condicionada a esse valor de ρ utilizando (3.40). Feito isto, plote a curva localizada no canto inferior esquerdo da Figura 3.6. Esta curva representa o conjunto de pares de valores de ρ_f e ρ_s que resultam em $\rho = 0.1$.

O conjunto de curvas da Figura 3.6 permite concluir que mais de dois valores de ρ_f e ρ_s podem ser associados ao mesmo valor de ρ . Com base nisso, indaga-se: é possível que o sistema possa apresentar diferentes curvas de OP para um único valor de ρ dependendo dos valores de ρ_f e de ρ_s ? A Figura 3.7 apresenta a resposta: sim! As curvas na Figura 3.7 mostram que é possível que o sistema apresente diferentes valores de $P_o(\gamma)$ para um mesmo γ sendo que o valor de ρ permanece constante e ρ_f e ρ_s variam. Ressalta-se então a importância de identificar como a correlação no desvanecimento e no sombreado ocorrem sendo possível obter uma melhora no desempenho do sistema mesmo que a correlação na potência entre as cópias do sinal recebido pelos dois ramos seja constante.

As estatísticas conjuntas (FDP e FDC) dadas em (3.11) e (3.15), embora representadas por meio de uma série infinita, convergem de maneira rápida para um dado valor prático de precisão. O mesmo aplica-se à probabilidade de indisponibilidade. Como exemplo, a Tabela 3.1 fornece o número de termos K e L em (3.51) considerando sete casas decimais de precisão e vários valores para α_1 , α_2 , μ , m , ρ_f e ρ_s , sendo γ e $\bar{\gamma}_i$ fixos tais que, $\gamma = -10$ dB e $\bar{\gamma}_i = 1$ dB, $i = 1, 2$. Note que, de uma maneira geral, o número de termos necessários na série é pequeno e, de maneira particular, o número de termos cresce com o aumento de ρ_f ou ρ_s e diminui com o aumento de α_1 ou α_2 .

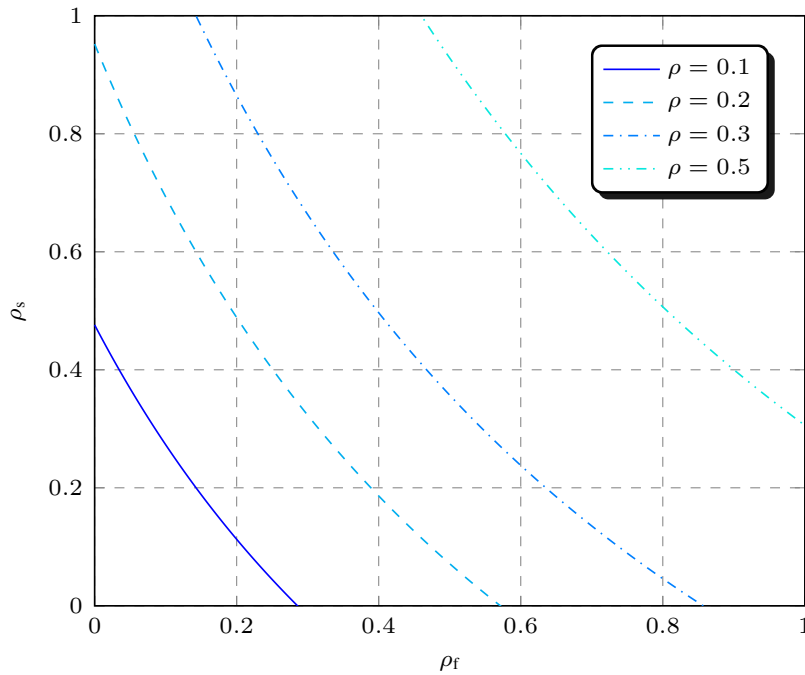


Figura 3.6: Diferentes valores de ρ_f e de ρ_s que resultam em um mesmo valor de coeficiente de correlação na potência em canal com desvanecimento sombreado α - μ /Gama duplamente correlacionado.

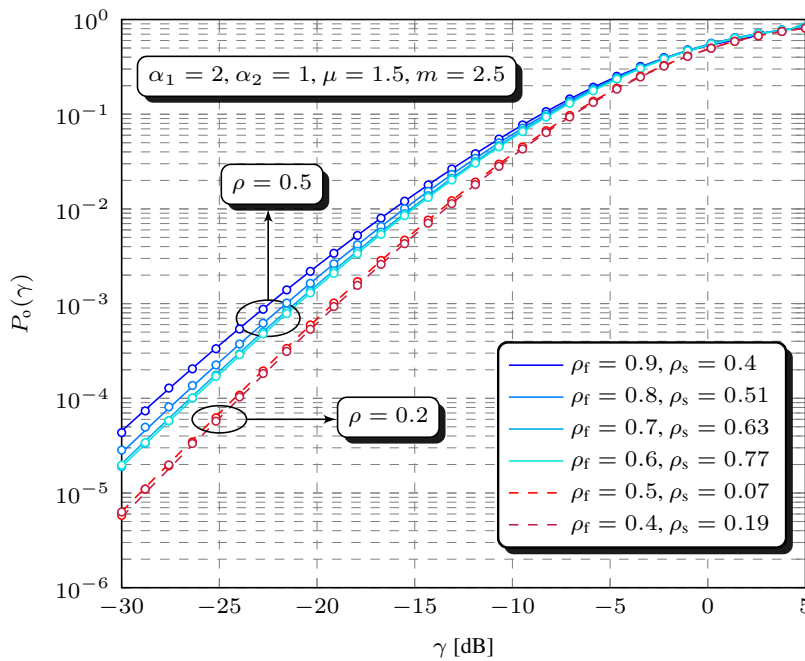


Figura 3.7: Diferentes curvas de probabilidade de indisponibilidade referentes ao mesmo ρ em canal com desvanecimento sombreado α - μ /Gama duplamente correlacionado.

Tabela 3.1: Número de termos em (3.51) necessários para sete casas decimais de precisão.

α_1	α_2	μ	m	ρ_f	ρ_s	K, L
1.7	3.2	2.3	3.4	0.55	0	3
		2.3	3.4	0.81	0	7
		2.3	3.4	0.94	0	17
1.7	3.2	2.3	3.4	0	0.55	8
		2.3	3.4	0	0.81	18
		2.3	3.4	0	0.94	49
1.7	3.2	1	1	0.45	0.45	10
		1.75	1			12
		2.5	1			14
1.7	3.2	1	1.75	0.45	0.45	12
		1	2.5			14
4.1	2.9	1.3	0.3	0.42	0.35	15
6.3						14
2.9	1.2	1.3	0.3	0.42	0.35	16
	3.7					15

3.11 Conclusões

Neste Capítulo, analisou-se o canal de desvanecimento α - μ com dupla diversidade admitindo-se a existência de sombreamento com efeito na aleatoriedade da potência média de cada um dos ramos de diversidade. O modelo de sombreamento utilizado foi a distribuição bivariável Gama. Foi possível obter resultados teóricos e provenientes de simulações que concordam satisfatoriamente. Foram obtidas estatísticas conjuntas e não conjuntas como função densidade de probabilidade, função de distribuição cumulativa e momentos, todas representadas por meio de expressões analíticas. Além disso, a expressão do coeficiente de correlação na potência também foi obtida. Em particular, discutiu-se a derivação de outras distribuições a partir da α - μ /Gama com especial atenção para a distribuição Nakagami/Gama bivariável. Como exemplo de aplicação da distribuição α - μ /Gama, utilizou-se a métrica de análise de desempenho denominada probabilidade de indisponibilidade em um sistema SC. Concluiu-se que o aumento dos parâmetros de desvanecimento e sombreamento afetam positivamente o desempenho de um sistema SC conforme aumentam. A justificativa deste resultado vem do fato de que parâmetros de desvanecimento ou sombreamento maiores indicam um ambiente menos agressivo à comunicação sem fio. Além disso, a correlação entre os sinais recebidos por ambos os ramos de diversidade, seja em relação ao desvanecimento ou ao sombreamento, contribui negativamente para o sistema pois, a probabilidade das menores RSRs instantâneas ocorrerem aumenta conforme a correlação também aumenta. Por fim, observou-se que um único valor de correlação na potência entre as envoltórias α - μ /Gama pode caracterizar diferentes curvas de desempenho de um sistema SC revelando que, é possível obter melhores desempenhos alterando a correlação característica do desvanecimento ou do sombreamento considerando um mesmo valor do coeficiente de correlação na potência característico do desvanecimento sombreado.

Capítulo 4

Conclusões e Trabalhos Futuros

4.1 Conclusões

O objetivo principal o qual consiste em explorar modelos probabilísticos de canais compostos de desvanecimento sombreado multiplicativo foi alcançado com sucesso. Os modelos de canais α - μ /Gama e Nakagami- m_f /Nakagami- m_s foram analisados por meio da métrica de probabilidade de indisponibilidade. Além disso, algumas expressões como função densidade de probabilidade, função de distribuição cumulativa, momentos e coeficiente de correlação foram obtidas em formas fechadas. Quando não foi possível obtê-las em formas fechadas, a saber, para o modelo Nakagami- m_f /Nakagami- m_s , ainda conseguiu-se analisar o desempenho de um sistema com diversidade utilizando o combinador por seleção por meio de integração numérica. As observações realizadas permitiram compreender de forma mais precisa a influência do sombreado multiplicativo em um canal outrora, que apresentava somente desvanecimento. De fato, a principal contribuição desta dissertação é a análise da influência da correlação entre os processos internos e no sombreado sobre o desempenho do sistema: diferentes curvas de desempenho podem existir para uma mesma correlação e o sombreado pode ser tão agressivo quanto o desvanecimento dependendo do modelo de canal em questão.

4.2 Trabalhos Futuros

Ainda existem muitas oportunidades a serem exploradas. Dentre elas, pode-se mencionar:

1. O uso da distribuição α - μ para modelar o sombreado, obtendo o modelo bivariável α - μ/α - μ ;
2. Analisar um outro modelo de sombreado que implica na multiplicação das componentes Gaussianas por outras variáveis aleatórias;
3. A adição da mobilidade aos modelos compostos de desvanecimento sombreado multiplicativo aqui apresentados.

Referências Bibliográficas

- [1] D. A. Guimaraes, *Digital transmission: a simulation-aided introduction with Vis-Sim/Comm*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [2] P. Shankar, *Fading and Shadowing in Wireless Systems*, ser. SpringerLink : Bücher. Springer New York, 2011.
- [3] D. O. Reudink, “Properties of mobile radio propagation above 400 MHz,” *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 23, no. 4, pp. 143–159, 1974.
- [4] M. K. Simon and M.-S. Alouini, *Digital communication over fading channels*. John Wiley & Sons, 2005, vol. 95.
- [5] W. R. Braun and U. Dersch, “A physical mobile radio channel model,” *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 40, no. 2, pp. 472–482, May 1991.
- [6] M. Nakagami, “The m -distribution—A general formula of intensity distribution of rapid fading,” in *Statistical Methods in Radio Wave Propagation*, W. Hoffman, Ed. Pergamon, 1960, pp. 3 – 36.
- [7] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, ser. Applied mathematics series. Dover Publications, 1965.
- [8] L. Rubio, N. Cardona, S. Flores, J. Reig, and L. Juan-Llacer, “The use of semi-deterministic propagation models for the prediction of the short-term fading statistics in mobile channels,” in *VTC 1999-Fall. IEEE VTS 50th Vehicular Technology Conference*, vol. 3, Sep. 1999, pp. 1460–1464.
- [9] M. D. Yacoub, “The κ - μ distribution and the η - μ distribution,” *IEEE Antennas Propag. Mag.*, vol. 49, no. 1, pp. 68–81, Feb. 2007.
- [10] —, “The α - μ distribution: A physical fading model for the Stacy distribution,” *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 56, no. 1, pp. 27–34, Jan. 2007.
- [11] A. J. Coulson, A. G. Williamson, and R. G. Vaughan, “A statistical basis for log-normal shadowing effects in multipath fading channels,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 46, no. 4, pp. 494–502, Apr. 1998.
- [12] A. Abdi and M. Kaveh, “On the utility of gamma pdf in modeling shadow fading (slow fading),” in *1999 IEEE 49th Vehicular Technology Conference*, vol. 3, May 1999, pp. 2308–2312.
- [13] M. Siddiqui and G. Weiss, “Families of distributions for hourly median power and instantaneous power of received radio signals,” *Journal of Res. NBS*, vol. 67, no. 6, pp. 753–762, 1963.

- [14] A. B. Z. Salem and T. D. Mount, "A convenient descriptive model of income distribution: The gamma density," *Econometrica*, vol. 42, no. 6, pp. 1115–1127, 1974. [Online]. Available: <http://www.jstor.org/stable/1914221>
- [15] A. Abdi and M. Kaveh, " K distribution: an appropriate substitute for Rayleigh-lognormal distribution in fading-shadowing wireless channels," *Electronics Letters*, vol. 34, no. 9, pp. 851–852, April 1998.
- [16] P. M. Shankar, "Outage probabilities in shadowed fading channels using a compound statistical model," *IEE Proceedings - Communications*, vol. 152, no. 6, pp. 828–832, Dec. 2005.
- [17] I. Trigui, A. Laourine, S. Affes, and A. Stephenne, "Performance analysis of mobile radio systems over composite fading/shadowing channels with co-located interference," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 8, no. 7, pp. 3448–3453, Jul. 2009.
- [18] J.-C. Lin, W.-C. Kao, Y. T. Su, and T.-H. Lee, "Outage and coverage considerations for microcellular mobile radio systems in a shadowed-Rician/shadowed-Nakagami environment," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 48, no. 1, pp. 66–75, Jan. 1999.
- [19] J. F. Paris, "Statistical characterization of κ - μ shadowed fading," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 63, no. 2, pp. 518–526, Feb. 2014.
- [20] A. A. Abu-Dayya and N. C. Beaulieu, "Performance of micro- and macro-diversity on shadowed Nakagami fading channels," in *IEEE Global Telecommunications Conference GLOBECOM' 91*, vol. 2, Dec 1991, pp. 1121–1124.
- [21] J. Lopez-Fernandez, J. F. Paris, and E. Martos-Naya, "Bivariate Rician shadowed fading model," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 67, no. 1, pp. 378–384, Jan. 2018.
- [22] M. A. G. Villavicencio, R. A. A. de Souza, G. C. de Souza, and M. D. Yacoub, "A bivariate κ - μ distribution," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 65, no. 7, pp. 5737–5743, Jul. 2016.
- [23] R. A. A. de Souza and M. D. Yacoub, "Bivariate Nakagami- m distribution with arbitrary correlation and fading parameters," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 7, no. 12, pp. 5227–5232, Dec. 2008.
- [24] E. J. Leonardo and M. D. Yacoub, "The product of two α - μ variates and the composite α - μ multipath-shadowing model," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 64, no. 6, pp. 2720–2725, Jun. 2015.
- [25] J. R. Mendes, M. D. Yacoub, and U. S. Dias, "Power correlation coefficient of a very general fading model in maximal ratio combining," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 58, no. 9, pp. 2472–2479, Sep. 2010.
- [26] C. C. Tan and N. C. Beaulieu, "Infinite series representations of the bivariate Rayleigh and Nakagami- m distributions," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 45, no. 10, pp. 1159–1161, Oct. 1997.
- [27] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, 7th ed. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2007.
- [28] N. Simmons, C. R. Nogueira da Silva, S. L. Cotton, P. C. Sofotasios, S. K. Yoo,

- and M. D. Yacoub, “On shadowing the κ - μ fading model,” *arXiv e-prints*, p. arXiv:1808.05013, Aug. 2018.
- [29] P. S. Bithas, N. C. Sagias, and P. T. Mathiopoulos, “The bivariate generalized- K (K_G) distribution and its application to diversity receivers,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 57, no. 9, pp. 2655–2662, Sep. 2009.
- [30] P. S. Bithas, N. C. Sagias, P. T. Mathiopoulos, S. A. Kotsopoulos, and A. M. Maras, “On the correlated K -distribution with arbitrary fading parameters,” *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 15, pp. 541–544, 2008.
- [31] Z. Ni, X. Zhang, X. Liu, and D. Yang, “Bivariate Weibull-gamma composite distribution with arbitrary fading parameters,” *IEEE Power Electron. Lett.*, vol. 48, no. 18, pp. 1165–1167, Aug. 2012.
- [32] N. C. Sagias, G. K. Karagiannidis, P. S. Bithas, and P. T. Mathiopoulos, “On the correlated Weibull fading model and its applications,” in *VTC-2005-Fall. IEEE 62nd Vehicular Technology Conference*, vol. 4, 2005, pp. 2149–2153.
- [33] T. S. B. Reddy, R. Subadar, and P. R. Sahu, “Outage probability of selection combiner over exponentially correlated Weibull-gamma fading channels for arbitrary number of branches,” in *2010 National Conference On Communications (NCC)*, Jan. 2010, pp. 1–5.
- [34] S. Nadarajah and S. Kotz, “Bivariate gamma distributions, sums and ratios,” *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society*, vol. 37, no. 2, pp. 241–274, Jun 2006. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/s00574-006-0012-3>
- [35] A. Leon-Garcia, *Probability, Statistics, and Random Processes For Electrical Engineering*. Pearson Education, 2011.
- [36] Wolfram, 2019. [Online]. Available: <http://functions.wolfram.com/07.23.03.0081.01>
- [37] A. Papoulis and H. Saunders, “Probability, random variables and stochastic processes,” 1989.
- [38] J. Gentle, *Random Number Generation and Monte Carlo Methods*, ser. Statistics and Computing. Springer New York, 2013.
- [39] C. Meijer, “Asymptotische entwicklungen von besselschen und hankelschen funktionen für große werte des arguments und der ordnung,” *Mathematische Annalen*, vol. 108, no. 1, pp. 321–359, 1933.
- [40] B. Braaksma, “In memoriam CS Meijer,” *Nieuw Arch. Voor Wiskunde (3)*, vol. 23, pp. 95–104, 1975.
- [41] E. W. Weisstein, “Meijer G-function.” [Online]. Available: <http://mathworld.wolfram.com/MeijerG-Function.html>

Apêndice A

Códigos em MATLAB

```
1 %-----
2 % Esta funcao estima a probabilidade de indisponibilidade
3 % de um sistema com selecao combinada de dois ramos a
4 % partir das amostras de duas envoltorias alpha-mu cujas
5 % potencias medias sao influenciadas por outras duas
6 % variaveis Gama.
7 %
8 % O valor de E_b/N_0 adotado e tal que, E_b/N_0 = 1 e o
9 % intervalo de dominio de potencias e [-30 dB, 5 dB].
10 %
11 % Os parametros de entrada sao os fatores de n o
12 % linearidade do meio alpha_1 e alpha_2 , o fator de
13 % desvanecimento mu, o fator de sombreamento m, os
14 % coeficientes de correlacao lambda_f e lambda_s e o
15 % numero de amostras n.
16 %-----
17
18 function [mean_R1, mean_R2, coef_correl_estim_pot ,
19           coef_correl_estim_pot_sombr] =
20           gerar_graf_outage_alpha_mu_biv_corr_sombr_gama_rms_
21           corr_mu_m(alpha_1 , alpha_2 , mu, m, lambda_f , lambda_s ,
22           n)
23 %-----
24 [mean_R1 , mean_R2 , coef_correl_estim_pot ,
25   coef_correl_estim_pot_sombr , amostr_envolt_1 ,
26   amostr_envolt_2] =
27   gerar_alpha_mu_biv_corr_sombr_gama_rms_corr(alpha_1 ,
28   alpha_2 , mu, m, lambda_f , lambda_s , n);
```

```
26 %-----
27 % Calculando a potencia das amostras das envoltorias
28 % geradas.
29 %-----
30 amostr_snr = [amostr_envolt_1.^2; amostr_envolt_2.^2];
31
32 %-----
33 % Calculando o maior valor entre os pares de potencia das
34 % envoltorias.
35 %-----
36 amostr_selec_comb = max(amostr_snr,[],1);
37
38 %-----
39 % Estimando a probabilidade de indisponibilidade dos
40 % maiores valores de potencia calculados entre os pares
41 % das envoltorias alpha-mu-gama gerados.
42 %-----
43 t = 1;
44 pot_db = linspace(-30,5,30);
45 pot_linear = 10.^(pot_db/10);
46 for j = 1:length(pot_linear);
47     cdf_estim(t,j) = sum(amostr_selec_comb <= pot_linear(
48         j))/length(amostr_selec_comb);
49
50 %-----
51 % Salvando os valores das probabilidades de
52 % indisponibilidades estimadas.
53 %-----
54 dlmwrite('
55     amostras_outage_alpha_mu_bivariada_corr_sombr_gama_rms
56     _corr_teste.dat',[pot_db', cdf_estim'],'-append','
57     delimiter','\t','precision','%.20f');
58 end
59
60 %-----
61 % Esta funcao gera amostras de duas variaveis alpha-mu
62 % correlacionadas cujas potencias medias sofrem
63 % influencia de duas variaveis Gama tambem
64 % correlacionadas.
65 %
66 % O metodo utilizado para gerar tais amostras foi a
67 % fatoracao de Cholesky que faz uso da matriz denominada
68 % de fator de Cholesky da matriz dos coeficientes de
69 % correlacao entre as componentes gaussianas.
70 %-----
```

```
11 %
12 % Os parametros de entrada sao os fatores de n o
13 % linearidade do meio alpha_1 e alpha_2 , o fator de
14 % desvanecimento mu, o fator de sombreamento m, os
15 % coeficientes de correlacao lambda_f e lambda_s e o
16 % numero de amostras n.
17 %-----
18
19 function [mean_2alpha1_R1 , mean_2alpha2_R2 ,
    coef_correl_estim_pot , coef_correl_estim_pot_sombr ,
    amostr_envolt_1 , amostr_envolt_2] =
    gerar_alpha_mu_biv_corr_sombr_gama_rms_corr(alpha_1 ,
    alpha_2 , mu, m, lambda_f, lambda_s, n)
20
21 %-----
22 % Gerando amotras de duas variaveis gama correlacionadas.
23 %-----
24 [coef_correl_estim_pot_sombr , omega_1 , omega_2] =
    gerar_gama_correl(m, lambda_s, n);
25
26 %-----
27 % Definindo o desvio padrao sigma_f em funcao de mu.
28 %-----
29 sigma_f = sqrt(1/(2*mu));
30
31 %-----
32 % Criando a matrizes identidade que armazenara os valores
33 % dos desvios padroes e dos coeficientes de correlacao
34 % das componentes gaussianas.
35 %-----
36 matriz_correl = eye(4*mu,4*mu);
37
38 %-----
39 % Atribuindo aos elementos da matriz de coeficientes de
40 % correlacao os coeficientes de correlacao entre as
41 % componentes gaussianas da primeira e da segunda
42 % envoltorias alpha-mu de mesmo indice.
43 %-----
44 for t = 1:4*mu;
45     for k = 1:4*mu;
46         if mod(k,2) == 1 && t == 2*mu + k && k <= 2*mu
47             matriz_correl(k,t) = lambda_f;
48             matriz_correl(t,k) = lambda_f;
49         end
50         if mod(k,2) == 0 && t == 2*mu + k && k <= 2*mu
51             matriz_correl(k,t) = lambda_f;
```

```
52         matriz_correl(t,k) = lambda_f;
53     end
54 end
55 end
56
57 %-----
58 % Calculando a matriz fator de Cholesky da matriz de
59 % coeficientes de correlacao.
60 %-----
61 fator_cholesky = chol(matriz_correl, 'lower');
62
63 %-----
64 % Calculando a matriz de amostras das componentes
65 % gaussianas considerando a correlacao e sendo os
66 % elementos da primeira linha ate a (2*mu)-esima linha
67 % referentes a primeira envoltoria alpha-mu e os
68 % elementos da (2*mu + 1)-esima linha ate a (4*mu)-esima
69 % linha referentes a segunda envoltoria alpha-mu com os
70 % respectivos desvios padroes.
71 %-----
72 amostr_com_correl = fator_cholesky*randn(4*mu,n);
73
74 %-----
75 % Calculando a matriz de componentes gaussianas em funcao
76 % dos desvios padroes.
77 %-----
78 for g = 1:2*mu;
79     amostr_com_correl(g,:) = sigma_f.*amostr_com_correl(g
80         ,:);
81 end
82 for q = 2*mu+1:4*mu;
83     amostr_com_correl(q,:) = sigma_f.*amostr_com_correl(q
84         ,:);
85 end
86
87 %-----
88 % Calculando as amostras de potencias das componentes
89 % gaussianas correlacionadas.
90 %-----
91 amostr_pot_correl = amostr_com_correl.^2;
92
93 %-----
94 % Calculando a matriz de amostras das potencias
95 % influenciadas por um sombreamento gama.
96 %-----
97 for g = 1:2*mu;
```

```
96     amostr_pot_correl(g,:) = omega_1(1,:) .*
97         amostr_pot_correl(g,:);
97 end
98 for q = 2*mu+1:4*mu;
99     amostr_pot_correl(q,:) = omega_2(1,:) .*
100         amostr_pot_correl(q,:);
100 end
101
102 %-----
103 % Calculando as amostras das potencias correlacionadas em
104 % duas matrizes separadas.
105 %-----
106 for q=1:n;
107     amostr_pot_1(1,q) = sum(amostr_pot_correl(1:2*mu,q));
108     amostr_pot_2(1,q) = sum(amostr_pot_correl(2*mu+1:4*mu
109         ,q));
109 end
110
111 %-----
112 % Calculando as amostras das envoltorias alpha-mu-Gama
113 % correlacionadas em duas matrizes separadas.
114 %-----
115 for g = 1:n;
116     amostr_envolt_1(1,g) = nthroot((sum(amostr_pot_correl
117         (1:2*mu,g))), alpha_1);
117 end
118 for g = 1:n;
119     amostr_envolt_2(1,g) = nthroot((sum(amostr_pot_correl
120         (2*mu+1:4*mu,g))), alpha_2);
120 end
121
122 %-----
123 % Estimando o coeficiente de correlacao na potencia entre
124 % as amostras das potencias alpha-mu correlacionadas.
125 %-----
126 coef_correl_estim_pot = corr(amostr_envolt_1.^2',
127     amostr_envolt_2.^2');
127
128 %-----
129 % Estimando a potencia media das duas envoltorias
130 % alpha-mu-gama correlacionadas.
131 %-----
132 mean_2alpha1_R1 = mean(amostr_envolt_1.^(2*alpha_1));
133 mean_2alpha2_R2 = mean(amostr_envolt_2.^(2*alpha_2));
134 end
```

```
1 %-----
2 % Esta funcao gera amostras de uma distribuio
3 % bivariavel Gama a partir da fatoraio de Cholesky.
4 %
5 % Os parametros de entrada sao o fator de sombreamento m,
6 % o coeficiente de correlacao lambda_s e o
7 % numero de amostras n.
8 %-----
9
10 function [coef_correl_estim_pot , amostr_pot_1 ,
11          amostr_pot_2] = gerar_gama_correl(m, lambda_s , n)
12 %-----
13 % Definindo os desvios padroes das componentes gaussianas
14 % a partir do valor da variavel de entrada m.
15 %-----
16 sigma_ws = sqrt(1/(2*m));
17 sigma_zs = sqrt(1/(2*m));
18
19 %-----
20 % Criando duas matrizes identidade que armazenarao os
21 % valores dos desvios padroes e dos coeficientes de
22 % correlacao das componentes gaussianas.
23 %-----
24 matriz_desv = eye(2*m,2*m);
25 matriz_correl = eye(4*m,4*m);
26
27 %-----
28 % Atribuindo a diagonal principal da matriz de desvios
29 % padroes o desvio padrao da primeira componente
30 % gaussiana desde o elemento (1,1) ate o elemento de
31 % posicao (2*m,2*m) e o desvio padrao da segunda
32 % componente gaussianaa desde o elemento
33 % (2*m + 1, 2*m + 1) ate o elemento (4*m,4*m).
34 %-----
35 for a = 1:4*m;
36     if a <= 2*m;
37         matriz_desv(a,a) = sigma_ws;
38     else
39         matriz_desv(a,a) = sigma_zs;
40     end
41 end
42
43 %-----
44 % Atribuindo aos elementos da matriz de coeficientes de
```

```
45 % correlacao os coeficientes de correlacao entre as
46 % componentes gaussianas da primeira e da segunda
47 % componentes de mesmo indice.
48 %-----
49 for t = 1:4*m;
50     for k = 1:4*m;
51         if mod(k,2) == 1 && t == 2*m + k && k <= 2*m
52             matriz_correl(k,t) = lambda_s;
53             matriz_correl(t,k) = lambda_s;
54         end
55         if mod(k,2) == 0 && t == 2*m + k && k <= 2*m
56             matriz_correl(k,t) = lambda_s;
57             matriz_correl(t,k) = lambda_s;
58         end
59     end
60 end
61
62 %-----
63 % Calculando a matriz fator de Cholesky da matriz de
64 % coeficientes de correlacao.
65 %-----
66 fator_cholesky = chol(matriz_correl, 'lower');
67
68 %-----
69 % Calculando a matriz de amostras das componentes
70 % gaussianas considerando a correlacao sendo os elementos
71 % da primeira linha ate a (2*m)-esima linha referentes a
72 % primeira componente gaussiana e os elementos da
73 % (2*m + 1)-esima linha ate a 4*m-esima linha referentes
74 % a segunda componente gaussiana com os respectivos
75 % desvios padroes.
76 %-----
77 amostr_com_correl = matriz_desv*fator_cholesky*randn(4*m,
78     n);
79
80 %-----
81 % Calculando as potencias das componentes gaussianas
82 % correlacionadas.
83 %-----
84
85 amostr_pot_correl = amostr_com_correl.^2;
86
87 %-----
88 % Calculando as amostras das variaveis Gama
89 % correlacionadas em duas matrizes separadas.
90 %-----
91 for q=1:n;
```

```

90     amostr_pot_1(1,q) = sum(amostr_pot_correl(1:2*m,q));
91     amostr_pot_2(1,q) = sum(amostr_pot_correl(2*m+1:4*m,q
    ));
92 end
93
94 %-----
95 % Estimando o coeficiente de correlacao entre as amostras
96 % das duas variaveis Gama.
97 %-----
98 coef_correl_estim_pot = corr(amostr_pot_1',amostr_pot_2')
    ;
99 end

```

```

1 %-----
2 % Esta funcao estima a probabilidade de indisponibilidade
3 % de um sistema com selecao combinada de dois ramos a
4 % partir das amostras de duas envoltorias Nakagami
5 % correlacionadas cujas potencias medias sao
6 % influenciadas por outras duas variaveis Nakagami.
7 %
8 % O valor de E_b/N_0 adotado e tal que, E_b/N_0 = 1 e o
9 % intervalo de dominio de potencias e [-30 dB, 5 dB].
10 %
11 % Os parametros de entrada sao o fator de desvanecimento
12 % m_f, o fator de sombreamento m_s, o coeficiente de
13 % correlacao lambda_f, o coeficiente de correlacao
14 % lambda_s e o numero de amostras n.
15 %-----
16
17 function [coef_correl_estim_pot ,
    coef_correl_estim_pot_sombr] =
    gerar_graf_outage_nakagami_biv_corr_sombr_rms_corr(m_f
    , m_s, lambda_f, lambda_s, n)
18
19 %-----
20 % Gerando as amostras de duas envoltorias Nakagami
21 % correlacionadas.
22 %-----
23 [coef_correl_estim_pot , coef_correl_estim_pot_sombr ,
    amostr_envolt_1 , amostr_envolt_2] =
    gerar_nakagami_biv_corr_sombr_rms_corr(m_f, m_f, m_s,
    lambda_f, lambda_s, n);
24
25 %-----
26 % Calculando a potencia das amostras das envoltorias

```

```
27 % geradas .
28 %-----
29 amostr_snr = [amostr_envolt_1.^2; amostr_envolt_2.^2];
30
31 %-----
32 % Calculando o maior valor entre os pares de potencia
33 % das envoltorias .
34 %-----
35 amostr_selec_comb = max(amostr_snr ,[], 1);
36
37 %-----
38 % Estimando a probabilidade de indisponibilidade dos
39 % maiores valores de potencia calculados entre os pares
40 % das envoltorias Nakagami geradas .
41 %-----
42 t = 1;
43 pot_db = linspace(-30,5,30);
44 pot_linear = 10.^(pot_db/10);
45 for j = 1:length(pot_linear);
46     cdf_estim(t,j) = sum(amostr_selec_comb <= pot_linear(
47         j))/length(amostr_selec_comb);
48
49 %-----
50 % Salvando os valores da probabilidade de
51 % indisponibilidade em um arquivo externo .
52 %-----
53 dlmwrite('
54     amostras_op_nakagami_bivariada_corr_sombreamento_rms_
55     corr_teste.dat',[pot_db', cdf_estim'],'-append',
56     'delimiter','\t','precision','%.20f');
57 end
58
59 %-----
60 % Esta funcao gera amostras de duas envoltorias Nakagami
61 % correlacionadas cujas variancias tem influencia de duas
62 % variaveis Nakagami tambem correlacionadas com segundo
63 % momento igual a 1.
64 %
65 % O metodo utilizado para gerar tais amostras foi a
66 % fatoracao de Cholesky que faz uso da matriz denominada
67 % de fator de Cholesky da matriz dos coeficientes de
68 % correlacao entre as componentes gaussianas .
69 %
70 % Os parametros de entrada sao o fator de desvanecimento
```

```
13 % m_f, o fator de sombreamento m_s, o coeficiente de
14 % correlacao lambda_f, o coeficiente de correlacao
15 % lambda_s e o numero de amostras n.
16 %-----
17
18 function [coef_correl_estim_pot ,
           coef_correl_estim_pot_sombr , amostr_envolt_1 ,
           amostr_envolt_2] =
           gerar_nakagami_biv_corr_sombr_rms_corr(m_f, m_f, m_s,
           lambda_f, lambda_s, n)
19
20 %-----
21 % Definindo o desvio padrao sigma_1f e sigma_2f das
22 % componentes gaussianas em funcao de duas variaveis com
23 % distribui o Nakagami bivariavel.
24 %-----
25 [coef_correl_estim_pot_sombr , omega_1, omega_2] =
           gerar_nakagami_correl(m_s, lambda_s, n);
26 sigma_1f = sqrt(omega_1/(2*m_f));
27 sigma_2f = sqrt(omega_2/(2*m_f));
28
29 %-----
30 % Criando duas matrizes identidade que armazenarao os
31 % valores dos desvios padroes e dos coeficientes de
32 % correlacao das componentes gaussianas.
33 %-----
34 %matriz_desv = eye(2*m_f,2*m_f);
35 matriz_correl = eye(4*m_f,4*m_f);
36
37 %-----
38 % Atribuindo a diagonal principal da matriz de desvios
39 % padroes o desvio padrao das componentes gaussianas da
40 % primeira envoltoria Nakagami desde o elemento (1,1) ate
41 % o elemento de posicao (2*m_f,2*m_f) e o desvio padrao
42 % das componentes gaussianas da segunda envoltoria
43 % Nakagami desde o elemento (2*m_f + 1, 2*m_f + 1) ate o
44 % elemento (4*m_f,4*m_f).
45 %-----
46 %for a = 1:4*m_f*n;
47 %     if a <= 2*m_f*n;
48 %         matriz_desv(a,a) = sigma_1f(1,a);
49 %     else
50 %         matriz_desv(a,a) = sigma_2f(1,a);
51 %     end
52 %end
53
```

```
54 %-----
55 % Atribuindo aos elementos da matriz de coeficientes de
56 % correlacao os coeficientes de correlacao entre as
57 % componentes gaussianas da primeira e da segunda
58 % envoltorias Nakagami de mesmo indice.
59 %-----
60 for t = 1:4*m_f;
61     for k = 1:4*m_f;
62         if mod(k,2) == 1 && t == 2*m_f + k && k <= 2*m_f
63             matriz_correl(k,t) = lambda_f;
64             matriz_correl(t,k) = lambda_f;
65         end
66         if mod(k,2) == 0 && t == 2*m_f + k && k <= 2*m_f
67             matriz_correl(k,t) = lambda_f;
68             matriz_correl(t,k) = lambda_f;
69         end
70     end
71 end
72
73 %-----
74 % Calculando a matriz fator de Cholesky da matriz de
75 % coeficientes de correlacao.
76 %-----
77 fator_cholesky = chol(matriz_correl, 'lower');
78
79 %-----
80 % Calculando a matriz de amostras das componentes
81 % gaussianas considerando a correlacao e sendo os
82 % elementos da primeira linha ate a (2*m_f)-esima linha
83 % referentes a primeira envoltoria Nakagami e os
84 % elementos da (2*m_f + 1)-esima linha ate a 4*m_f-esima
85 % linha referentes a segunda envoltoria Nakagami com os
86 % respectivos desvios padroes.
87 %-----
88 amostr_com_correl = fator_cholesky*randn(4*m_f,n);
89
90 %-----
91 % Calculando a matriz de componentes gaussianas
92 % influenciadas por um sombreamento Nakagami.
93 %-----
94 for g = 1:2*m_f;
95     amostr_com_correl(g,:) = sigma_1f(1,:).*
96         amostr_com_correl(g,:);
97 end
98 for q = 2*m_f+1:4*m_f;
99     amostr_com_correl(q,:) = sigma_2f(1,:).*
```

```
amostr_com_correl(q,:);
99 end
100
101 %-----
102 % Calculando as amostras de potencias das componentes
103 % gaussianas correlacionadas.
104 %-----
105 amostr_pot_correl = amostr_com_correl.^2;
106
107 %-----
108 % Calculando as amostras das potencias Nakagami
109 % correlacionadas em duas matrizes separadas.
110 %-----
111 amostr_pot_1 = sum(amostr_pot_correl(1:2*m_f,:));
112 amostr_pot_1 =amostr_pot_1.^2;
113 amostr_pot_2 = sum(amostr_pot_correl(2*m_f+1:4*m_f,:));
114 amostr_pot_2 =amostr_pot_2.^2;
115
116 %-----
117 % Estimando o coeficiente de correlacao entre as amostras
118 % das duas potencias Nakagami correlacionadas.
119 %-----
120 coef_correl_estim_pot = corr(amostr_pot_1',amostr_pot_2')
    ;
121
122 %-----
123 % Calculando as amostras das envoltorias Nakagami
124 % correlacionadas em duas matrizes separadas.
125 %-----
126 for g = 1:n;
127     amostr_envolt_1(1,g) = sqrt(sum(amostr_pot_correl
        (1:2*m_f,g)));
128 end
129 for g = 1:n;
130     amostr_envolt_2(1,g) = sqrt(sum(amostr_pot_correl(2*
        m_f+1:4*m_f,g)));
131 end
132
133 %-----
134 % Estimando o coeficiente de correlacao entre as amostras
135 % das duas envoltorias Nakagami correlacionadas.
136 %-----
137 coef_correl_estim_envolt = corr(amostr_envolt_1'.^2,
    amostr_envolt_2'.^2);
138 end
```

```
1 %-----
2 % Esta funcao gera amostras de uma distribuicao
3 % bivariavel Nakagami a partir da fatoracao de Cholesky
4 % aplicada a uma matriz cujos elementos representam duas
5 % variaveis normalmente distribuidas e cujos
6 % segundos momentos s o iguais a 1.
7 %
8 % Os parametros de entrada sao o fator de sombreado
9 % m_s, o coeficiente de correlacao lambda_s e o numero
10 % de amostras n.
11 %-----
12
13 function [coef_correl_estim_pot , amostr_r_1 , amostr_r_2]
14     = gerar_nakagami_correl(m_s, lambda_s , n)
15
16 %-----
17 % Definindo o desvio padrao sigma_1s e sigma_2s.
18 %-----
19 sigma_1s = sqrt(1/(2*m_s));
20 sigma_2s = sqrt(1/(2*m_s));
21
22 %-----
23 % Criando duas matrizes identidade que armazenarao os
24 % valores dos desvios padrao e dos coeficientes de
25 % correlacao das componentes gaussianas.
26 %-----
27 matriz_desv = eye(2*m_s,2*m_s);
28 matriz_correl = eye(4*m_s,4*m_s);
29
30 %-----
31 % Atribuindo a diagonal principal da matriz de desvios
32 % padrao o desvio padrao da primeira componente gaussiana
33 % desde o elemento (1,1) ate o elemento de posicao
34 % (2*m_s,2*m_s) e o desvio padrao da segunda componente
35 % gaussiana desde o elemento (2*m_s + 1, 2*m_s + 1) ate o
36 % elemento (4*m_s,4*m_s).
37 %-----
38 for a = 1:4*m_s;
39     if a <= 2*m_s;
40         matriz_desv(a,a) = sigma_1s;
41     else
42         matriz_desv(a,a) = sigma_2s;
43     end
44 end
```

```
45 %-----
46 % Atribuindo aos elementos da matriz de coeficientes de
47 % correlacao os coeficientes de correlacao entre as
48 % componentes gaussianas da primeira e da segunda
49 % componentes de mesmo ndice .
50 %-----
51 for t = 1:4*m_s;
52     for k = 1:4*m_s;
53         if mod(k,2) == 1 && t == 2*m_s + k && k <= 2*m_s
54             matriz_correl(k,t) = lambda_s;
55             matriz_correl(t,k) = lambda_s;
56         end
57         if mod(k,2) == 0 && t == 2*m_s + k && k <= 2*m_s
58             matriz_correl(k,t) = lambda_s;
59             matriz_correl(t,k) = lambda_s;
60         end
61     end
62 end
63
64 %-----
65 % Calculando a matriz fator de Cholesky da matriz de
66 % coeficientes de correlacao .
67 %-----
68 fator_cholesky = chol(matriz_correl , 'lower');
69
70 %-----
71 % Calculando a matriz de amostras das componentes
72 % gaussianas considerando a a correlacao e sendo os
73 % elementos da primeira linha ate a (2*m_s)-esima linha
74 % referentes a primeira componente gaussiana e os
75 % elementos da (2*m_s + 1)-esima linha ate a 4*m_s-esima
76 % linha referentes a segunda componente gaussiana com os
77 % respectivos desvios padroes .
78 %-----
79 amostr_com_correl = matriz_desv*fator_cholesky*randn(4*
    m_s,n);
80
81 %-----
82 % Calculando as potencias das componentes gaussianas
83 % correlacionadas .
84 %-----
85 amostr_pot_correl = amostr_com_correl.^2;
86
87 %-----
88 % Somando as amostras das potencias correlacionadas em
89 % duas matrizes separadas .
```

```
90 %-----
91 amostr_pot_1 = sum(amostr_pot_correl(1:2*m_s,:));
92 amostr_pot_1_norm = amostr_pot_1.^2;
93 amostr_pot_2 = sum(amostr_pot_correl(2*m_s+1:4*m_s,:));
94 amostr_pot_2_norm = amostr_pot_2.^2;
95
96 %-----
97 % Estimando o coeficiente de correlação entre as
    amostras
98 % das duas potências Nakagami,  $R_1^2$  e  $R_2^2$ .
99 %-----
100 coef_correl_estim_pot = corr(amostr_pot_1_norm',
    amostr_pot_2_norm');
101
102 %-----
103 % Separando a matriz única de componentes gaussianas em
104 % duas e calculando as raízes quadradas da soma dos
105 % quadrados das componentes referentes a cada uma das
106 % duas variáveis Nakagami.
107 %-----
108 if m_s == 0.5;
109     amostr_r_1 = sqrt(amostr_pot_correl(1:2*m_s,:));
110     amostr_r_2 = sqrt(amostr_pot_correl(2*m_s+1:4*m_s,:))
    ;
111 else
112     amostr_r_1 = sqrt(sum(amostr_pot_correl(1:2*m_s,:)));
113     amostr_r_2 = sqrt(sum(amostr_pot_correl(2*m_s+1:4*m_s
    ,:)));
114 end
115
116 %-----
117 % Estimando o coeficiente de correlação entre as amostras
    das duas
118 % variáveis Nakagami geradas.
119 %-----
120 coef_correl_estim_envolt = corr(amostr_r_1', amostr_r_2');
121 end
```


Apêndice B

A função G de Meijer

A função G de Meijer foi definida por Cornelis Simon Meijer em 1936 [39] como a integral de contorno [40]

$$G_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\prod_{h=1}^m \Gamma(b_h - s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + s)}{\prod_{h=m+1}^q \Gamma(1 - b_h + s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - s)} x^s ds \quad (\text{B.1})$$

em que m , n , p e q representam números inteiros tais que, $0 \leq n \leq p$ e $0 \leq m \leq q$ e os polos de $\prod_{h=1}^m \Gamma(b_h - s)$ não devem coincidir com os polos de $\prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + s)$. O contorno C pode ser definido de três forma diferentes [27, 9.302]:

1. O contorno C é um caminho que vai de $-\infty$ à ∞ de maneira que os polos de $\Gamma(1 - a_j + s)$ estão à esquerda e os polos de $\Gamma(b_h - s)$ estão à direita, sendo $j = 1, 2, \dots, n$ e $h = 1, 2, \dots, m$. Neste caso, a integral em (B.1) converge para

$$p + q < 2(m + n), \quad |\arg x| < \left(m + n - \frac{p}{2} - \frac{q}{2} \right) \pi; \quad (\text{B.2})$$

2. O contorno C é um caminho fechado, com início e término em ∞ , que circunda os polos das funções $\Gamma(b_h - s)$ uma vez na direção negativa e todos os polos de $\Gamma(1 - a_j + s)$ devem permanecer fora de C , sendo $j = 1, 2, \dots, n$ e $h = 1, 2, \dots, m$. Neste caso, a integral em (B.1) converge para

$$q \geq 1 \text{ e ou } p < q \text{ ou } p = q \text{ e } |x| < 1; \quad (\text{B.3})$$

3. O contorno C é um caminho fechado com término em $-\infty$ que circunda os polos das funções $\Gamma(1 - a_j + s)$ uma vez na direção positiva e todos os polos de $\Gamma(b_h - s)$ devem permanecer fora de C , sendo $j = 1, 2, \dots, n$ e $h = 1, 2, \dots, m$. Neste caso, a integral em (B.1) converge para

$$p \geq 1 \text{ e ou } p > q \text{ ou } p = q \text{ e } |x| > 1. \quad (\text{B.4})$$

A função G de Meijer é a mais generalizada função do tipo hipergeométrica [40] e pode ser reduzida para funções mais simples como [41]

$$G_{2,2}^{1,2} \left(x \left| \begin{matrix} 1,1 \\ 1,0 \end{matrix} \right. \right) = \ln(x + 1) \quad (\text{B.5})$$

$$G_{2,2}^{1,2} \left(x \left| \begin{matrix} 1,1 \\ 1,1 \end{matrix} \right. \right) = \frac{x}{x + 1} \quad (\text{B.6})$$

$$G_{1,0}^{0,1} \left(x \left| \begin{matrix} 1-a \end{matrix} \right. \right) = \exp\left(-\frac{1}{x}\right) x^{-a}. \quad (\text{B.7})$$

Em especial destaca-se

$$G_{p,q}^{m,n} \left(z \middle| \begin{matrix} a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m, b_{m+1}, \dots, b_q \end{matrix} \right) = \sum_{k=1}^m \frac{\prod_{j=1, j \neq k}^m \Gamma(b_j - b_k) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + b_k)}{\prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - b_k) \prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + b_k)} z^{b_k} \\ \times {}_pF_{q-1} \left(1 - a_1 + b_k, \dots, 1 - a_p + b_k + 1; 1 - b_1 + b_k, \dots, 1 - b_{k-1} + b_k, 1 - b_{k+1} + b_k, \dots, 1 + b_k - b_q; (-1)^{p-m-n} z \right) \quad (\text{B.8})$$

em que $p < q$ ou $p = q$ e $m + n > p$ ou $p = q$ e $m + n = p$ e $|z| < 1$ ou $b_j - b_k \notin \mathbb{Z}$ com $j \neq k$ e $1 \leq j \leq m$ e $1 \leq k \leq m$.