

Probabilidade de Erro em Sistemas  
MPSK sob a Influência de Canais  
com Desvanecimento e Estimação  
Imperfeita da Fase da Portadora

PEDRO EMÍLIO GÓRIA SILVA

FEVEREIRO / 2020





**PROBABILIDADE DE ERRO EM SISTEMAS MPSK SOB A INFLUÊNCIA DE CANAIS COM DESVANECIMENTO E ESTIMAÇÃO IMPERFEITA DA FASE DA PORTADORA**

PEDRO EMÍLIO GÓRIA SILVA

Dissertação apresentada ao Instituto Nacional de Telecomunicações, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Telecomunicações.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Rausley Adriano Amaral de Souza.

Silva, Pedro Emílio Gória

S586p

Probabilidade de Erro em Sistemas MPSK sob a Influência de Canais Desvanecimento e Estimulação Imperfeita da Fase da Portadora. / Pedro Emílio Gória Silva. – Santa Rita do Sapucaí, 2020.

53p.

Orientador: Prof. Dr. Rausley Adriano Amaral de Souza.

Dissertação de Mestrado em Telecomunicações – Instituto Nacional de Telecomunicações – INATEL.

Inclui bibliografia.

1. Desvanecimento 2. Taxa média de erro de bits 3. Taxa média de erro de símbolos 4. Ruído de fase 5. Distribuição Tikhonov 6. Mestrado em Telecomunicações. I. Souza, Rausley Adriano Amaral de. II. Instituto Nacional de Telecomunicações – INATEL. III. Título.

CDU 621.39

## FOLHA DE APROVAÇÃO

Dissertação defendida e aprovada em \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_,  
pela comissão julgadora:

---

Prof. Dr. Rausley Adriano Amaral de Souza  
INATEL

---

Prof. Dr. Pedro Henrique Juliano Nardelli  
LAPPEENRANTA-LAHTI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY – LUT

---

Dr. Thiago Alencar Moreira de Bairros  
INATEL

---

**Coordenador do Curso de Mestrado**  
Prof. Dr. José Marcos Câmara Brito



*“Indubitavelmente a crítica da razão conduz à ciência, ao passo que o uso dogmático da razão, sem crítica, conduz, pelo contrário, a afirmações infundadas, a que se podem opor outras por igual verossímeis e, sem dúvida, ao ceticismo.”*

---

*Emmanuel Kant*



*À minha amada esposa,  
Aline*



# Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Dr. Rausley Adriano Amaral de Souza, pelos ensinamentos, companheirismo e apoio. Sem os quais este trabalho nunca seria produzido. Sobretudo, muito obrigado pela excelente orientação!

À minha esposa, quem dedicou, dentre outras tantas coisas, enorme carinho e louvável paciência ao longo de mais uma jornada que finalizamos juntos.

A todo corpo docente do curso de mestrado do Inatel pela dedicação e comprometimento com o ensino.

Aos companheiros do Laboratório de Rádio Cognitivo pelos conhecimentos compartilhados.

À Fapemig pelo apoio financeiro.

Por fim, ao Inatel pela excelência no ensino em telecomunicações e pela oportunidade de realizar este Mestrado.

Este trabalho foi parcialmente financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa de Minas Gerais (Fapemig), pelo CNPq contrato 308365/2017-8, pela Capes e pela RNP, com recursos do MCTIC, processo No 01250.075413/2018-04, sob o projeto Centro de Referência em Radiocomunicações (CRR) do Instituto Nacional de Telecomunicações - Inatel, Brasil.

*Pedro Emílio Gória Silva*

# Sumário

<b>Sumário</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>x</b>
<b>Lista de Abreviaturas e Siglas</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>xiii</b>
<b>Resumo</b>	<b>xvii</b>
<b>Abstract</b>	<b>xix</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Canais com desvanecimento . . . . .	2
1.1.1 Modelos de Canais com Múltiplos percurso e Desvanecimento Plano . . . . .	4
1.2 Tipos de Comunicação . . . . .	7
1.2.1 Idealmente Coerente . . . . .	7
1.2.2 Não Idealmente Coerente e Parcialmente Coerente . . . . .	8
1.2.3 Não Coerente . . . . .	9
1.2.4 Diferencialmente Coerente . . . . .	9
1.3 Contribuições e Estrutura da Dissertação . . . . .	10
1.4 Publicações . . . . .	11
<b>2 Estatísticas Úteis</b>	<b>13</b>
2.1 A distribuição $\alpha$ - $\mu$ . . . . .	13
2.2 A distribuição $\eta$ - $\mu$ . . . . .	15
2.3 A distribuição $\kappa$ - $\mu$ . . . . .	18
2.4 Modelos do erro da fase . . . . .	20
2.4.1 Modelo de Tikhonov . . . . .	20
2.4.2 Modelo Gaussiano . . . . .	21
2.5 Conclusões . . . . .	22

---

<b>3</b>	<b>Análise de Desempenho</b>	<b>23</b>
3.1	ABER BPSK com ruído AWGN e erro de fase . . . . .	23
3.2	ABER QPSK com ruído AWGN e erro de fase . . . . .	24
3.3	ABER BPSK e QPSK em canais com desvanecimento, ruído AWGN e erro de fase . . . . .	25
3.3.1	ABER com desvanecimento $\alpha$ - $\mu$ . . . . .	27
3.3.2	ABER com desvanecimento $\eta$ - $\mu$ . . . . .	29
3.3.3	ABER com desvanecimento $\kappa$ - $\mu$ . . . . .	31
3.3.4	ABER Assintótica . . . . .	32
3.3.5	Resultados numéricos . . . . .	33
3.4	ASER exata para MPSK com ruído AWGN e erro de fase . . . . .	38
3.5	ASER exata para MPSK em canais com desvanecimento, ruído AWGN e erro de fase . . . . .	41
3.5.1	ASER com desvanecimento $\alpha$ - $\mu$ . . . . .	41
3.5.2	ASER com desvanecimento $\eta$ - $\mu$ . . . . .	43
3.5.3	ASER com desvanecimento $\kappa$ - $\mu$ . . . . .	44
3.5.4	ASER assintótica . . . . .	45
3.5.5	Resultados Numéricos . . . . .	45
<b>4</b>	<b>Conclusões e Trabalhos Futuros</b>	<b>49</b>
4.1	Conclusões . . . . .	49
4.2	Trabalhos Futuros . . . . .	49
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>51</b>

# Lista de Figuras

2.1	FDPs e FDCs $\alpha$ - $\mu$ . . . . .	14
2.2	FDPs e FDCs $\eta$ - $\mu$ . . . . .	17
2.3	FDPs e FDCs $\kappa$ - $\mu$ . . . . .	19
2.4	FDPs Tikhonov e Gaussiana para diversos valores dos parâmetros $\rho$ e $\sigma_{\Phi}^2$	22
3.1	Erro absoluto para sistemas BPSK e QPSK versus o número de termos $L$ em (3.18) para vários valores da SNR média. . . . .	29
3.2	ABER do BPSK e do QPSK para vários valores de $\alpha$ em função da SNR média sob desvanecimento $\alpha$ - $\mu$ e erro da fase Tikhonov. . . . .	35
3.3	ABER do BPSK e do QPSK para vários valores de $\mu$ em função da SNR média sob desvanecimento $\alpha$ - $\mu$ e erro da fase Tikhonov. . . . .	36
3.4	ABER do BPSK e do QPSK para vários valores de $\eta$ em função da SNR média sob desvanecimento $\eta$ - $\mu$ e erro da fase Tikhonov. . . . .	36
3.5	ABER do BPSK e do QPSK para vários valores de $\mu$ em função da SNR média sob desvanecimento $\eta$ - $\mu$ e erro da fase Tikhonov. . . . .	36
3.6	ABER do BPSK e do QPSK para vários valores de $\kappa$ em função da SNR média sob desvanecimento $\kappa$ - $\mu$ e erro da fase Tikhonov. . . . .	37
3.7	ABER do BPSK e do QPSK para vários valores de $\mu$ em função da SNR média sob desvanecimento $\kappa$ - $\mu$ e erro da fase Tikhonov. . . . .	37
3.8	ABER do BPSK e QPSK para vários valores de $\mu$ em função dos valores da SNR do <i>loop</i> sob desvanecimento $\alpha$ - $\mu$ e erro da fase Tikhonov.	37
3.9	Parte de uma constelação MPSK . . . . .	39
3.10	ASER em função da SNR média sem desvanecimento, com desvanecimento $\alpha$ - $\mu$ e erro da fase Tikhonov. . . . .	46
3.11	ASER em função da SNR média sem desvanecimento, com desvanecimento $\eta$ - $\mu$ e erro da fase Tikhonov. . . . .	47
3.12	ASER em função da SNR média sem desvanecimento, com desvanecimento $\kappa$ - $\mu$ e erro da fase Tikhonov. . . . .	47
3.13	ASER em função do parâmetro $\rho$ para vários valores de $\mu$ sob desvanecimento $\kappa$ - $\mu$ e $\eta$ - $\mu$ e erro da fase Tikhonov para modulação QPSK. .	48

# Lista de Abreviaturas e Siglas

<b>5G</b>	quinta geração
<b>ABER</b>	taxa de erro de bits média ( <i>average bit error rate</i> )
<b>ASER</b>	taxa de erro de símbolos média ( <i>average aymbol error rate</i> )
<b>AWGN</b>	ruído aditivo Gaussiano branco ( <i>additive white Gaussian noise</i> )
<b>BAN</b>	rede de área corporal ( <i>body area network</i> )
<b>BER</b>	taxa de erro de bits ( <i>bit error rate</i> )
<b>BPSK</b>	chaveamento na fase binária ( <i>binary phase shift keying</i> )
<b>DA ML</b>	decisão baseada em máxima verossimilhança ( <i>Decision aided maximum likelihood</i> )
<b>FDC</b>	função de distribuição cumulativa
<b>FDP</b>	função densidade de probabilidade
<b>MDC</b>	maior divisor comum
<b>MGF</b>	função geradora de momentos ( <i>moment generating function</i> )
<b>mmWave</b>	onda milimétrica ( <i>millimeter wave</i> )
<b>MPSK</b>	modulação em fase ( <i>M-phase shift keying</i> )
<b>PLL</b>	malha de captura de fase ( <i>phase locked loop</i> )
<b>QAM</b>	modulação por amplitude em quadratura ( <i>quadrature amplitude modulation</i> )
<b>QPSK</b>	chaveamento em fase quaternária ( <i>quaternary phase shift keying</i> )
<b>rms</b>	valor eficaz ( <i>root mean square</i> )
<b>SNR</b>	relação sinal-ruído ( <i>signal-to-noise ratio</i> )
<b>SER</b>	taxa de erro de símbolos ( <i>symbol error rate</i> )
<b>V2V</b>	veículo para veículo ( <i>vehicle-to-vehicle</i> )
<b>VCO</b>	oscilador controlado por tensão ( <i>voltage-controlled oscillator</i> )



# Lista de Símbolos

${}_1F_1(\cdot; \cdot; \cdot)$	Função hipergeométrica confluyente
${}_2F_1(\cdot \cdot; \cdot; \cdot)$	Função hipergeométrica
$A$	Amplitude do sinal recebido
$A_c$	Amplitude da portadora senoidal complexa
$\alpha$	Fator de não linearidade do meio de transmissão
$B$	Efeito conjunto do AWGN com a imperfeição na estimativa da fase
$b$	Um número inteiro
$I_v(\cdot)$	Função de Bessel modificada de primeiro tipo e ordem $v$
$c_r(t)$	Portadora senoidal complexa
$c_t(t)$	Portadora senoidal complexa
$\delta(\cdot)$	Delta de Dirac
$E_b$	Energia média do bit
$\text{Erf}(\cdot)$	Função erro
$\text{Erfc}(\cdot)$	Função erro complementar
$E_s$	Energia do sinal complexo transmitido
$\eta$	Razão entre a potência total das ondas espalhadas do <i>cluster</i> de multipercurso em fase e a potência total das ondas espalhadas do <i>cluster</i> de multipercurso em quadratura
$f_{\Upsilon}^{\alpha-\mu}(\gamma)$	Função densidade de probabilidade da SNR instantânea do canal $\alpha-\mu$
$F_R^{\alpha-\mu}(r)$	Função de distribuição cumulativa da envoltória do canal $\alpha-\mu$
$f_R^{\alpha-\mu}(r)$	Função densidade de probabilidade da envoltória do canal $\alpha-\mu$
$f_c$	Frequência da portadora senoidal complexa
$f_{\Upsilon}^{\eta-\mu}(\gamma)$	Função densidade de probabilidade da SNR instantânea do canal $\eta-\mu$
$f_R^{\eta-\mu}(r)$	Função densidade de probabilidade da envoltória do canal $\eta-\mu$
$f_{\Upsilon}^{\kappa-\mu}(\gamma)$	Função densidade de probabilidade da SNR instantânea do canal $\kappa-\mu$
$f_R^{\kappa-\mu}(r)$	Função densidade de probabilidade da envoltória do canal $\kappa-\mu$
$f_{\Phi}(\phi)$	Função densidade de probabilidade da variável aleatória $\Phi$
$f_R(r)$	Função densidade de probabilidade da variável aleatória $R$
$f_{U,B}(u,b)$	Função densidade de probabilidade conjunta de $U$ e $B$

$F_{U,B}(u,\beta)$	Função de distribuição cumulativa conjunta de $U$ e $B$
$f_{\Upsilon}(\gamma)$	Função densidade de probabilidade da variável aleatória $\Upsilon$
$f_{U,\Theta}(u,\theta)$	Função densidade de probabilidade conjunta de $U$ e $\Theta$
$\hat{\gamma}$	Valor médio
$\Gamma(\cdot)$	Função gamma
$H$	Constante da distribuição $\eta$ - $\mu$
$h$	Constante da distribuição $\eta$ - $\mu$
$j$	Unidade imaginária
$K$	Parâmetro de desvanecimento da distribuição Rice
$\kappa$	Razão entre a potência total das componentes dominantes e a potência total das ondas espalhadas
$l$	Um número inteiro
$M$	Ordem da modulação
$m$	Parâmetro de desvanecimento da distribuição Nakagami- $m$
$\mathbb{E}(\cdot)$	Operador esperança matemática
$G_{p,q}^{m,n}(\cdot   \cdot)$	Função-G de Meijer
$m_Q$	Média da variável aleatória $Q$
$\mu$	Número total de <i>clusters</i> de multipercursos
$m_W$	Média da variável aleatória $W$
$n$	Número inteiro de <i>clusters</i>
$N_0$	Densidade espectral de potência unilateral do ruído AWGN
$n_g$	Variável aleatória Gaussiana complexa
$n_g(t)$	Processo aleatório Gaussiano
$n_I$	Variável Gaussiana
$n_Q$	Variável Gaussiana
$\Omega$	Fator de potência para o cálculo para ABER
$P_b^{\text{BPSK}}$	ABER do BPSK
$P_b^{\text{BPSK}}(\phi)$	BER do BPSK condicionada à variável $\phi$
$P_b^{\text{BPSK-QPSK}}$	ABER do BPSK ou QPSK
$P_{\text{BPSK-QPSK}}^{\alpha-\mu}$	ABER do BPSK ou QPSK em canais $\alpha$ - $\mu$
$P_{\text{BPSK-QPSK}}^{\eta-\mu}$	ABER do BPSK ou QPSK em canais $\eta$ - $\mu$
$P_{\text{BPSK-QPSK}}^{\kappa-\mu}$	ABER do BPSK ou QPSK em canais $\kappa$ - $\mu$
$P_b^\infty$	ABER assintótica do BPSK ou QPSK
$P_s^{\text{MPSK}}$	ASER do MPSK
$P_{\text{MPSK}}^{\alpha-\mu}$	ASER do MPSK em canais $\alpha$ - $\mu$
$P_{\text{MPSK}}^{\eta-\mu}$	ASER do MPSK em canais $\eta$ - $\mu$
$P_{\text{MPSK}}^{\kappa-\mu}$	ASER do MPSK em canais $\kappa$ - $\mu$

$P_b^{\text{QPSK}}$	ABER do QPSK
$P_I^{\text{QPSK}}$	ABER do QPSK em fase
$P_Q^{\text{QPSK}}$	ABER do QPSK em quadratura
$f_\Phi(\phi)$	Função densidade de probabilidade do erro na estimação da fase
$\phi$	Erro na estimação da fase pelo receptor
$p_i$	Valor médio de um <i>cluster</i> de múltiplo percurso
$P_s$	Probabilidade de erro de símbolo
$P_s(E_s)$	ASER do M-PSK condicionada a $E_s$
$P_s^\infty$	ASER assintótica do MPSK
$Q$	Variável aleatória Gaussiana
$q$	Parâmetro de desvanecimento da distribuição Hoyt
$q_i$	Valor médio de um <i>cluster</i> de múltiplo percurso
$\hat{r}$	Valor médio
$R$	Envoltória do canal com desvanecimento
$\rho$	SNR do <i>loop</i>
$S(t)$	Sinal complexo transmitido em banda base
$\sigma$	Desvio padrão de uma variável aleatória Gaussiana
$\sigma_\Phi$	Desvio padrão de uma variável aleatória Gaussiana $\Phi$
$\sigma_X$	Desvio padrão de uma variável aleatória Gaussiana X
$\sigma_Y$	Desvio padrão de uma variável aleatória Gaussiana Y
$S_r$	Símbolo transmitido transladado em $\phi$ radianos
$s_r(t)$	Sinal complexo recebido em banda passante
$S_t$	Símbolo transmitido
$s_t(t)$	Sinal complexo transmitido em banda passante
$\Theta$	Variável aleatória representando o ângulo da coordenada $(Q, W)$
$\vartheta_c$	Fase da portadora senoidal complexa
$U$	Variável aleatória com distribuição Rice
$\Upsilon$	SNR instantânea por bit do sinal recebido com desvanecimento
$\vartheta$	Fase do sinal transmitido
$W$	Variável aleatória Gaussiana
$x_d(t)$	Saída do demodulador
$X_i$	Processo Gaussiano
$y$	Amostra complexa da envoltória do sinal recebido
$Y_i$	Processo Gaussiano
$\zeta$	Fator de fase para o cálculo para ABER



# Resumo

Gória, P.E.S. Probabilidade de Erro em Sistemas M-PSK sob a Influência de Canais com Desvanecimento e Imperfeita Estimação da Fase da Portadora [Dissertação de Mestrado]. Santa Rita do Sapucaí: Instituto Nacional de Telecomunicações; 2019.

Nesta dissertação, a taxa média de erro de bits em sistemas operando com modulação BPSK e QPSK e estimação imperfeita da fase da portadora é investigada admitindo um canal com desvanecimento lento e plano  $\alpha$ - $\mu$ ,  $\eta$ - $\mu$  e  $\kappa$ - $\mu$  e a presença do ruído térmico. A análise da taxa média de erros de símbolos em sistemas operando com modulação MPSK sob a hipótese de desvanecimento lento e plano  $\alpha$ - $\mu$ ,  $\kappa$ - $\mu$  e  $\eta$ - $\mu$  sujeitos à estimação imperfeita da fase e ruído térmico é também investigada. O erro na estimação da fase segue uma distribuição Tikhonov ou Gaussiana. Mais especificamente, uma expressão analítica para a taxa exata de erros de bits é obtida, assim como suas correspondentes expressões assintóticas para valores altos da relação sinal ruído. E também, expressões fechadas exatas e aproximadas para a taxa média de erro de símbolos i) sob cenário sem desvanecimento, canais com desvanecimento ii) sob  $\alpha$ - $\mu$ , iii) sob  $\eta$ - $\mu$ , iv) sob  $\kappa$ - $\mu$ , assim como v) suas correspondentes expressões assintóticas para valores altos da relação sinal ruído são derivadas e calculadas. As expressões derivadas são válidas para valores arbitrários dos parâmetros de desvanecimento, chamados  $\alpha$ ,  $\eta$ ,  $\kappa$  e  $\mu$ , e elas são verificadas tanto por reduzi-las a casos particulares, para os quais os resultados estão disponíveis na literatura, quanto por meio de simulações com a abordagem de Monte Carlo. Diversas conclusões importantes sobre o desempenho do sistema em função dos parâmetros do canal e da relação sinal ruído do *loop* são tiradas.

**Palavras-Chave:** Modelos de desvanecimento  $\alpha$ - $\mu$ ,  $\kappa$ - $\mu$  e  $\eta$ - $\mu$ , taxa média de erro de bits, taxa média de erro de símbolos, ruído de fase, distribuição Tikhonov, distribuição von Mises.



# Abstract

Gória, P.E.S. Probabilidade de Erro em Sistemas M-PSK sob a Influencia de Canais com Desvanecimento e Imperfeita Estimação da Fase da Portadora [Dissertação de Mestrado]. Santa Rita do Sapucaí: Instituto Nacional de Telecomunicações; 2019.

In this dissertation, the average bit error rate of binary and quaternary phase-shift keying signals with imperfect carrier phase recovery is investigated assuming a flat slow  $\alpha$ - $\mu$ ,  $\eta$ - $\mu$  and  $\kappa$ - $\mu$  fading channel and the presence of thermal noise. The analysis of average symbol error rate of M-Phase Shift Keying over  $\alpha$ - $\mu$ ,  $\kappa$ - $\mu$  and  $\eta$ - $\mu$  fading channels subject to imperfect carrier phase recovery is investigated. The phase noise is considered to be Tikhonov and Gaussian distributed. More specifically, an analytical expression for the exact average bit error rate is obtained, as well as its corresponding asymptotic expression for large signal-to-noise ratio values. And also, exact and approximate closed-form expressions for ASER i) under non-fading scenario, ii) under  $\alpha$ - $\mu$ , iii)  $\kappa$ - $\mu$  and iv)  $\eta$ - $\mu$  fading channels, as well as v) its corresponding asymptotic expression for large signal-to-noise ratio values are derived and evaluated. The derived expressions are valid for arbitrary values of the fading parameters, namely  $\alpha$ ,  $\eta$ ,  $\kappa$  and  $\mu$ , and they are validated by reducing them to particular cases, for which results are available in the literature and by means of Monte Carlo simulations. Several important conclusions concerning the system performance as a function of the channel parameters and loop signal-to-noise ratio are drawn.

**Keywords:**  $\alpha$ - $\mu$ ,  $\kappa$ - $\mu$  and  $\eta$ - $\mu$  fading model, average bit error rate, average symbol error rate, noisy phase, Tikhonov distribution, von Mises distribution.



# Capítulo 1

## Introdução

**A**S comunicações sem fio são onipresentes, cobrindo todos os aspectos da vida cotidiana, desde a simples comunicação por voz, ligações entre celulares, até a transmissão vital de informações críticas, como, por exemplo, em operações militares. Meios de transmissão com taxas relativamente altas e boa mobilidade são algumas das razões para a popularização das comunicações sem fio. Por outro lado, requer-se um estudo cuidadoso das características do canal de comunicação, para que a comunicação possa ser mantida com alta fidelidade e confiabilidade. Nesse contexto, o estudo da transmissão e deterioração do sinal, tanto na qualidade quanto nas características, assume grande significado [1]. Esta dissertação é um esforço na abordagem desse desafio. Ela fornece uma discussão sobre o desempenho de sistemas operando com modulação em fase (*M-phase shift keying*, MPSK) sob a influência de alguns efeitos, os quais são capazes de causar degradação na qualidade da comunicação.

Um sistema de transmissão pode ser caracterizado de uma forma sucinta por cinco blocos [2]. São eles: *fonte de informação*, *transmissor*, *meio de transmissão*, *receptor* e *destino da informação*. Os esforços estão concentrados no receptor, mais especificamente na análise de seu desempenho quanto à probabilidade de erro. Para tal, deve-se compreender o comportamento do canal e algumas características específicas do receptor.

O canal rádio móvel sem fio apresenta uma infinidade de obstáculos (árvores, prédios, casa e etc) à propagação da onda eletromagnética, desde barreiras que impossibilitam a passagem da onda até superfícies capazes de refratá-la. Uma descrição matemática precisa desses fenômenos de propagação pode ser obtida por meio da resolução das equações de Maxwell com condições de contorno que expressem as características físicas desses obstáculos [3]. A imprevisibilidade de todos os obstáculos, ou seja, de todas as interações sofridas pela onda eletromagnética ao longo de seu trajeto, faz

com que uma descrição matemática precisa seja desconhecida ou extremamente complexa. Consequentemente, modelos estatísticos precisos e relativamente simples foram criados para caracterizar os meios físicos de propagação [3].

Quanto ao receptor, já na década de 50, pesquisadores e engenheiros de comunicação investigavam o desempenho das modulações digitais. Ao longo das décadas seguintes, realizaram-se esforços no campo da análise de desempenho para diversos esquemas de modulação. O desempenho de transmissões sem fio é avaliado comumente sob a hipótese de que todos os parâmetros do canal estão disponíveis no receptor, ou em outras palavras, sob a hipótese de que o receptor é capaz de estimar precisamente os efeitos impostos ao sinal pelo meio de transmissão e corrigi-los. A equivalência dessa premissa é o modelo de canal considerando-se apenas a presença do ruído aditivo Gaussiano branco (*additive white Gaussian noise*, AWGN), o qual é amplamente conhecido na literatura. Nas últimas décadas, estudos relacionados à estimação de canal pelo receptor e seus efeitos indesejáveis foram realizados [1, 4, 5].

## 1.1 Canais com desvanecimento

Ao se propagar pela interface aérea, a onda eletromagnética está sujeita à reflexão, difração e espalhamento dentre outros efeitos indesejáveis. O sinal, cujo comprimento de onda é consideravelmente menor do que o obstáculo com o qual a onda colide, sofre reflexão. A difração ocorre quando a direção de propagação é alterada devido à borda de um obstáculo ou orifício de ordem de grandeza do comprimento de onda. Em obstáculos, cujas dimensões são comparáveis a do comprimento de onda do sinal, normalmente ocorre o espalhamento do sinal. Um meio contendo esse conjunto de fenômenos recebe geralmente o nome de propagação com múltiplos percursos [2].

Em uma propagação com múltiplos percursos a antena receptora é bombardeada por inúmeras réplicas (componentes de múltiplos percursos) do sinal transmitido. Cada réplica do sinal é oriunda de distintos efeitos impostos pelo canal. Devido as réplicas do sinal transmitido se propagarem por caminhos com comprimentos distintos, as componentes de múltiplos percursos apresentam diferentes valores de atraso e de amplitude. A interação entre as ondas de múltiplos percursos pode ser construtiva, quando em fase, ou destrutiva, quando em oposição de fase. O resultado de todas essas interações é uma oscilação na fase e na amplitude do sinal recebido. O nome dado a essa variação é desvanecimento por múltiplos percursos (*multipath fading*) ou simplesmente desvanecimento (*fading*) [1, 2, 5].

Devido ao desvanecimento, o sinal resultante no receptor tem a sua amplitude e

fase flutuando aleatoriamente ao longo do tempo e do espaço. Pode-se caracterizar o desvanecimento como de *longo prazo*, causado por variações em grandes escalas na topografia ao longo do caminho de propagação ou de *curto prazo* (ou pequena escala), causado, basicamente, por qualquer alteração no caminho de propagação [2]. A flutuação na potência média do sinal recebido é representada pelo desvanecimento de longo prazo. Uma característica do desvanecimento de curto prazo é a variação brusca em curto prazo de tempo. O desvanecimento de curto prazo provoca variações intensas na amplitude e na fase da onda resultante que chega ao receptor. Essas alterações podem ocorrer por mudanças na posição ou formato dos obstáculos presentes ao longo do caminho de propagação ou deslocamento na posição do transmissor em relação ao receptor, ocasionando diferença no comprimento e na quantidade dos múltiplos percursos. Como exemplo, em uma comunicação entre o aparelho celular e a estação rádio base, o desvanecimento de longo prazo seria observado quando o usuário (celular) se deslocasse por uma grande distância. Já o de curto prazo aconteceria mesmo com o usuário parado devido à movimentação de carros e pessoas ao redor. Os esforços nesta dissertação estão direcionados ao desvanecimento de curto prazo.

Uma distinção clara entre desvanecimento rápido e lento é importante para o cálculo do desempenho de sistemas operando em canais com desvanecimento [5]. Essa caracterização, rápido ou lento, está ligada à correlação temporal do canal. O tempo de coerência do canal é definido como o valor absoluto da diferença temporal entre duas amostras altamente correlacionadas do canal, ou equivalentemente, além desse tempo de coerência as amostras do canal apresentarão baixa correlação. O tempo de coerência do canal está também ligado ao efeito Doppler, mais especificamente, o tempo de coerência do canal é inversamente proporcional ao máximo desvio Doppler. Nesse contexto, canais, caso o tempo de coerência seja maior do que a duração de um símbolo, são ditos serem lentos. Caso contrário, são ditos serem rápidos [1, 2, 5].

Outra característica importante do canal com desvanecimento é a seletividade em frequência. Essa caracterização está ligada à banda de coerência do canal. Ela é definida como a banda dentro da qual as frequências apresentam alta correlação. A banda de coerência do canal é inversamente proporcional ao atraso máximo dentre as componentes de múltiplos percursos. Se o desvanecimento afeta de forma similar (i.e. com alta correlação) todas as componentes de frequência do sinal transmitido, o canal é dito ser não seletivo em frequência (*frequency nonselective*) ou desvanecimento plano (*flat fading*). Caso contrário, o canal é dito ser seletivo em frequência (*frequency selective*) [1, 2, 5].

### 1.1.1 Modelos de Canais com Múltiplos percurso e Desvanecimento Plano

Em sistemas afetados por desvanecimento, o ganho do canal é representada por uma variável aleatória e seu comportamento pode ser representado por meio de modelos estatísticos (por exemplo, com a função densidade de probabilidade (FDP)  $f_R(r)$  da variável aleatória  $R$ ). Esses modelos estatísticos são dependentes da natureza do meio de propagação. Historicamente, a primeira distribuição proposta para modelar canais com desvanecimento foi a Rayleigh [6], cujo idealizador foi Lord Rayleigh. A distribuição Rayleigh é utilizada comumente para descrever canais com desvanecimento e sem linha de visada direta.

Pode-se entender o processo modelado por Rayleigh como sendo a norma Euclidiana de duas variáveis aleatórias Gaussianas estatisticamente independentes, uma representando a componente em fase e a outra a componente em quadratura, ambas com média nula e variâncias idênticas. Com apenas um único parâmetro pode-se caracterizar uma distribuição Rayleigh. Além dessa, existem outras distribuições, as quais também são utilizadas para modelar canais com desvanecimento. São algumas delas [5]: *Rice* ou *Nakagami- $n$* , *Hoyt* ou *Nakagami- $q$*  e *Nakagami- $m$* .

A distribuição Rice é utilizada para modelar canais nos quais há uma componente predominante, ou seja, canais com linha de visada direta. Seu parâmetro de desvanecimento, o qual é definido como a razão entre a potência da componente predominante e a potência total das componentes de múltiplos percursos, é representado geralmente pela letra  $K$ . A distribuição Rayleigh pode ser obtida fazendo  $K \rightarrow 0$  na distribuição Rice. O processo modelado por Rice pode ser entendido como a norma Euclidiana de duas variáveis aleatórias Gaussianas estatisticamente independentes, uma representando o processo em fase e a outra o processo em quadratura, de médias não nulas e variâncias idênticas.

A distribuição Hoyt é normalmente observada em links de satélite sujeitos à forte cintilação ionosférica [5]. Seu único parâmetro de desvanecimento, o qual é definido como a relação entre a variância do processo Gaussiano em fase e a variância do processo Gaussiano em quadratura, é representado geralmente pela letra  $q$ . A distribuição Rayleigh pode ser obtida fazendo  $q \rightarrow 1$  na distribuição Hoyt. O processo modelado por Hoyt pode ser compreendido como a norma Euclidiana de duas variáveis aleatórias Gaussianas estatisticamente independentes, uma representando o processo em fase e a outra o processo em quadratura, de médias nulas e variâncias distintas.

Embora a distribuição Nakagami- $m$  tenha sido, em um primeiro momento, derivada de observações experimentais [7], pode-se fornecer uma análise teórica para justificar

seu uso. Essa abordagem teórica é baseada no conceito de *clustering*.

De uma maneira geral, o conceito de *clustering* está relacionado com o conceito de espalhamento homogêneo. Em outras palavras, *cluster* é nome dado a um grupo grande de ondas refletidas de forma homogênea. A suposição de homogeneidade na reflexão das ondas eletromagnéticas é uma aproximação comum da natureza real do fenômeno. Como pode ser visto em [8], Braun descreve um campo de espalhamento homogêneo como aquele que contém as seguintes características:

- grande número de ondas parciais;
- amplitudes das ondas parciais idênticas;
- ondas parciais descorrelacionadas;
- fase e amplitude descorrelacionadas em uma onda parcial;
- fase uniformemente distribuída no intervalo  $[0, 2\pi)$ .

Essas características descrevem um campo de espalhamento difuso homogêneo, resultante de pontos de espalhamento distribuídos aleatoriamente. Devido ao grande número de ondas parciais em um *cluster*, admite-se que a envoltória do sinal em cada *cluster* segue uma distribuição Gaussiana. Considere o cenário de múltiplos percursos nos quais as ondas estão agrupadas, ao invés de todas elas estarem localizados de maneira puramente aleatória no canal. Supondo a existência de  $n$  *clusters*, com cada grupo (*cluster*) tendo um número suficientemente grande de ondas dispersas, a representação da envoltória resultante  $R$  pode ser feita, dentro da contextualização anterior, por [9, 10]

$$R^2 = \sum_{i=1}^n (X_i^2 + Y_i^2), \quad (1.1)$$

em que  $X_i$  e  $Y_i$  são processos Gaussianos independentes e representam o *cluster*  $i$  em fase e em quadratura, respectivamente. Desde que as condições de contorno  $n = m$  e variância idêntica para todos os  $X_i$  e  $Y_i$  sejam estabelecidas, tem-se uma distribuição Nakagami- $m$  para a envoltória  $R$  [11]. O parâmetro de desvanecimento  $m > 0.5$  da distribuição Nakagami- $m$  representa uma extensão real de  $n$ . A distribuição Rayleigh é obtida substituindo  $m = 1$  na distribuição Nakagami- $m$ . Também pode-se relacionar as distribuições Hoyt, caso  $m < 1$ , e Rice, caso  $m > 1$ , com Nakagami- $m$ . A escolha de diferentes valores para o parâmetro  $m$  produz uma infinidade de desvanecimentos, desde o caso mais severo ( $m = 0.5$ ) até a não presença de desvanecimento ( $m \rightarrow \infty$ ). Isso significa que para altos valores de  $m$  o desvanecimento desaparece e o canal torna-se puramente Gaussiano, sugerindo que o sinal sofre somente interferência do ruído AWGN.

Dentre os modelos de desvanecimento, a distribuição  $\alpha$ - $\mu$  [9] se apresenta como um modelo flexível e matematicamente tratável. A distribuição  $\alpha$ - $\mu$  é descrita por meio de dois parâmetros. O parâmetro de não linearidade do meio de propagação é representado pela letra grega  $\alpha$  e o parâmetro de agrupamento (*clustering*) das ondas de múltiplos percursos é representado pela letra grega  $\mu$ . Da distribuição  $\alpha$ - $\mu$ , vários modelos estatísticos importantes e amplamente utilizados podem ser obtidos como casos especiais, incluindo distribuições tais como Gamma (e sua versão discreta Erlang e Chi-quadrada central), Nakagami- $m$  (e sua discreta versão Chi), exponencial, Weibull, Semi-Gaussiana e Rayleigh [9, Sec. V]. Mais detalhes sobre a distribuição  $\alpha$ - $\mu$  serão discutidos na Seção 2.1.

As distribuições  $\eta$ - $\mu$  e  $\kappa$ - $\mu$  também são modelos flexíveis e matematicamente tratáveis. A grosso modo, o modelo de canal com desvanecimento  $\eta$ - $\mu$  representa a variação em pequena escala da envoltória do desvanecimento em uma condição sem linha de visada direta. A distribuição  $\eta$ - $\mu$  é apresentada em dois diferentes formatos, Formato 1 e Formato 2, correspondendo a dois modelos físicos distintos. O parâmetro  $\eta$  está relacionado com a razão entre potências (Formato 1) ou correlação (Formato 2) entre as ondas de múltiplos percursos em fase e as ondas de múltiplos percursos em quadratura. O parâmetro  $\mu$  é o mesmo apresentado para a distribuição  $\alpha$ - $\mu$ . De forma sucinta, o modelo de canal  $\kappa$ - $\mu$  descreve um cenário de desvanecimento no qual o canal exibe uma componente dominante em cada *cluster* de múltiplo percurso. O parâmetro  $\kappa$  representa a razão entre a potência total da componente dominante e a potência total das ondas espalhadas. Novamente, o parâmetro de agrupamento (*clustering*) das ondas de múltiplos percursos é representado pela letra grega  $\mu$ . Outros modelos estatísticos podem ser obtidos como casos especiais das distribuições  $\eta$ - $\mu$  e  $\kappa$ - $\mu$ . São eles Semi-Gaussiana, Rayleigh, Rice, Nakagami- $m$  e Hoyt.

Os modelos de canal com desvanecimento  $\alpha$ - $\mu$ ,  $\eta$ - $\mu$  e  $\kappa$ - $\mu$  tem ganhado popularidade com um grande número de estudos disponíveis na literatura. Por exemplo, essas distribuições tem sido utilizadas para modelar dados reais de campo em cenários emergentes, por exemplo, a distribuição  $\alpha$ - $\mu$  tem mostrado um bom encaixe com medidas de campo em canais com banda estreita para comunicação veículo para veículo (*vehicle-to-vehicle*, V2V) na frequência de 5.9 GHz [12] e também na faixa mais promissora para aplicações da quinta geração (5G), i.e., em onda milimétrica (*millimeter wave*, mmWave) [13]. A distribuição  $\kappa$ - $\mu$  tem sido utilizada com sucesso para modelar um canal em uma rede de área corporal (*body area network*, BAN) na frequência de 2.48 GHz sob interferência de co-canais e ruído de fundo [14]. A distribuição  $\eta$ - $\mu$  foi utilizada em uma modelagem do *downlink* de uma rede de celular [15].

## 1.2 Tipos de Comunicação

Técnicas de modulação digital são tipicamente classificadas em três aspectos básicos. (1) o atributo da portadora o qual será modulado (fase, amplitude, frequência), (2) em quantos níveis o atributo modulado será dividido e (3) o grau de informações sobre a fase da portadora que o receptor utiliza no processo de detecção dos dados (coerente, parcialmente coerente, diferencialmente coerente, não coerente) [5]. Os formatos de combinação dessas três categorias são inúmeros. Desde modulações que envolvam apenas uma característica (por exemplo a fase, chaveamento na fase binária (*binary phase shift keying*, BPSK), chaveamento em fase quaternária (*quaternary phase shift keying*, QPSK)) até esquemas mais sofisticados de modulação (por exemplo a fase, modulação por amplitude em quadratura (*quadrature amplitude modulation*, QAM)). As técnicas de modulação citadas como exemplos diferem quanto ao atributo da portadora modulada e na quantidade de níveis que esse atributo pode assumir. Quanto ao terceiro aspecto listado, será discutido, ao longo desta seção, algumas de suas características e implicações no desempenho do sistema.

### 1.2.1 Idealmente Coerente

Quando o receptor é capaz de reconstruir precisamente a portadora transmitida, tanto em sua fase quanto em sua frequência, a detecção é dita ser idealmente coerente ou simplesmente coerente. Desde que a portadora, na prática, é extraída de uma versão corrompida do sinal, a detecção idealmente coerente nunca é alcançada [5]. De uma maneira geral, a detecção idealmente coerente apresenta menor probabilidade de erro do que outros tipos de detecção. Essa questão será melhor explorada no Capítulo 3.

Seja uma portadora senoidal complexa  $c_t(t) = A_c \exp(j(2\pi f_c t + \vartheta_c))$ , na qual  $A_c$ ,  $f_c$  e  $\vartheta_c$  são a amplitude, a frequência e a fase da portadora senoidal complexa, respectivamente. O correspondente sinal complexo transmitido em banda passante pode ser representado por  $s_t(t) = S(t)c_t(t)$ , no qual  $S(t)$  é o equivalente sinal complexo transmitido em banda base. Seja  $s_r(t) = s_t(t) + n_g(t)$  o sinal complexo recebido em banda passante corrompido pelo processo aleatório Gaussiano  $n_g(t)$ , ou seja, corrompido pelo ruído AWGN.

No caso da detecção idealmente coerente, o receptor reconstrói com perfeição a fase e frequência da portadora transmitida. Portanto, tem-se a portadora local (no receptor) senoidal complexa  $c_r(t) = c_t(t)$ , a qual é utilizada no processo de demodulação do sinal recebido. A saída do demodulador pode então ser escrita como  $x_d(t) = s_r(t)c_r^*(t) = S(t) + n_g(t)c_r^*(t)$  [5, Sec. 3.1], em que \* representa o conju-

gado complexo. Logo, pode-se concluir que o ruído AWGN é o único processo que está distorcendo a informação  $S(t)$ . O receptor ótimo realiza as operações de filtragem casada, correspondentes a cada um dos  $M$  possíveis símbolos, em  $x_d(t)$  durante cada sucessivo intervalo de transmissão. A decisão é tomada em favor do maior valor final dentre as  $M$  variáveis de decisão (i.e., os valores obtidos pelas operações de filtragem casada).

### 1.2.2 Não Idealmente Coerente e Parcialmente Coerente

Quando o receptor não é capaz de reconstruir precisamente a fase do sinal transmitido, a detecção é dita ser não idealmente coerente. Observe que, nesse cenário, o receptor utiliza alguma técnica de estimação da fase. Diferente da detecção coerente, na qual o valor exato da fase da portadora é conhecido pelo receptor, na detecção não idealmente coerente, o receptor trabalha com uma versão estimada do valor da fase da portadora. Nesse cenário, deve-se reescrever a portadora senoidal complexa como  $c_r(t) = A_c \exp(j(2\pi f_c t + \vartheta_r))$ , em que  $\vartheta_r$  representa o valor estimado de  $\vartheta_c$  pelo receptor. Desde que a variável aleatória  $\phi \triangleq \vartheta_c - \vartheta_r$  represente o erro na estimativa da fase, a saída do demodulador pode então ser escrita como  $x_d(t) = s_r(t)c_r^*(t) = S(t) \exp(j\phi) + n_g(t)c_r^*(t)$  [5, Sec. 3.1]. Portanto, após as operações de filtragem casada, correspondentes a cada um dos  $M$  possíveis símbolos, em  $x_d(t)$  durante cada sucessivo intervalo de transmissão, a decisão é tomada em função dos processos em fase  $S \cos(\chi + \phi) + n_I$  e em quadratura  $S \sin(\chi + \phi) + n_Q$ , nos quais  $S$  e  $\chi$  representam o módulo e a fase do processo  $S(t)$  após a operação de filtragem casada, respectivamente, e  $n_I$  e  $n_Q$  são processos Gaussianos.

O formato da FDP  $f_\Phi(\phi)$  da variável aleatória  $\Phi$ , em geral, depende do esquema utilizado para a extração da fase da portadora transmitida. Observe que ao se admitir  $f_\Phi(\phi)$  como sendo o delta de Dirac [16], i.e.  $f_\Phi(\phi) = \delta(\phi)$ , o caso não idealmente coerente é reduzido ao caso idealmente coerente. No Capítulo 2 alguns modelos estatísticos para a fase  $\Phi$  serão explorados com maiores detalhes.

Quando a detecção não idealmente coerente é admitida, existem duas possibilidades com relação à maneira de se projetar o receptor. Por um lado, supõem-se um esquema de detecção otimizado para o cenário idealmente coerente, entretanto a imperfeição na estimação da fase é considerada na análise de desempenho do receptor. Os esforços nesta dissertação estão voltados para esse caso. Por outro lado, desde que o comportamento do erro da fase seja conhecido, pode-se explorar essa informação estatística e conseqüentemente desenvolver um esquema de detecção aprimorado. Essa técnica, que utiliza os dados estatísticos disponíveis sobre o erro da fase para otimizar o projeto

do receptor, recebe o nome de detecção parcialmente coerente [5, Sec. 3.4].

A detecção parcialmente coerente pode ser classificada em duas subclasses. Essa distinção, entre as subclasses, se refere ao intervalo de símbolos utilizado para a detecção. A observação de um único intervalo de símbolo para a tomada de decisão recebe o nome de detecção convencional [5]. Se a tomada de decisão for baseada na observação de dois ou mais símbolos, essa subclasse da detecção parcialmente coerente recebe o nome de detecção por múltiplos símbolos [5].

### 1.2.3 Não Coerente

Nas últimas duas subseções, foram explicados os casos nos quais ou a fase exata da portadora estava disponível na recepção ou ao menos uma tentativa foi feita para estimá-la. No outro extremo, pode-se fazer uma simples suposição: o receptor é projetado para operar sem estimar a fase da portadora, ou seja, a fase da portadora recebida é desprezada no processo de detecção pelo receptor. Logo, a portadora local utilizada no processo de demodulação é admitida como tendo uma fase arbitrária. Consequentemente, o desempenho do sistema não é influenciado pela fase da portadora local, independente do valor admitido para ela. Esquemas de recepção desenvolvidos sob essa hipótese recebem o nome de detecção não coerente [5, Sec. 3.3]. Técnicas de transmissão que envolvam a modulação em fase, por exemplo MPSK, não são possíveis de se implementar com detecção não coerente.

### 1.2.4 Diferencialmente Coerente

A detecção diferencialmente coerente pode ser entendida como uma extensão da detecção não coerente. Na detecção diferencialmente coerente a tomada de decisão é baseada na observação de dois ou mais símbolos e nenhum esforço é realizado para estimar a fase da portadora. O termo *diferencial* surgiu principalmente devido ao fato de que na técnica convencional a decisão é tomada com base na diferença entre dois símbolos, ou seja, a decisão é tomada com base na diferença entre duas saídas sucessivas do filtro casado [5]. Nesse contexto, pode-se estimar um símbolo com base na diferença entre quaisquer atributos da portadora modulada (fase, amplitude ou frequência) de dois ou mais símbolos consecutivos. Entretanto, na literatura técnica, encontra-se comumente a utilização da detecção diferencialmente coerente baseada na diferença entre a fase de símbolos consecutivos (por exemplo,  $\pi/4$ -QPSK Diferencial ou Diferencialmente coerente BPSK [2]).

Diferentemente do caso parcialmente coerente, a subclassificação da detecção dife-

rencialmente coerente chamada de detecção convencional refere-se à detecção baseada na observação de dois símbolos consecutivos. O termo detecção por múltiplos símbolos representa o cenário em que a detecção é baseada na observação de três ou mais símbolos.

### 1.3 Contribuições e Estrutura da Dissertação

O impacto da estimação imprecisa da fase foi primeiramente calculado sob a hipótese de um canal AWGN puro [4]. O desempenho quanto à probabilidade de erro sob diferentes tipos de canais com desvanecimento (por exemplo, Rayleigh [17], Rice [18], Nakagami- $m$  [18–20], Hoyt [21] e Weibull [22]) foram avaliados em diversos trabalhos. Mais recentemente, esforços foram feitos para investigar o desempenho de sistemas de comunicação sem fio em canais  $\alpha$ - $\mu$ . Em [23], uma expressão para a função geradora de momentos (*moment generating function*, MGF), utilizada no cálculo da taxa de erro de bits média (*average bit error rate*, ABER) para diferentes técnicas de modulação, foi derivada para esse modelo generalizado de canal com desvanecimento. Embora útil, essa abordagem é restrita a modulações idealmente coerentes. Em [24], uma expressão é apresentada para o cálculo da taxa de erro de bits (*bit error rate*, BER) para um valor fixo do erro da fase em sistemas MPSK. Consequentemente, para considerar o erro da fase aleatório, é inevitável resolver uma integral. Em [25], uma expressão para o cálculo da taxa de erro de símbolos média (*average aymbol error rate*, ASER) de sistemas MPSK sob a influência do ruído AWGN com estimação imperfeita da fase é apresentada. Entretanto, para simplificar a análise, os autores supõem que a combinação dos efeitos AWGN e estimação imperfeita da fase produz uma variável aleatória Gaussiana.

As principais contribuições deste trabalho são:

- Deduções de expressões exatas da ABER para sistemas BPSK e QPSK sob a influência do ruído AWGN, estimação imperfeita da fase em canais  $\alpha$ - $\mu$ ,  $\eta$ - $\mu$  e  $\kappa$ - $\mu$ .
- Uma nova expressão aproximada e matematicamente tratável para o cálculo da ASER de sistemas MPSK sob a influência do ruído AWGN e estimação imperfeita da fase modelada pela distribuição Gaussiana.
- Uma nova expressão exata e matematicamente tratável para o cálculo da ASER de sistemas MPSK sob a influência do ruído AWGN e estimação imperfeita da fase modelada pela distribuição Tikhonov.
- Uma análise, teórica e numérica, da ABER para sistema MPSK sob a influência

do ruído AWGN, estimação imperfeita da fase em canais  $\alpha$ - $\mu$ ,  $\eta$ - $\mu$  e  $\kappa$ - $\mu$ .

- Novas expressões assintóticas para as análises de ABER e ASER sob a hipótese de relação sinal-ruído (*signal-to-noise ratio*, SNR) por bit de símbolo relativamente alta.
- Uma avaliação de como os parâmetros de desvanecimento influenciam no desempenho do sistema.

O restante desta dissertação está organizado conforme descrito a seguir:

No Capítulo 2 são discutidos os aspectos gerais dos modelos de desvanecimento  $\alpha$ - $\mu$ ,  $\eta$ - $\mu$  e  $\kappa$ - $\mu$ . Também é comentado sobre os métodos utilizados para estimar a fase da portadora. Por fim, as distribuições Tikhonov e Gaussiana, que são as principais distribuições presentes na literatura para modelar o erro da fase  $\phi$ , são apresentadas.

No Capítulo 3 são deduzidas as expressões da ABER para sistemas BPSK e QPSK em canais com desvanecimento  $\alpha$ - $\mu$ ,  $\eta$ - $\mu$  e  $\kappa$ - $\mu$  sob a hipótese do erro na estimativa da fase ser Gaussiano ou Tikhonov, bem como suas expressões assintóticas. As expressões da ASER para sistemas MPSK tanto em canais sem desvanecimento quanto em canais com desvanecimento  $\alpha$ - $\mu$ ,  $\eta$ - $\mu$  e  $\kappa$ - $\mu$  são deduzidas sob a hipótese do erro na estimativa da fase ser Gaussiano ou Tikhonov, bem como expressões assintóticas. São apresentados e comentados os resultados numéricos e teóricos.

No Capítulo 4 são apresentadas as conclusões e propostas para trabalhos futuros.

## 1.4 Publicações

Os seguintes artigos foram produzidos como resultado das pesquisas relacionadas a este trabalho:

- ① Pedro E. G. Silva, Rausley A. A. de Souza, Michel D. Yacoub, Daniel B. da Costa e Jules M. Moualeu, “**Error Probability of  $\alpha$ - $\mu$  Fading Channels with Imperfect Carrier Phase Recovery**”, in *2019 IEEE 90th Vehicular Technology Conference: VTC2019-Fall*, Oct. 2019.
- ② Pedro E. G. Silva, Rausley A. A. de Souza, Daniel B. da Costa, Jules M. Moualeu e Michel D. Yacoub, “**Error probability of  $M$ -phase signaling in  $\kappa$ - $\mu$  and  $\eta$ - $\mu$  fading channels with phase noise**”, in *IEEE Transaction on Vehicular Technology*, Submetido em Setembro de 2019.



## Capítulo 2

# Estatísticas Úteis

O objetivo deste capítulo é apresentar os modelos estatísticos utilizados ao longo desta dissertação. É tratado aqui sobre três modelos relativamente novos de distribuição para canais com desvanecimento em meios não homogêneos. São eles:  $\alpha$ - $\mu$ ,  $\eta$ - $\mu$  e  $\kappa$ - $\mu$ . Esses modelos vêm tendo boa aceitação na literatura e medidas práticas fortalecem a relevância de adotá-los. Também é tratado aqui sobre os dois modelos estatísticos adotados na literatura para descrever o comportamento do erro da fase. São eles: Tikhonov e Gaussiano.

### 2.1 A distribuição $\alpha$ - $\mu$

Pode-se considerar a distribuição  $\alpha$ - $\mu$  [9] como uma generalização da distribuição Nakagami- $m$  para meios de transmissão em que exista o fenômeno de não linearidade. Na distribuição  $\alpha$ - $\mu$ , o fenômeno de não linearidade é descrito pelo parâmetro  $\alpha > 0$ . Com o qual, um melhor ajuste da curva teórica aos dados obtidos experimentalmente é possível. A representação da envoltória  $R$ , com a  $\alpha$ -ésima raiz do valor médio de  $R$ ,  $\hat{r} = \sqrt[\alpha]{\mathbb{E}(R^\alpha)}$ , pode ser feita, dentro da contextualização da Seção 1.1.1, por [9, eq. (10)]

$$R^\alpha = \sum_{i=1}^n (X_i^2 + Y_i^2). \quad (2.1)$$

$\mathbb{E}(\cdot)$  representa o operador esperança matemática,  $X_i$  e  $Y_i$  são processos Gaussianos mutuamente independentes, com médias nulas,  $\mathbb{E}(X_i) = \mathbb{E}(Y_i) = 0$ , e variâncias idênticas,  $\mathbb{E}(X_i^2) = \mathbb{E}(Y_i^2) = \hat{r}^\alpha/2n$ .

Como as variáveis aleatórias são independentes e identicamente distribuídas, de (2.1) pode-se notar que  $\mathbb{E}(R^\alpha) = \hat{r}^\alpha$  e  $\mathbb{E}(R^{2\alpha}) = \hat{r}^{2\alpha}(n+1)/n$ . O modelo de des-

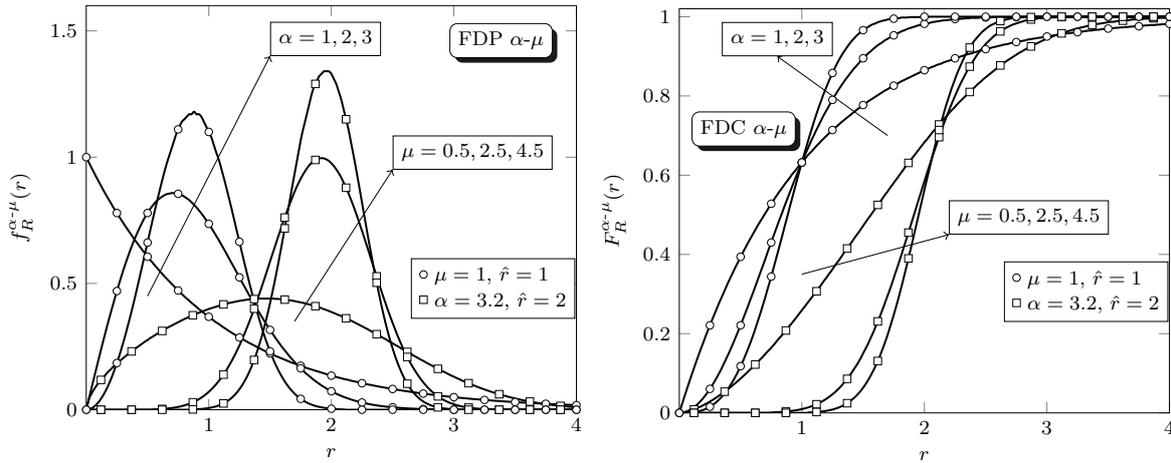


Figura 2.1: FDPs e FDCs  $\alpha$ - $\mu$

vanecimento  $\alpha$ - $\mu$  pode ser obtido definindo  $\mu > 0$  como uma extensão do parâmetro  $n$  para o conjunto de valores reais e positivos. Partindo de (2.1) e seguindo os procedimentos padrões de transformação de variáveis aleatórias, a FDP de  $R$  é encontrada como [9, eq. (11)]

$$f_R^{\alpha-\mu}(r) = \frac{\alpha \mu^\mu r^{\alpha\mu-1}}{\Gamma(\mu) \hat{r}^{\alpha\mu}} \exp\left(-\mu \frac{r^\alpha}{\hat{r}^\alpha}\right), \quad (2.2)$$

com  $r \geq 0$ , em que  $\Gamma(\cdot)$  é a função gamma [26, 8.310].

A função de distribuição cumulativa (FDC)  $F_R(r)$  da envoltória  $R$  para o modelo de canal  $\alpha$ - $\mu$  pode ser obtida de (2.2) como [9, eq. (8)]

$$F_R^{\alpha-\mu}(r) = \frac{\Gamma(\mu, \mu r^\alpha / \hat{r}^\alpha)}{\Gamma(\mu)}, \quad (2.3)$$

com  $r \geq 0$ , na qual  $\Gamma(z, y) = \int_0^y t^{z-1} \exp(-t) dt$  é a função gamma incompleta [26].

Na Figura 2.1, algumas curvas da FDP  $\alpha$ - $\mu$  e da FDC  $\alpha$ - $\mu$  são traçadas em função de  $r$ . Dois conjuntos de curvas são desenhados: i) a FDP  $\alpha$ - $\mu$  e a FDC  $\alpha$ - $\mu$  para diversos valores do parâmetro  $\alpha$ , tais como  $\{1, 2, 3\}$ , com um valor fixo dos parâmetros  $\mu = 1$  e  $\hat{r} = 1$ , ii) a FDP  $\alpha$ - $\mu$  e a FDC  $\alpha$ - $\mu$  para diversos valores do parâmetro  $\mu$ , tais como  $\{0.5, 2.5, 4.5\}$ , com um valor fixo dos parâmetros  $\alpha = 3.2$  e  $\hat{r} = 2$ . Observe que com o aumento do valor do parâmetro  $\alpha$  com um valor fixo do parâmetro  $\mu$  ou o aumento do valor do parâmetro  $\mu$  com um valor fixo do parâmetro  $\alpha$  torna a FDP  $\alpha$ - $\mu$  mais concentrada entorno de  $\hat{r}$ . Ou seja, o desvanecimento passa a ser menos severo, consequentemente o canal torna-se mais determinístico.

Seja  $\Upsilon$  a SNR instantânea por bit do sinal recebido como uma função da envoltória do desvanecimento  $R$  definida por  $\Upsilon \triangleq R^2 E_b / N_0$ , com  $E_b / N_0$  sendo a razão entre a energia média por bit e a densidade espectral unilateral de potência do ruído. A FDP

de  $\Upsilon$  é dada por [23, eq. (3)]

$$f_{\Upsilon}^{\alpha-\mu}(\gamma) = \frac{\alpha\mu^{\mu}\gamma^{0.5\alpha\mu-1}}{2\Gamma(\mu)\hat{\gamma}^{0.5\alpha\mu}} \exp\left(-\mu\frac{\gamma^{0.5\alpha}}{\hat{\gamma}^{0.5\alpha}}\right), \quad (2.4)$$

com  $\gamma \geq 0$ , na qual  $\hat{\gamma}$  é a SNR média por bit. O parâmetro  $\hat{\gamma}$  pode ser expressado como uma função de  $E_b/N_0$  na forma  $\hat{\gamma} = \hat{r}^2 E_b/N_0$ , ou de maneira semelhante  $\Upsilon = \hat{\gamma}(R/\hat{r})^2$  [23, eq. (2)].

Várias distribuições conhecidas podem ser obtidas como casos especiais da distribuição  $\alpha$ - $\mu$ . A distribuição Weibull pode ser obtida a partir da distribuição  $\alpha$ - $\mu$  ajustando o valor de  $\mu = 1$ . Da distribuição Weibull adotando  $\alpha = 2$ , tem-se a distribuição Rayleigh. Ainda da distribuição Weibull, a distribuição exponencial negativa é obtida quando  $\alpha = 1$ . A distribuição Nakagami- $m$  pode ser obtida a partir da distribuição  $\alpha$ - $\mu$  ajustando  $\alpha = 2$  e  $\mu = m$ . Se  $\mu = 1$  a partir da distribuição Nakagami- $m$ , a distribuição Rayleigh é obtida. Ainda da distribuição Nakagami- $m$ , adotando  $\mu = 0.5$  o resultado é a distribuição Semi-Gaussiana [9, Sec. V].

## 2.2 A distribuição $\eta$ - $\mu$

A distribuição  $\eta$ - $\mu$  [10] é um modelo generalizado de canal com desvanecimento de curto prazo. Ela pode ser melhor utilizada para representar canais com desvanecimento em que não exista linha de visada direta. Em [10], a distribuição  $\eta$ - $\mu$  é apresentada em dois formatos diferentes, Formato 1 e Formato 2, os quais correspondem a dois modelos físicos distintos. Entretanto, em termos matemáticos um formato pode ser obtido do outro por uma simples relação. Portanto, sem perda de generalidade, todas as deduções presentes nesta dissertação foram realizadas em conformidade com o Formato 1. Dado um valor do parâmetro  $\eta_{\text{Formato1}}$ , pode-se calcular um valor de  $\eta_{\text{Formato2}}$  pela relação

$$\eta_{\text{Formato2}} = \frac{1 - \eta_{\text{Formato1}}}{1 + \eta_{\text{Formato1}}} \quad (2.5)$$

ou, equivalentemente,

$$\eta_{\text{Formato1}} = \frac{1 - \eta_{\text{Formato2}}}{1 + \eta_{\text{Formato2}}}, \quad (2.6)$$

nas quais  $\eta_{\text{Formato1}}$  e  $\eta_{\text{Formato2}}$  são os valores de  $\eta$  no Formato 1 e Formato 2, respectivamente. No modelo de canal  $\eta$ - $\mu$ , o meio de propagação é considerado não homogêneo.

Em canais  $\eta$ - $\mu$ , o sinal é composto de vários *clusters* contendo ondas provenientes de múltiplos percursos. A representação da envoltória  $R$ , com valor eficaz (*root mean square, rms*)  $\hat{r} = \sqrt{\mathbb{E}(R^2)}$ , pode ser efetuada, dentro da contextualização da

Seção 1.1.1, por [10, eq. (22)]

$$R^2 = \sum_{i=1}^n (X_i^2 + Y_i^2), \quad (2.7)$$

em que  $X_i$  e  $Y_i$  são processos Gaussianos mutuamente independentes com médias nulas  $\mathbb{E}(X_i) = \mathbb{E}(Y_i) = 0$ .

Para o Formato 1  $X_i$  e  $Y_i$  possuem variâncias distintas com os respectivos valores  $\mathbb{E}(X_i^2) = \sigma_X^2$  e  $\mathbb{E}(Y_i^2) = \sigma_Y^2$  e

$$\eta \triangleq \sigma_X^2 / \sigma_Y^2 \quad (2.8)$$

é definido como a razão entre as potências das componentes em fase e em quadratura das ondas de múltiplos percursos dentro de cada *clusters*  $i$ . No Formato 2,  $X_i$  e  $Y_i$  são processos Gaussianos mutuamente correlacionados, possuem variâncias idênticas  $\sigma^2$  e

$$\eta \triangleq \mathbb{E}(X_i Y_i) / \sigma^2 \quad (2.9)$$

é definido como o coeficiente de correlação entre os processos em fase e em quadratura.

Pode-se obter o modelo de desvanecimento  $\eta$ - $\mu$  definindo  $\mu > 0$  como uma extensão real do parâmetro  $n/2$ . Partindo de (2.7) e seguindo os procedimentos padrões de transformação de variáveis aleatórias, a FDP de  $R$  é encontrada como [10, eq. (27)]

$$f_R^{\eta-\mu}(r) = \frac{4r^{2\mu} \sqrt{\pi} \mu^{\mu+0.5} h^\mu}{\hat{r}^{2\mu+1} \Gamma(\mu) H^{\mu-0.5}} \exp\left(-\frac{2\mu r^2 h}{\hat{r}^2}\right) I_{\mu-0.5}\left(\frac{2\mu H r^2}{\hat{r}^2}\right), \quad (2.10)$$

com  $r \geq 0$ , em que, para o Formato 1,  $0 < \eta < \infty$ ,  $h = (2 + \eta^{-1} + \eta)/4$  e  $H = (\eta^{-1} - \eta)/4$ . Ainda no Formato 1, a distribuição é simétrica em torno de  $\eta = 1$ . No Formato 2,  $-1 < \eta < 1$ ,  $h = (1 - \eta^2)^{-1}$  e  $H = \eta/(1 - \eta^2)$  e a distribuição é simétrica em torno de  $\eta = 0$ .

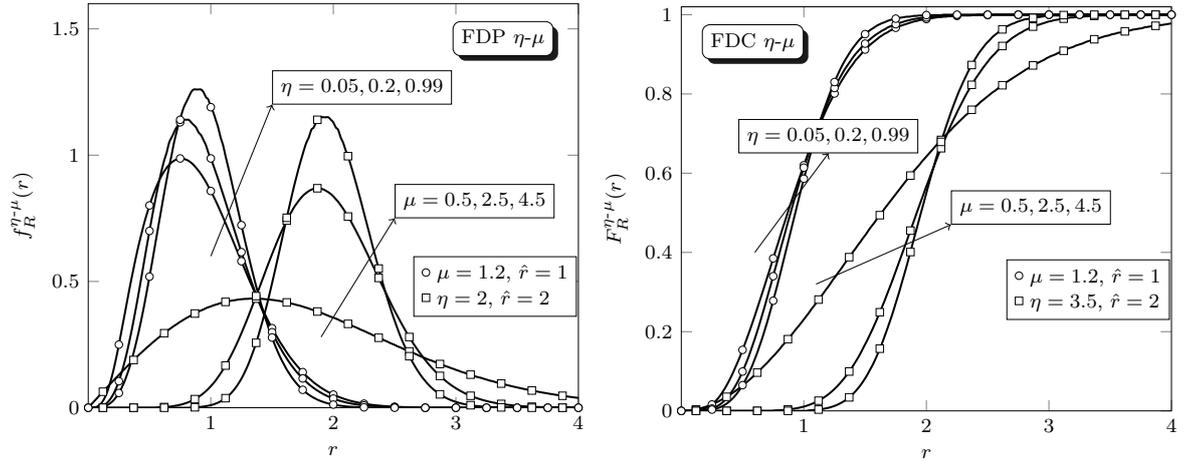
A FDC  $F_R(r)$  da envoltória  $R$  para o modelo de canal  $\eta$ - $\mu$  pode ser obtida de (2.10) como [10, eq. (19)]

$$F_R^{\eta-\mu}(r) = 1 - \mathfrak{U}_\mu\left(\frac{H}{h}, \frac{r\sqrt{2\mu h}}{\hat{r}}\right), \quad (2.11)$$

com  $r \geq 0$ , na qual, por conveniência, foi definida a seguinte função

$$\mathfrak{U}_\nu(a, b) = \frac{\sqrt{\pi} 2^{\frac{3}{2}-\nu} (1-a^2)^\nu}{a^{\nu-\frac{1}{2}} \Gamma(\nu)} \int_b^\infty \exp(-x^2) x^{2\nu} I_{\nu-\frac{1}{2}}(ax^2) dx. \quad (2.12)$$

Seja  $\Upsilon$  a SNR instantânea por bit do sinal recebido como uma função da envoltória do desvanecimento  $R$  definida por  $\Upsilon \triangleq R^2 E_b / N_0$ , com  $E_b / N_0$  sendo a razão entre

Figura 2.2: FDPs e FDCs  $\eta$ - $\mu$ 

a energia média por bit e a densidade espectral unilateral de potência do ruído. A FDP de  $\Upsilon$  é obtida ao realizar-se o processo de transformação de variável em (2.10), produzindo

$$f_{\Upsilon}^{\eta-\mu}(\gamma) = \frac{2\sqrt{\pi} \mu^{\mu+0.5} h^{\mu} \gamma^{\mu-0.5} I_{\mu-0.5}(2\mu H \gamma / \hat{\gamma})}{\Gamma(\mu) H^{\mu-0.5} \hat{\gamma}^{\mu+0.5} \exp(2\mu h \gamma / \hat{\gamma})}. \quad (2.13)$$

com  $\gamma \geq 0$ , em que, novamente,  $\hat{\gamma}$  é a SNR média por bit.

Na Figura 2.2, algumas curvas da FDP  $\eta$ - $\mu$  e da FDC  $\eta$ - $\mu$  são geradas em função de  $r$ . Dois conjuntos de curvas são desenhadas: i) a FDP  $\eta$ - $\mu$  e a FDC  $\eta$ - $\mu$  para diversos valores do parâmetro  $\eta$ , tais como  $\{0.05, 0.2, 0.99\}$ , com um valor fixo dos parâmetros  $\mu = 1.2$  e  $\hat{r} = 1$ , ii) a FDP  $\eta$ - $\mu$  e a FDC  $\eta$ - $\mu$  para diversos valores do parâmetro  $\mu$ , tais como  $\{0.5, 2.5, 4.5\}$ , com um valor fixo dos parâmetros  $\eta = 2$  e  $\hat{r} = 2$ . Observe que com o aumento do valor do parâmetro  $\eta$  em direção a 1 com um valor fixo do parâmetro  $\mu$  ou o aumento do valor do parâmetro  $\mu$  com um valor fixo do parâmetro  $\eta$  torna a FDP  $\eta$ - $\mu$  mais concentrada entorno de  $\hat{r}$ . Ou seja, o desvanecimento passa a ser menos severo, conseqüentemente o canal torna-se mais determinístico.

Várias distribuições conhecidas podem ser obtidas como casos especiais da densidade de probabilidade  $\eta$ - $\mu$ . A distribuição Hoyt pode ser obtida da distribuição  $\eta$ - $\mu$  ajustando  $\mu = 0.5$ . Nesse caso, o parâmetro da distribuição Hoyt é dado por  $q^2 = \eta$  no Formato 1 ou  $q^2 = (1 - \eta)/(1 + \eta)$  para o Formato 2. Da Hoyt, a distribuição Semi-Gaussiana é obtida para  $\eta \rightarrow 0$  ou  $\eta \rightarrow \infty$  no Formato 1, ou  $\eta \rightarrow \pm 1$  no Formato 2. Da mesma forma, a distribuição Rayleigh é obtida para  $\mu = 0.5$  e  $\eta = 1$  no Formato 1, ou  $\eta = 0$  no Formato 2. A distribuição Nakagami- $m$  pode ser obtida da distribuição  $\eta$ - $\mu$  ajustando  $\mu = m$  e  $\eta \rightarrow 0$  no Formato 1, ou  $\eta \rightarrow \pm 1$  no Formato 2. Da distribuição Nakagami- $m$ , a Semi-Gaussiana é obtida para  $\mu = m = 0.5$  ou a distribuição Rayleigh para  $\mu = m = 1$  [10, Sec. 3.3].

## 2.3 A distribuição $\kappa$ - $\mu$

A distribuição  $\kappa$ - $\mu$  [10] é um modelo generalizado de canal com desvanecimento de curto prazo. Ela pode ser melhor utilizada para representar canais com desvanecimento em que exista linha de visada direta. No modelo de canal  $\kappa$ - $\mu$ , o meio de propagação é considerado não homogêneo.

Em canais  $\kappa$ - $\mu$ , o sinal é composto por vários *clusters* contendo ondas provenientes de múltiplos percursos. A representação da envoltória  $R$ , com valor *rms*  $\hat{r} = \sqrt{\mathbb{E}(R^2)}$ , pode ser efetuada, dentro da contextualização da Seção 1.1.1, por [10, eq. (6)]

$$R^2 = \sum_{i=1}^n (X_i + p_i)^2 + \sum_{i=1}^n (Y_i + q_i)^2, \quad (2.14)$$

em que  $X_i$  e  $Y_i$  são processos Gaussianos mutuamente independentes, com médias nulas,  $\mathbb{E}(X_i) = \mathbb{E}(Y_i) = 0$ , e variâncias idênticas,  $\mathbb{E}(X_i^2) = \mathbb{E}(Y_i^2) = \sigma^2$ .  $p_i$  e  $q_i$  são os respectivos valores médios das componentes de múltiplos percursos do *cluster*  $i$  em fase e em quadratura.

Pode-se obter o modelo de desvanecimento  $\kappa$ - $\mu$  definindo  $\mu > 0$  como uma extensão real do parâmetro  $n$ . Partindo de (2.14) e seguindo os procedimentos padrões de transformação de variáveis aleatórias, a FDP da envoltória  $R$  é encontrada como [10, eq. (11)]

$$f_R^{\kappa-\mu}(r) = \frac{2\mu(\kappa+1)^{\frac{\mu+1}{2}} r^\mu}{\kappa^{\frac{\mu-1}{2}} \exp(\kappa\mu) \hat{r}^{\mu+1}} \exp\left(-\frac{(\kappa+1)\mu r^2}{\hat{r}^2}\right) I_{\mu-1}\left(\frac{2\sqrt{\kappa(\kappa+1)}\mu r}{\hat{r}}\right), \quad (2.15)$$

com  $r \geq 0$ , na qual  $\kappa = d^2/(2n\sigma^2)$  é a razão entre a potência total das componentes dominantes e a potência total das ondas espalhadas e  $d^2 = \sum_{i=1}^n (p_i^2 + q_i^2)$ .

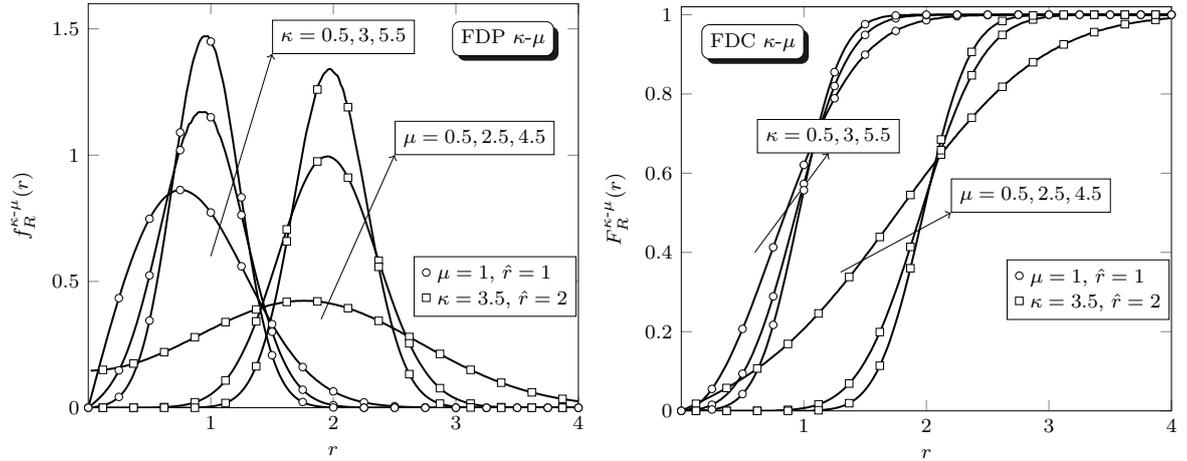
A FDC  $F_R(r)$  da envoltória  $R$  para o modelo de canal  $\kappa$ - $\mu$  pode ser obtida de (2.15) como [10, eq. (3)]

$$F_R^{\kappa-\mu}(r) = 1 - Q_\mu\left(\sqrt{2\kappa\mu}, \frac{r\sqrt{2(\kappa+1)}\mu}{\hat{r}}\right), \quad (2.16)$$

com  $r \geq 0$ , na qual

$$Q_\nu(a, b) = \frac{1}{a^{\nu-1}} \int_b^\infty x^\nu \exp\left(-\frac{a^2 + x^2}{2}\right) I_{\nu-1}(ax) dx \quad (2.17)$$

é a função Marcum  $Q$  generalizada [27].

Figura 2.3: FDPs e FDCs  $\kappa$ - $\mu$ 

Seja  $\Upsilon$  a SNR instantânea por bit do sinal recebido como uma função da envoltória do desvanecimento  $R$  definida por  $\Upsilon \triangleq R^2 E_b/N_0$ , com  $E_b/N_0$  sendo a razão entre a energia média por bit e a densidade espectral unilateral de potência do ruído. A FDP de  $\Upsilon$  é obtida ao realizar-se uma mudança de variável em (2.15), produzindo

$$f_{\Upsilon}^{\kappa-\mu}(\gamma) = \frac{\mu(1+\kappa)^{\frac{\mu+1}{2}} \gamma^{\frac{\mu-1}{2}} I_{\mu-1}(2\mu\sqrt{\kappa(1+\kappa)}\gamma/\hat{\gamma})}{\kappa^{\frac{\mu-1}{2}} \exp(\mu\kappa)\hat{\gamma}^{\frac{\mu+1}{2}} \exp(\mu(1+\kappa)\gamma/\hat{\gamma})}. \quad (2.18)$$

com  $r \geq 0$ , em que, novamente,  $\hat{\gamma}$  é a SNR média por bit.

Na Figura 2.3, algumas curvas da FDP  $\kappa$ - $\mu$  e da FDC  $\kappa$ - $\mu$  são geradas em função de  $r$ . Dois conjuntos de curvas são desenhadas: i) a FDP  $\kappa$ - $\mu$  e a FDC  $\kappa$ - $\mu$  para diversos valores do parâmetro  $\kappa$ , tais como  $\{0.5, 3, 5.5\}$ , com um valor fixo dos parâmetros  $\mu = 1$  e  $\hat{r} = 1$ , ii) a FDP  $\kappa$ - $\mu$  e a FDC  $\kappa$ - $\mu$  para diversos valores do parâmetro  $\mu$ , tais como  $\{0.5, 2.5, 4.5\}$ , com um valor fixo dos parâmetros  $\kappa = 3.5$  e  $\hat{r} = 2$ . Observe que com o aumento do valor do parâmetro  $\kappa$  com um valor fixo do parâmetro  $\mu$  ou o aumento do valor do parâmetro  $\mu$  com um valor fixo do parâmetro  $\kappa$  torna a FDP  $\kappa$ - $\mu$  mais concentrada entorno de  $\hat{r}$ . Ou seja, o desvanecimento passa a ser menos severo, consequentemente o canal torna-se mais determinístico.

Várias distribuições conhecidas podem ser obtidas como casos especiais da distribuição  $\kappa$ - $\mu$ . A distribuição Rice pode ser obtida da distribuição  $\kappa$ - $\mu$  ajustando  $\mu = 1$ . Nesse caso o parâmetro  $\kappa$  coincide com o conhecido parâmetro  $K$  da distribuição Rice. Da distribuição Rice, ao ajustar o parâmetro  $K = 0$ , portanto  $\kappa \rightarrow 0$  e  $\mu = 1$  na distribuição  $\kappa$ - $\mu$ , a distribuição Rayleigh pode ser obtida na sua forma exata. A distribuição Nakagami- $m$  pode ser compreendida como sendo composta por *clusters* de ondas de múltiplos percursos nos quais não exista componente dominante [11]. Logo, ao ajustar

$\kappa = 0$ , deveria ser possível obter a distribuição Nakagami- $m$ . Entretanto,  $\kappa = 0$  produz uma indeterminação na distribuição  $\kappa$ - $\mu$ . Em [10, Apêndice A], Yacoub demonstra que no limite, quando  $\kappa \rightarrow 0$ , a distribuição Nakagami- $m$  é obtida em sua formulação exata como um caso especial da distribuição  $\kappa$ - $\mu$ . Nesse contexto, o parâmetro  $\mu$  coincide com o bem conhecido parâmetro  $m$  de Nakagami. Ao ajustar  $\mu = m = 1$  na distribuição Nakagami- $m$ , ou seja,  $\kappa \rightarrow 0$  e  $\mu = 1$  para a distribuição  $\kappa$ - $\mu$ , a distribuição Rayleigh é obtida. Ou ainda, ajustando  $\mu = m = 0.5$  na distribuição Nakagami- $m$ , ou seja,  $\kappa \rightarrow 0$  e  $\mu = 0.5$  para a distribuição  $\kappa$ - $\mu$ , a distribuição Semi-Gaussiana é obtida [10, Sec. 2.3].

## 2.4 Modelos do erro da fase

A fase de referência, a qual é utilizada para gerar a portadora local no receptor, é usualmente extraída de uma versão ruidosa do sinal transmitido. Portanto, independentemente do método adotado para estimar a fase da portadora recebida, o sistema de recepção opera com uma referência imprecisa da portadora do sinal recebido, ou seja, a portadora local não é uma reprodução exata da portadora transmitida. Encontram-se na literatura dois métodos utilizados popularmente para a estimação da fase da portadora. São eles [25]: malha de captura de fase (*phase locked loop*, PLL) e decisão baseada em máxima verossimilhança (*Decision aided maximum likelihood*, DA ML). O PLL consiste em um sistema de controle de fase automático constituído, basicamente, por três blocos principais: o multiplicador, um filtro linear invariante no tempo e o oscilador controlado por tensão (*voltage-controlled oscillator*, VCO) [28]. O DA ML é um algoritmo que se baseia no critério de máxima verossimilhança aplicado às amostras da variável de decisão do receptor [29,30]. Desde que os esforços nesta dissertação são direcionados aos efeitos impostos à probabilidade de erro pela estimação imperfeita da fase no receptor, deve-se dar principal atenção aos modelos estatísticos provenientes desses dois métodos de estimação da fase.

### 2.4.1 Modelo de Tikhonov

Admita o seguinte cenário de comunicação:

- Uma portadora não modulada (tom piloto) é transmitida juntamente com o feixe de informação;
- O receptor utiliza um circuito PLL para sintonizar a frequência e a fase da portadora transmitida;

- Apenas o ruído AWGN degrada o tom piloto recebido;
- O circuito PLL é capaz de estimar perfeitamente a frequência da portadora e
- O filtro linear invariante no tempo é de primeira ordem.

Dada a contextualização anterior, a distribuição estatística Tikhonov (também conhecida como distribuição de von Mises ou *circular normal distribution*) é utilizada para modelar o erro na estimativa da fase cometido pelo PLL [4]. Entretanto, mesmo não atendendo a todos os requisitos listados acima, Viterbi [4] demonstra que a distribuição Tikhonov tem um excelente ajuste para modelar o erro da fase em sistemas que utilizem o PLL. A FDP Tikhonov é dada por [4, eq. (4.35)]

$$f_{\Phi}(\phi) = \frac{\exp(\rho \cos(\phi))}{2\pi I_0(\rho)}, \quad (2.19)$$

com  $-\pi < \phi \leq \pi$ , na qual o parâmetro  $\rho$  é chamado de SNR do *loop*, i.e., a SNR na banda de passagem do PLL. Ele é dado por  $\rho = 2P/(N_0B)$  [4, eq. (4.36)], com  $P$  representando a potência da portadora não modulada e  $B$  sendo a largura de banda do *loop*. Em outras palavras, o parâmetro  $\rho$  é proporcional ao inverso da variância de  $\Phi$  [4, eq. (2.54)]. Note que quando  $\rho = 0$ , (2.19) se torna uma distribuição uniforme, representando o cenário de uma recepção sem qualquer sincronização da fase. Quando  $\rho \rightarrow \infty$ , (2.19) se torna um impulso, representando o cenário de detecção idealmente coerente.

### 2.4.2 Modelo Gaussiano

Desde que a estimação da fase seja feita com o método DA ML, a FDP do erro da fase é dada por [29, 30]

$$f_{\Phi}(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\Phi}^2}} \exp\left(-\frac{\phi^2}{2\sigma_{\Phi}^2}\right), \quad (2.20)$$

com  $-\infty < \phi < \infty$ , em que  $\sigma_{\Phi}^2$  é o valor da variância de  $\Phi$ .

Desde que a SNR do *loop* seja suficientemente alta, i.e.  $\rho \gg 1$ , a FDP Tikhonov (2.19) pode ser aproximada por uma distribuição Gaussiana (2.20). Nesse caso  $\rho \cong 1/\sigma_{\Phi}^2$  [31].

Com o objetivo de comparação, a Figura 2.4 representa graficamente a FDP Tikhonov e a FDP Gaussiana para diversos valores de seus respectivos parâmetros SNR do *loop*,  $\rho = \{0, 2, 5, 10, 100\}$ , e variância,  $\sigma_{\Phi}^2 = \{\infty, 1/2, 1/5, 1/10, 1/100\}$ . A escolha dos valores para os parâmetros  $\rho$  e  $\sigma_{\Phi}^2$  foi propositalmente feita para que seja possível,

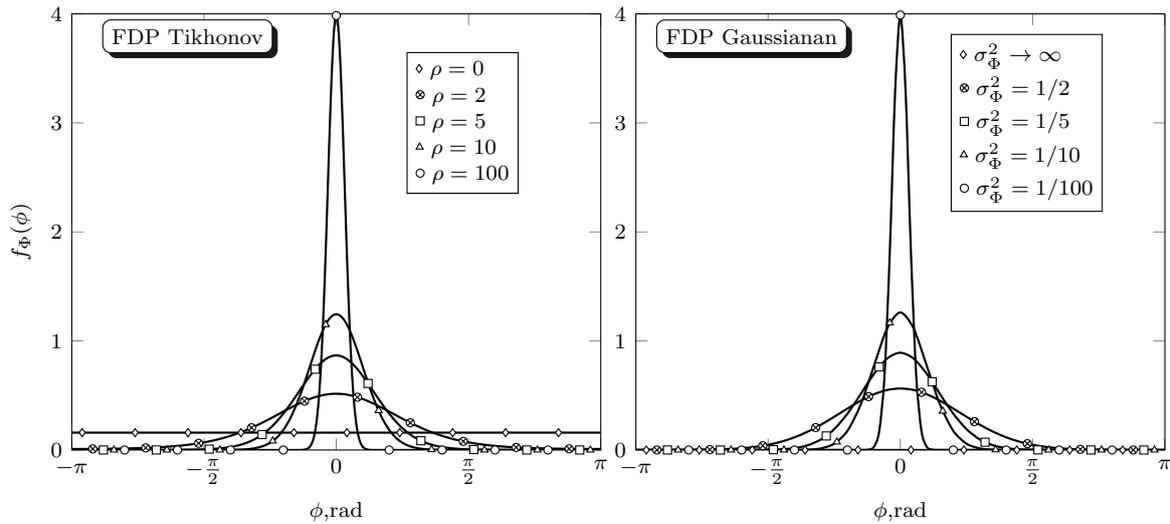


Figura 2.4: FDPs Tikhonov e Gaussiana para diversos valores dos parâmetros  $\rho$  e  $\sigma_{\Phi}^2$

ao menos visualmente, notar que a distribuição Tikhonov aproxima-se de uma distribuição Gaussiana quando  $\rho \gg 1$ . Observe também que ocorre um aumento na altura e um estreitamento na base da FDP de  $\Phi$ , tornando-a um impulso quando  $\rho \rightarrow \infty$ .

## 2.5 Conclusões

Este capítulo apresentou um resumo sobre as distribuições  $\alpha$ - $\mu$ ,  $\eta$ - $\mu$  e  $\kappa$ - $\mu$  utilizadas na caracterização de desvanecimentos de curto prazo. Também foram discutidos alguns dos principais modelos utilizados na estimação da fase pelo receptor e as principais distribuições que caracterizam o erro na estimativa da fase. As contribuições deste trabalho, as quais serão apresentadas no Capítulo 3, são dependentes do entendimento dos modelos estatísticos apresentados nesse capítulo.

## Capítulo 3

# Análise de Desempenho

**E**M sistemas de comunicação sem fio, a BER e a taxa de erro de símbolos (*symbol error rate*, SER) são comumente avaliadas sob a perspectiva de um canal puramente AWGN e sob a suposição de uma recepção idealmente coerente, ou seja, a frequência e fase da portadora recebida estão acessíveis no circuito demodulador do receptor [5]. Neste capítulo é adicionado à análise os efeitos de imprecisão na estimativa da fase pelo receptor e o desvanecimento no canal. Desde que o erro na estimação da fase e a envoltória do canal sejam representados por variáveis aleatórias, fica clara a necessidade de se trabalhar com a média das métricas de desempenho BER e SER, i.e. ABER e ASER, respectivamente.

O objetivo deste capítulo é deduzir, de forma exata ou assintótica, expressões de cálculo da ABER e ASER para sistemas de transmissão digital operando com modulação MPSK. Para todas as análises deste capítulo, a detecção parcialmente coerente é admitida. Mais especificamente, supõem-se a utilização de um circuito PLL juntamente com a transmissão de uma portadora tom piloto ou da técnica DA ML no receptor. É considerado o modelo de receptor generalizado com critério de decisão por máxima verossimilhança [2, Sec. 5.8].

### 3.1 ABER BPSK com ruído AWGN e estimação imperfeita da fase

Seja a representação discreta em banda base da amostra complexa da envoltória do sinal recebido  $Y$  dada por

$$y = A \exp(j(\vartheta + \phi)) + n_g, \quad (3.1)$$

em que  $j = \sqrt{-1}$  representa a unidade imaginária,  $A = \sqrt{E_b}$  é a amplitude do sinal transmitido e  $E_b$  é a energia do bit,  $n_g$  é uma variável aleatória Gaussiana complexa com média zero e com variância dada por  $\sigma^2 = N_0/2$ , na qual  $N_0$  representa a densidade espectral de potência unilateral do ruído AWGN.  $\vartheta$  e  $\phi$  representam a fase do sinal transmitido e o erro na estimação da fase pelo receptor, respectivamente. Note que a SNR é  $A^2/\sigma^2 = 2E_b/N_0$ .

Desde que os símbolos sejam equiprováveis e que  $\vartheta = \{-\pi; \pi\}$ , a probabilidade de erro de bit condicionada à variável  $\phi$  para sistemas operando com modulação BPSK sob a hipótese de um canal puramente AWGN é dada por [18, 19, 21, 22]

$$P_b^{\text{BPSK}}(\phi) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[ \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \cos(\phi) \right], \quad (3.2)$$

na qual  $\operatorname{erfc}(\cdot)$  representa a função erro complementar [26, 8.250] e  $\cos(\phi)$  é o fator de perda devido à imperfeição na estimação da fase.

A ABER para sistemas operando com modulação BPSK e detecção não idealmente coerente sob a hipótese de um canal puramente AWGN pode ser escrita como uma média sobre todos os possíveis valores de  $\Phi$ , logo

$$P_b^{\text{BPSK}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[ \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \cos(\phi) \right] f_{\Phi}(\phi) d\phi, \quad (3.3)$$

sendo  $f_{\Phi}(\phi)$  a FDP do erro na estimação da fase  $\Phi$ .

## 3.2 ABER QPSK com ruído AWGN e estimação imperfeita da fase

Em sistemas operando com modulação QPSK,  $\vartheta$ , na Equação (3.1), pode assumir os seguintes valores:  $\{-3\pi/4; -\pi/4; \pi/4; 3\pi/4\}$  e deve-se ajustar  $A = \sqrt{2E_b}$ . O mapeamento Gray dos bits de informação nos símbolos é adotado. Desde que os símbolos sejam equiprováveis, pode-se analisar o desempenho da modulação QPSK por meio de dois sistemas BPSK independentes [2, Sec. 6.2.2.6], um em fase e outro em quadratura. Portanto, adaptando (3.3), tem-se as probabilidades de erro de bit em fase ( $P_I^{\text{QPSK}}$ ) e em quadratura ( $P_Q^{\text{QPSK}}$ ), respectivamente, por

$$P_I^{\text{QPSK}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[ \sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \cos(\vartheta + \phi) \right] f_{\Phi}(\phi) d\phi \quad (3.4)$$

e

$$P_Q^{\text{QPSK}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[ \sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \sin(\vartheta + \phi) \right] f_{\Phi}(\phi) d\phi. \quad (3.5)$$

Observe que  $\sqrt{A} \cos(\vartheta + \phi)$  em (3.4) e  $\sqrt{A} \sin(\vartheta + \phi)$  em (3.5) representam a projeção do valor médio de  $Y$  dado  $\Phi$ ,  $\mathbb{E}(Y|\phi)$ , sobre os eixos em fase e em quadratura, respectivamente.

Pode-se facilmente notar que  $\cos(\pi/4 - \phi) = \sin(\pi/4 + \phi)$ , portanto, desde que  $f_{\Phi}(\phi)$  seja par e  $\vartheta = \pi/4$ , tem-se  $P_I^{\text{QPSK}} = P_Q^{\text{QPSK}}$ .

A estimação correta de um símbolo QPSK obrigatoriamente requer que ambos os sistemas parciais BPSK, em fase e em quadratura, estimem seus respectivos símbolos corretamente. Portanto pode-se definir a probabilidade de erro de símbolo na modulação QPSK como

$$P_s^{\text{QPSK}}(\phi) = 1 - (1 - P_I^{\text{QPSK}}(\phi))(1 - P_Q^{\text{QPSK}}(\phi)) = 1 - (1 - P_I^{\text{QPSK}}(\phi))^2 \quad (3.6)$$

pois  $P_I^{\text{QPSK}}$  e  $P_Q^{\text{QPSK}}$  são equiprováveis.

Para o cálculo da ABER deve-se realizar uma média ponderada de três situações. Primeiramente, ambos os sistemas parciais BPSK erram simultaneamente, logo tem-se 2 bits errados ( $2P_I P_Q = 2P_I^2$ ). Em um segundo cenário, apenas um sistema parcial BPSK erra, logo um único bit errado ( $(1 - P_I)P_Q + (1 - P_Q)P_I = 2P_I - 2P_I^2$ ). E por último, não ocorrem erros ( $0(1 - P_I)(1 - P_Q) = 0$ ). Assim, após algumas manipulações matemáticas simples, conclui-se que a ABER para sistemas operando com QPSK sob a hipótese de um canal puramente AWGN e uma estimativa imperfeita da fase é

$$P_b^{\text{QPSK}} = P_I^{\text{QPSK}} = P_Q^{\text{QPSK}}. \quad (3.7)$$

### 3.3 ABER BPSK e QPSK em canais com desvanecimento, ruído AWGN e estimação imperfeita da fase

Em prol de simplificarmos a notação matemática e observando a semelhança entre (3.3) e (3.4), pode-se facilmente generalizá-las por meio da utilização de duas novas constantes,  $\Omega$  e  $\zeta$ . Logo, o cálculo da ABER, tanto para modulação BPSK quanto QPSK, sob a hipótese de estimação imperfeita da fase e ruído AWGN é dado por

$$P_b^{\text{BPSK-QPSK}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[ \sqrt{\frac{\Omega E_b}{N_0}} \cos(\phi + \zeta) \right] f_{\Phi}(\phi) d\phi, \quad (3.8)$$

na qual tem-se  $\Omega = 1$  e  $\zeta = 0$  para a modulação BPSK,  $\Omega = 2$  e  $\zeta = \pi/4$  para a modulação QPSK. Note que foi adotado o valor de  $\pi/4$  para a constante  $\vartheta$  no QPSK sem qualquer perda de generalidade, pois resultados semelhantes são alcançados ajustando  $\vartheta$  para qualquer valor dentre os seguintes:  $\{-3\pi/4; -\pi/4; 3\pi/4\}$ . É válido ressaltar que uma rotação na constelação de símbolos do QPSK não altera a probabilidade de erro [2].

Seja  $R$  a envoltória do sinal recebido com desvanecimento plano e lento,  $\Upsilon$  a SNR instantânea por bit do sinal recebido como uma função do desvanecimento dada por  $\Upsilon = R^2 E_b / N_0$ . Portanto a ABER para sistemas BPSK e QPSK pode ser calculada como uma média sobre todos os valores de  $\Upsilon$ , logo adequando (3.8) tem-se

$$P_b^{\text{BPSK-QPSK}} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \text{erfc} \left[ \sqrt{\Omega\gamma} \cos(\phi + \zeta) \right] f_{\Phi}(\phi) f_{\Upsilon}(\gamma) d\phi d\gamma. \quad (3.9)$$

A função erro complementar presente em (3.9) pode ser mapeada dentro da função erro  $\text{erf}(x) = 1 - \text{erfc}(x)$  [26, eq. (8.250.4)], e com auxílio da representação em série de infinitos termos [32, eq. (15)], pode ser ainda expressa como

$$\begin{aligned} \text{erfc}[\sqrt{\Omega\gamma} \cos(\phi + \zeta)] &= 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\ell + 0.5) (\Omega\gamma)^{\ell+0.5}}{(-1)^{-\ell} (2\ell + 1)!} \\ &\quad \times {}_1F_1(\ell + 0.5; 2\ell + 2; -\Omega\gamma) \cos[(2\ell + 1)(\phi + \zeta)], \end{aligned} \quad (3.10)$$

com  ${}_1F_1(\cdot; \cdot; \cdot)$  sendo a função hipergeométrica confluyente [26, 9.210] e  $\Gamma(\cdot)$  a função gamma [26, 8.310].

Substituindo (3.10) em (3.9), e após algumas manipulações matemáticas, tem-se

$$P_b^{\text{BPSK-QPSK}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell} \Omega^{\ell+0.5}}{(2\ell + 1)!} \Gamma(\ell + 0.5) \quad (3.11a)$$

$$\times \int_0^{\infty} \gamma^{\ell+0.5} {}_1F_1(\ell + 0.5; 2\ell + 2; -\Omega\gamma) f_{\Upsilon}(\gamma) d\gamma \quad (3.11b)$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \cos[(2\ell + 1)(\phi + \zeta)] f_{\Phi}(\phi) d\phi, \quad (3.11c)$$

com  $\phi$  e  $\gamma$  denotando variáveis aleatórias mutuamente independentes, tal como comumente admitido na literatura técnica [19, 21] para a transmissão do tom piloto independente do feixe de informação.

Tomando apenas a integral (3.11c) e substituindo  $f_{\Phi}(\phi)$  pela FDP Tikhonov apre-

sentada em (2.19), resulta em

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2 &= \frac{1}{2\pi I_0(\rho)} \int_{-\pi}^{\pi} \cos[(2\ell + 1)(\phi + \zeta)] \exp[\rho \cos(\phi)] d\phi \\ &= \cos[(2\ell + 1)\zeta] \frac{I_{2\ell+1}(\rho)}{I_0(\rho)}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

na qual  $I_n(\cdot)$  é a função modificada de Bessel de ordem  $n$  [26].

A integral (3.11c) pode ser resolvida para um erro da fase com distribuição Gaussiana (2.20), como

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_3 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\Phi^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos[(2\ell + 1)(\phi + \zeta)] \exp\left(-\frac{\phi^2}{2\sigma_\Phi^2}\right) d\phi \\ &= \cos[(2\ell + 1)\zeta] \exp\left(-0.5\sigma_\Phi^2(2\ell + 1)^2\right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

### 3.3.1 ABER com desvanecimento $\alpha$ - $\mu$

Caso a envoltória do canal com desvanecimento  $R$  obedeça a uma distribuição  $\alpha$ - $\mu$ , a FDP da SNR instantânea por bit do sinal recebido  $\Upsilon$  é dada por (2.4). Tomando somente a integral (3.11b) e substituindo  $f_\Upsilon(\gamma)$  pela FDP  $\alpha$ - $\mu$ , produz

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= \int_0^\infty \gamma^{\ell+0.5\alpha\mu-0.5} {}_1F_1(\ell + 0.5; 2\ell + 2; -\Omega\gamma) \\ &\quad \times \frac{\alpha\mu^\mu}{2\Gamma(\mu)\hat{\gamma}^{0.5\alpha\mu}} \exp\left[-\mu\left(\frac{\gamma}{\hat{\gamma}}\right)^{0.5\alpha}\right] d\gamma. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Para o cálculo da integral em (3.14), primeiramente deve-se reescrever a função hipergeométrica confluyente e a função exponencial utilizando [26, eq. (9.34.8)] e [33], respectivamente. Em outras palavras, tem-se

$${}_1F_1(\ell + 0.5; 2\ell + 2; -\Omega\gamma) = \frac{\Gamma(2\ell + 2)}{\Gamma(\ell + 0.5)} G_{1,2}^{1,1}\left(\Omega\gamma \left| \begin{matrix} -\ell + 0.5 \\ 0, -2\ell - 1 \end{matrix} \right.\right) \quad (3.15)$$

e

$$\exp(-y) = G_{0,1}^{1,0}\left(y \left| \begin{matrix} - \\ 0 \end{matrix} \right.\right), \quad (3.16)$$

nas quais  $G_{p,q}^{m,n}(\cdot | \cdot)$  representa a função-G de Meijer [26, eq. (9.301)].

Define-se  $\alpha/2 \triangleq l/b$  de modo que o maior divisor comum (MDC)  $\text{MDC}(l, b) = 1$  com  $l$  e  $b$  inteiros. Consequentemente, pode-se resolver a integral em  $\mathcal{I}_1$  utilizando

(3.15), (3.16) e a diretiva presente em [34], logo

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= \frac{\alpha\mu}{2\Gamma(\mu)\hat{\gamma}^{0.5\alpha\mu}} \frac{\Gamma(2\ell+2)}{\Gamma(\ell+0.5)} \frac{\sqrt{b}l^{0.5\alpha\mu-1.5}}{(2\pi)^{0.5l+0.5b-1}} \\ &\times \left(\frac{1}{\Omega}\right)^{0.5\alpha\mu+\ell+0.5} G_{2l,l+b}^{l+b,l} \left( \frac{l^l \mu^b}{(\Omega\hat{\gamma})^l b^b} \middle| \begin{matrix} P_1, P_2 \\ P_3 \end{matrix} \right), \end{aligned} \quad (3.17)$$

com

$$\begin{aligned} P_1 &= \Delta(l, \ell + 0.5\alpha\mu + 0.5), \\ P_2 &= \Delta(l, -\ell + 0.5\alpha\mu - 0.5), \\ P_3 &= \Delta_1(b, 0, l, 0.5\alpha\mu + 1), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \Delta(a, b) &= \left\{ \frac{1-b}{a}, \frac{2-b}{a}, \dots, \frac{a-b}{a} \right\} \\ \Delta_1(a, b, c, d) &= \left\{ \frac{b}{a}, \dots, \frac{b+a-1}{a}, \frac{1-d}{c}, \dots, \frac{c-d}{c} \right\}. \end{aligned}$$

Então, substituindo (3.17) em (3.11b) e, simultaneamente, (3.12) para o erro na estimação da fase modelado por uma distribuição Tikhonov, ou (3.13) para o erro na estimação da fase modelado por uma distribuição Gaussiana, em (3.11c), a ABER é encontrada como

$$\begin{aligned} P_{\text{BPSK-QPSK}}^{\alpha-\mu} &= \frac{1}{2} - \frac{\alpha\mu^\mu b^{0.5l(\alpha\mu-3)/2}}{(\Omega\hat{\gamma})^{\alpha\mu/2} (2\pi)^{b/2+l/2} \Gamma(\mu)} \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell \mathcal{I}_f \\ &\times G_{2l,l+b}^{l+b,l} \left( \frac{l^l \mu^b}{(\Omega\hat{\gamma})^l b^b} \middle| \begin{matrix} \Delta(l, \ell + 0.5\alpha\mu + 0.5), \Delta(l, -\ell + 0.5\alpha\mu - 0.5) \\ \Delta_1(b, 0, l, 0.5\alpha\mu + 1) \end{matrix} \right), \end{aligned} \quad (3.18)$$

na qual  $\mathcal{I}_f$  é a equação deduzida em (3.12) ou em (3.13). A Equação (3.18) é geral e exata e constitui uma contribuição original desta dissertação.

A ABER dada em (3.18), embora apresente uma série de infinitos termos, converge de forma constante e rápida para qualquer valor de precisão prática. A Figura 3.1 representa graficamente o erro absoluto para os sistemas BPSK e QPSK versus o número de termos  $L$  em (3.18) para diferentes cenários. O erro absoluto é calculado com o valor de (3.18) truncado em  $L$  termos menos o exato valor de (3.9), calculado numericamente. Note como o número necessário de termos é realmente pequeno. Por exemplo, o número de termos em (3.18) exigidos para sete casas decimais de precisão é de no máximo 7, nos cenários avaliados.

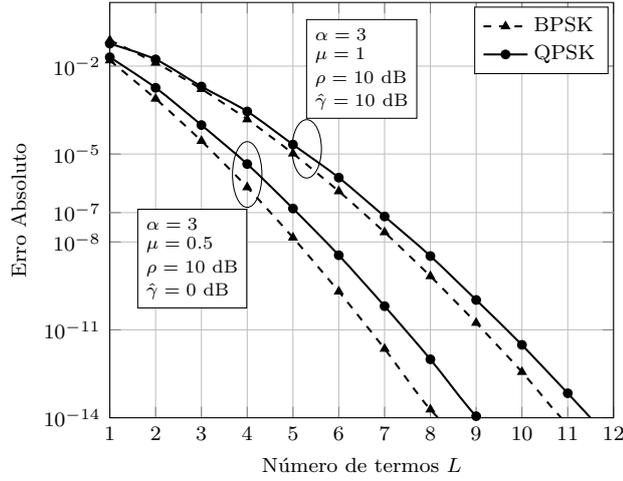


Figura 3.1: Erro absoluto para sistemas BPSK e QPSK versus o número de termos  $L$  em (3.18) para vários valores da SNR média.

### 3.3.2 ABER com desvanecimento $\eta$ - $\mu$

Caso a envoltória do sinal recebido com desvanecimento  $R$  obedeça a uma distribuição  $\eta$ - $\mu$ , a FDP da SNR instantânea por bit do sinal recebido  $\Upsilon$  é dada por (2.13). Tomando somente a integral (3.11b) e substituindo  $f_{\Upsilon}(\gamma)$  pela FDP  $\eta$ - $\mu$ , produz

$$\mathcal{I}_1 = \frac{2\sqrt{\pi} \mu^{\mu+0.5} h^{\mu}}{\Gamma(\mu) H^{\mu-0.5} \hat{\gamma}^{\mu+0.5}} \int_0^{\infty} \gamma^{\ell+\mu} {}_1F_1(\ell + 0.5; 2\ell + 2; -\Omega\gamma) \frac{I_{\mu-0.5}(2\mu H\gamma/\hat{\gamma})}{\exp(2\mu h\gamma/\hat{\gamma})} d\gamma. \quad (3.19)$$

Para o cálculo da integral em (3.19), primeiramente deve-se reescrever a função modificada de Bessel como em [26, eq. (8.445)], ou seja,

$$I_{\mu-0.5}(2\mu H\gamma/\hat{\gamma}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu H\gamma/\hat{\gamma})^{\mu-0.5+2n}}{n! \Gamma(n + \mu + 0.5)}. \quad (3.20)$$

Posteriormente, com o auxílio da diretiva [26, eq. (7.621.4)] e após algumas manipulações matemáticas, tem-se

$$\mathcal{I}_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\sqrt{\pi} h^{\mu} \mu^{2\mu+2n} \Gamma(\ell + 2n + 2\mu + 0.5)}{n! H^{-2n} \Gamma(\mu) \hat{\gamma}^{2\mu+2n} \Gamma(n + \mu + 0.5)} \left( \frac{\hat{\gamma}}{2\mu h + \Omega \hat{\gamma}} \right)^{\ell+2\mu+2n+0.5} \times {}_2F_1 \left( \ell + 1.5, 2\mu + \ell + 2n + 0.5; 2\ell + 2; \frac{\Omega \hat{\gamma}}{2\mu h + \Omega \hat{\gamma}} \right), \quad (3.21)$$

em que  ${}_2F_1(\cdot, \cdot; \cdot; \cdot)$  é a função hipergeométrica [26, 9.10].

Então, substituindo (3.21) em (3.11b) e, simultaneamente, (3.12) para o erro na estimativa da fase modelado por uma distribuição Tikhonov, ou (3.13) para o erro na

estimação da fase modelado por uma distribuição Gaussiana, em (3.11c), a ABER é encontrada como

$$\begin{aligned}
 P_{\text{BPSK-QPSK}}^{\eta-\mu} &= \frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{\Omega\hat{\gamma}}\mu^{2\mu}h^\mu}{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu)(2\mu h + \Omega\hat{\gamma})^{2\mu+0.5}} \\
 &\times \sum_{\ell=0; n=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell (\Omega\hat{\gamma})^\ell \Gamma(\ell + 0.5) \Gamma(2\mu + \ell + 2n + 0.5)}{(2\ell + 1)! n! (\mu H)^{-2n} \Gamma(\mu + n + 0.5)} \left( \frac{1}{2\mu h + \Omega\hat{\gamma}} \right)^{\ell+2n} \\
 &\times \mathcal{I}_f {}_2F_1 \left( \ell + 1.5, 2\mu + \ell + 2n + 0.5; 2\ell + 2; \frac{\Omega\hat{\gamma}}{2\mu h + \Omega\hat{\gamma}} \right), \quad (3.22)
 \end{aligned}$$

na qual  $\mathcal{I}_f$  é a equação deduzida em (3.12) ou em (3.13). A Equação (3.22) é geral e exata e constitui uma contribuição original desta dissertação.

A convergência absoluta das séries de infinitos termos presentes em (3.22) pode ser demonstrada como se segue. Deve-se primeiramente observar que  ${}_2F_1(a, b; c; d)$  é convergente se  $|d| < 1; a > 0; b > 0; c > 0$  [26, 9.10]. A convergência do somatório em  $n$  para qualquer valor de  $\ell$  pode ser demonstrada pelo teste da razão de D'Alembert [35]. Para tal, a representação em série de infinitos termos para  ${}_2F_1(a, b; c; d)$  [26, 9.100] é utilizada, ou seja,

$$\begin{aligned}
 {}_2F_1 \left( \ell + 1.5, 2\mu + \ell + 2n + 0.5; 2\ell + 2; \frac{\Omega\hat{\gamma}}{2\mu h + \Omega\hat{\gamma}} \right) &= \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\ell + 1.5)_i (2\mu + \ell + 2n + 0.5)_i}{i! (2\ell + 2)_i} (\Omega\hat{\gamma})^i \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\ell + 1.5 + i) \Gamma(2\mu + \ell + 2n + 0.5 + i) \Gamma(2\ell + 2)}{i! \Gamma(2\ell + 2 + i) \Gamma(\ell + 1.5) \Gamma(2\mu + \ell + 2n + 0.5)} (\Omega\hat{\gamma})^i, \quad (3.23)
 \end{aligned}$$

em que  $(u)_i = \Gamma(u + i) / \Gamma(u)$  é o símbolo de Pochhammer [26], Logo, pelo teste da razão de D'Alembert [35] tem-se

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ell + 2\mu + 2n + 1 + 0.5)(\ell + 2\mu + 2n + 0.5)}{(n + 1)(\mu + n + 0.5)} \\
 &\times \left( \frac{H\mu}{\hat{\gamma}\Omega + 2h\mu} \right)^2 \frac{(i + \ell + 2\mu + 2n + 1 + 0.5)(i + \ell + 2\mu + 2n + 0.5)}{(\ell + 2\mu + 2n + 1 + 0.5)(\ell + 2\mu + 2n + 0.5)} \\
 &= \frac{H^2\mu^2}{(0.5\hat{\gamma}\Omega + h\mu)^2} = \frac{(\eta^2 - 1)^2 \mu^2}{(2\hat{\gamma}\eta\Omega + \eta(\eta + 2)\mu + \mu)^2} < 1. \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

A convergência do somatório em  $\ell$  para qualquer  $n$  também pode ser demonstrada pelo teste da razão de D'Alembert [35]. Para tal comprovação, supondo erro de fase Tikhonov, deve-se utilizar a representação de  $I_{2\ell+1}(\rho)$  em série de infinitos termos

como apresentada em [26, eq. (8.445)], ou seja,

$$I_{2\ell+1}(\rho) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\rho/2)^{2\ell+2l+1}}{l!\Gamma(2\ell+l+2)}, \quad (3.25)$$

resultando em

$$\begin{aligned} \lim_{\ell \rightarrow \infty} \left| \frac{U_{\ell+1}}{U_{\ell}} \right| &= \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{(\ell+0.5)(\rho/2)^2(\hat{\gamma}\Omega)(\ell+2\mu+2n+0.5)}{(2\ell+3)(2\ell+2)(2\ell+l+3)(2\ell+l+2)} \frac{1}{\hat{\gamma}\Omega+2\mu h(\eta)} \\ &\times \frac{(2\ell+3)(2\ell+2)(i+\ell+1.5)(i+\ell+2\mu+2n+0.5)}{(\ell+1.5)(i+2\ell+3)(i+2\ell+2)(\ell+2\mu+2n+0.5)} = 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Observe que em (3.12) e em (3.13)  $\cos((2\ell+1)\zeta) \neq 0$ , pois

$$\cos((2\ell+1)\pi/4) = \frac{\cos(\frac{\pi\ell}{2}) - \sin(\frac{\pi\ell}{2})}{\sqrt{2}} \neq 0. \quad (3.27)$$

### 3.3.3 ABER com desvanecimento $\kappa$ - $\mu$

Caso a envoltória do sinal recebido com desvanecimento  $R$  obedeça a uma distribuição  $\kappa$ - $\mu$ , a FDP da SNR instantânea por bit do sinal recebido  $\Upsilon$  é dada por (2.18). Tomando somente a integral (3.11b) e substituindo  $f_{\Upsilon}(\gamma)$  pela FDP  $\kappa$ - $\mu$ , produz

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= \frac{\mu(1+\kappa)^{\frac{\mu+1}{2}}}{\kappa^{\frac{\mu-1}{2}} \exp(\mu\kappa)\hat{\gamma}^{\frac{\mu+1}{2}}} \\ &\times \int_0^{\infty} \gamma^{\ell+0.5\mu} {}_1F_1(\ell+0.5; 2\ell+2; -\Omega\gamma) \frac{I_{\mu-1}(2\mu\sqrt{\kappa(1+\kappa)\gamma/\hat{\gamma}})}{\exp(\mu(1+\kappa)\gamma/\hat{\gamma})} d\gamma. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Para o cálculo da integral em (3.28), primeiramente deve-se reescrever a função modificada de Bessel como em [26, eq. (8.445)], portanto

$$I_{\mu-1}\left(2\mu\sqrt{\kappa(1+\kappa)\gamma/\hat{\gamma}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu\sqrt{\kappa(1+\kappa)\gamma/\hat{\gamma}})^{\mu-1+2n}}{n!\Gamma(n+\mu)}. \quad (3.29)$$

Posteriormente, com o auxílio da diretiva [26, eq. (7.621.4)] e após algumas manipulações matemáticas, tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\kappa^n \mu^{\mu+2n} (\kappa+1)^{\mu+n} \Gamma(\ell+n+\mu+0.5)}{n! \exp(\kappa\mu) \Gamma(n+\mu) \hat{\gamma}^{\mu+n}} \left( \frac{\hat{\gamma}}{(\kappa+1)\mu + \hat{\gamma}\Omega} \right)^{\ell+\mu+n+0.5} \\ &\times {}_2F_1\left(\ell+1.5, \mu+\ell+n+0.5; 2\ell+2; \frac{\hat{\gamma}\Omega}{(\kappa+1)\mu + \hat{\gamma}\Omega}\right), \end{aligned} \quad (3.30)$$

na qual  ${}_2F_1(\cdot, \cdot; \cdot; \cdot)$  é a função hipergeométrica [26, 9.10].

Então, substituindo (3.21) em (3.11b) e, simultaneamente, (3.12) para o erro na estimação da fase modelado por uma distribuição Tikhonov, ou (3.13) para o erro na estimação da fase modelado por uma distribuição Gaussiana, em (3.11c), a ABER é encontrada como

$$\begin{aligned}
P_{\text{BPSK-QPSK}}^{\kappa-\mu} &= \sum_{\ell=0; n=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell \Gamma(\ell + 0.5) (\hat{\gamma}\Omega)^{\ell+0.5} (\kappa(\kappa+1)\mu^2)^n \Gamma(\ell + n + \mu + 0.5)}{\pi(2\ell + 1)! n! ((\kappa + 1)\mu)^{-\mu} \exp(\kappa\mu) \Gamma(n + \mu)} \\
&\times \left( \frac{1}{(\kappa + 1)\mu + \hat{\gamma}\Omega} \right)^{\ell+\mu+n+0.5} \mathcal{I}_f \\
&\times {}_2F_1 \left( \ell + 1.5, \mu + \ell + n + 0.5; 2\ell + 2; \frac{\hat{\gamma}\Omega}{(\kappa + 1)\mu + \hat{\gamma}\Omega} \right), \quad (3.31)
\end{aligned}$$

em que  $\mathcal{I}_f$  é a equação deduzida em (3.12) ou em (3.13). A Equação (3.31) é geral e exata e constitui uma contribuição original desta dissertação.

De forma análoga a realizada para (3.22), é possível demonstrar a convergência absoluta das séries presentes em (3.31). A convergência do somatório em  $n$  para qualquer valor de  $\ell$  pode ser demonstrada pelo teste da razão de D'Alembert [35], logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\kappa(\kappa+1)\mu^2) (\ell + \mu + n + 0.5)(i + \ell + \mu + n + 0.5)}{n(\mu + n)(\ell + \mu + n + 0.5)((\kappa + 1)\mu + \hat{\gamma}\Omega)} = 0. \quad (3.32)$$

A convergência do somatório em  $\ell$  para qualquer  $n$  também pode ser demonstrada pelo teste da razão de D'Alembert [35]. Para tal comprovação, supondo que o modelo adotado para representar o erro da fase seja o Tikhonov, deve-se utilizar a representação de  $I_{2\ell+1}(\rho)$  como uma série de infinitos termos como apresentada em (3.25), logo

$$\begin{aligned}
\lim_{\ell \rightarrow \infty} \left| \frac{U_{\ell+1}}{U_\ell} \right| &= \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{(2\ell + 3)(2\ell + 2)(i + \ell + 1.5)(i + \ell + \mu + n + 0.5)}{(\ell + 1.5)(i + 2\ell + 2)(i + 2\ell + 3)(\ell + \mu + n + 0.5)} \\
&\times \frac{(\rho/2)^2}{(2\ell + l + 3)(2\ell + l + 2)} \frac{(\ell + 0.5)(\hat{\gamma}\Omega)(\ell + \mu + n + 0.5)}{(2\ell + 3)(2\ell + 2)((\kappa + 1)\mu + \hat{\gamma}\Omega)} = 0. \quad (3.33)
\end{aligned}$$

### 3.3.4 ABER Assintótica

Supondo que a maior concentração da FDP do erro de fase  $\Phi$  ocorre dentro do intervalo  $[-3\pi/4, 3\pi/4]$  (i.e.,  $\rho > 1$ ), portanto, mesmo em sistemas operando com modulação QPSK, é plausível admitir-se que somente ocorrerão erros entre símbolos vizinhos

mais próximos. Deste modo, um resultado assintótico para o cálculo da ABER para altos valores de SNR pode ser obtido como se segue. Considere um sistema operando em regime de altos valores para  $E_b/N_0$ . Nesse cenário, os erros serão induzidos única e exclusivamente devido à translação na fase.

Portanto, admitindo o erro de fase Tikhonov, a ABER assintótica  $P_e^\infty = 1 - \int_{-\pi/M}^{\pi/M} f_\Phi(\phi) d\phi$ , na qual  $M$  representa a ordem da modulação ( $M = 2$  para BPSK e  $M = 4$  para QPSK), pode ser calculada como

$$P_e^\infty = \frac{1}{\Omega} - \frac{1}{\Omega} \int_{-\pi/(2\Omega)}^{\pi/(2\Omega)} \frac{\exp(\rho \cos(\phi))}{2\pi I_0(\rho)} d\phi, \quad (3.34)$$

na qual, novamente,  $\Omega = 1$  para BPSK ou  $\Omega = 2$  para QPSK. Agora, suponha que o erro da fase seja modelado por uma distribuição Gaussiana. Nesse caso, a ABER assintótica é dada por

$$\begin{aligned} P_e^\infty &= \frac{1}{\Omega} - \frac{1}{\Omega} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \int_{2\pi\ell-\pi/(2\Omega)}^{2\pi\ell+\pi/(2\Omega)} \frac{e^{-\phi^2/(2\sigma_\Phi^2)}}{\sqrt{2\pi\sigma_\Phi^2}} d\phi \\ &= \frac{1}{\Omega} - \frac{1}{2\Omega} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \left[ 2 - \operatorname{erfc} \left( \frac{\pi(4\Omega\ell + 1)}{2\sqrt{2}\Omega\sigma_\Phi} \right) - \operatorname{erfc} \left( -\frac{\pi(4\Omega\ell - 1)}{2\sqrt{2}\Omega\sigma_\Phi} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Considerando apenas o termo central do somatório ( $\ell = 0$ ) em (3.35), i.e. está-se admitindo que a decisão correta ocorrerá na faixa  $-\pi/2 < \phi < \pi/2$  para BPSK e  $-\pi/4 < \phi < \pi/4$  para QPSK. Então, a Equação (3.35) pode ser aproximada por

$$P_e^\infty \approx \frac{1}{\Omega} \operatorname{erfc} \left( \frac{\pi}{2\sqrt{2}\Omega\sigma_\Phi} \right). \quad (3.36)$$

### 3.3.5 Resultados numéricos

Passa-se a investigar como o desempenho das modulações BPSK e QPSK em termos da ABER é afetado pelos parâmetros relevantes do sistema. Os resultados teóricos foram calculados utilizando (3.18), (3.22) e (3.31). Simulações independentes foram realizadas para validar as expressões teóricas. As simulações computacionais foram realizadas com o auxílio do software MATLAB de acordo com os modelos descritos ao longo desse capítulo. Para cada ponto, foram geradas no mínimo  $10^7$  amostras utilizando a abordagem de Monte Carlo. Quanto aos modelos de desvanecimento do canal  $\alpha$ - $\mu$ ,  $\eta$ - $\mu$  e  $\kappa$ - $\mu$ , as amostras foram geradas utilizando-se das técnicas descritas em [36]. Em todas as figuras foi adotado  $\hat{r} = 1$ , conseqüentemente a SNR média é  $\hat{\gamma} = E_b/N_0$ . Apesar de não presente neste texto, conclusões similares podem ser estabelecidas para

o caso em que o modelo adotado para representar o erro da fase seja Gaussiano. As amostras da distribuição Tikhonov foram geradas de acordo com [37].

Nas Figuras 3.2 até 3.7, a probabilidade teórica de erro de bit (linhas) e as simulações obtidas por meio da abordagem de Monte Carlo (símbolos) foram traçadas em função da SNR média por bit na presença de ruído da fase Tikhonov. As curvas revelam a degradação na ABER causada pela combinação do desvanecimento com a estimativa incorreta da fase para as modulações BPSK e QPSK. Como uma curva de referência, o caso de não desvanecimento (AWGN puro) com detecção idealmente coerente ( $\rho \rightarrow \infty$ ) foi também mostrado nessas figuras para fins de comparação. Antes de tudo, observe a excelente concordância entre as curvas simuladas e teóricas, mostrando a utilidade e a exatidão das equações analíticas derivadas em (3.18), (3.22) e (3.31). Mais importante, as curvas demonstram que a probabilidade de erro aumenta significativamente, quando o parâmetro  $\rho$  decresce. É interessante examinar o comportamento da ABER para altos valores de SNRs. Note a existência de um valor irreduzível da taxa de erros dependente da SNR do *loop*  $\rho$ . Claramente, à medida que a SNR média tende ao infinito, isto é, a componente de ruído térmico (AWGN) não altera a estatística de teste, e a componente de desvanecimento também não degrada a ABER. Consequentemente, a probabilidade de erro irreduzível é exclusivamente devido à estimação imperfeita da fase. Esta probabilidade de erro irreduzível está em acordo com (3.34), o que prova a exatidão de nossas formulações assintóticas. Por exemplo, quando  $\rho = 7$  dB, a probabilidade de erro irreduzível para a modulação BPSK e QPSK é 0.0025 e 0.486, respectivamente, conforme destacado nas Figuras 3.2 até 3.7.

Com o objetivo de avaliar o impacto do parâmetro de *cluster*  $\mu$ , as Figuras 3.3, 3.5 e 3.7 retratam as curvas teóricas e os resultados simulados da ABER para diversos valores do parâmetro  $\mu$  tais como  $\{0.5; 1; 2\}$ , i.e. partindo de uma condição severa de desvanecimento ( $\mu = 0.5$ ) para uma condição menos severa de desvanecimento ( $\mu = 2$ ), com um valor fixo dos parâmetros  $\alpha = 2.5$ ,  $\eta = 0.5$  e  $\kappa = 1.5$ , respectivamente. É possível concluir que o aumento do parâmetro  $\mu$  diminui a ABER para um valor fixo de  $\alpha$ ,  $\eta$ ,  $\kappa$  e  $\rho$ . Este é um resultado esperado, desde que o parâmetro  $\mu$  é o inverso da variância normalizada de  $R$  nas distribuições  $\alpha$ - $\mu$  [9, eq. (2)],  $\eta$ - $\mu$  [10, eq. (25)] e  $\kappa$ - $\mu$  [10, eq. (9)]. Em outras palavras, valores mais altos de  $\mu$  representam desvanecimentos menos severos. Logo, o desempenho em termos da probabilidade de erro é melhorado.

Na Figura 3.2, o parâmetro de não linearidade do meio  $\alpha$  varia conforme  $\{1; 2; 3\}$  para diferentes valores do parâmetro de SNR do *loop*  $\rho = 7$  dB (linha tracejada) e  $\rho = 10$  dB (linha sólida), para um valor fixo do número de *cluster*  $\mu = 2$ . É válido mencionar que para  $\alpha = 2$ , ou seja, o caso Nakagami- $m$ , os resultados foram

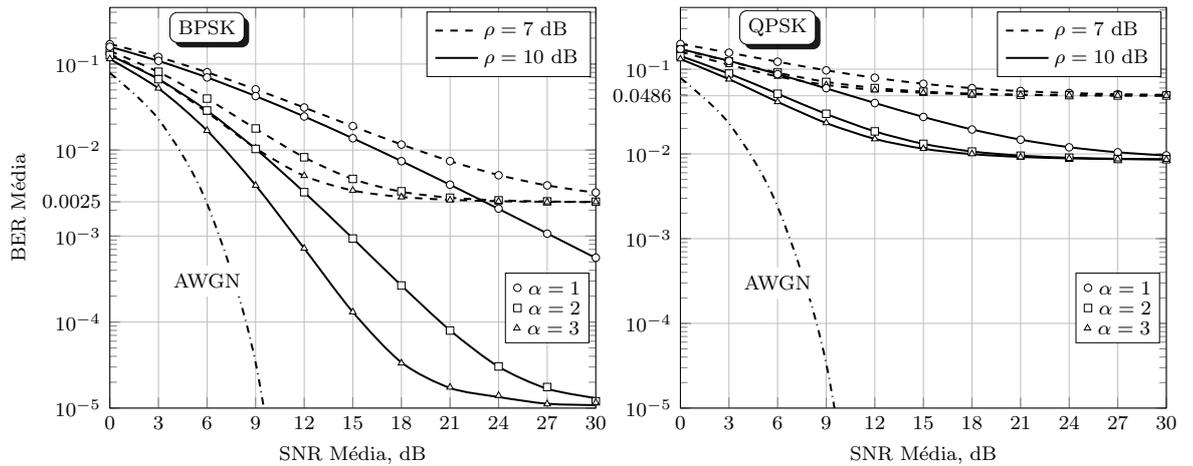


Figura 3.2: ABER do BPSK e do QPSK para vários valores de  $\alpha$  em função da SNR média sob desvanecimento  $\alpha$ - $\mu$  e erro da fase Tikhonov.

os mesmos que os obtidos em [19], como esperado. O aumento do parâmetro  $\alpha$  melhora o desempenho em termos da ABER. Pois, quanto mais alto o valor de  $\alpha$  mais determinístico o canal se torna.

Na Figura 3.4, o parâmetro de desbalanceamento  $\eta$  varia conforme  $\{0.1; 0.9\}$  para diferentes valores do parâmetro de SNR do *loop*  $\rho = 7$  dB (linha tracejada) e  $\rho = 10$  dB (linha sólida), para um valor fixo do número de *cluster*  $\mu = 2$ . O aumento do parâmetro  $\eta$  em direção a 1 melhora o desempenho em termos da ABER.

Na Figura 3.6, o parâmetro de desbalanceamento de potência  $\kappa$  varia conforme  $\{0.2; 2; 3.8\}$  para diferentes valores do parâmetro de SNR do *loop*  $\rho = 7$  dB (linha tracejada) e  $\rho = 10$  dB (linha sólida), para um valor fixo do número de *cluster*  $\mu = 2$ . O aumento do parâmetro  $\kappa$  melhora o desempenho em termos da ABER. Pois, quanto mais alto o valor de  $\kappa$  mais determinístico o canal se torna.

As Figuras 3.2 até 3.7 mostram as curvas da ABER para a modulação BPSK e para a modulação QPSK ambas com o mesmo conjunto de parâmetros. Destes resultados, fica evidente que a degradação do desempenho do sistema QPSK, devido à recuperação imperfeita da fase, é mais grave do que a degradação do sistema BPSK. Em uma análise clássica com recepção idealmente coerente, o desempenho em termos de ABER é o mesmo em ambos os sistemas, BPSK e QPSK. Entretanto, com a imperfeição na estimativa da fase, a modulação QPSK se mostrou extremamente mais sensível do que a modulação BPSK com relação à variação do parâmetro  $\rho$ . Observe que a probabilidade irreduzível de erro devido à recuperação imperfeita da fase é ainda mais acentuada nesse cenário.

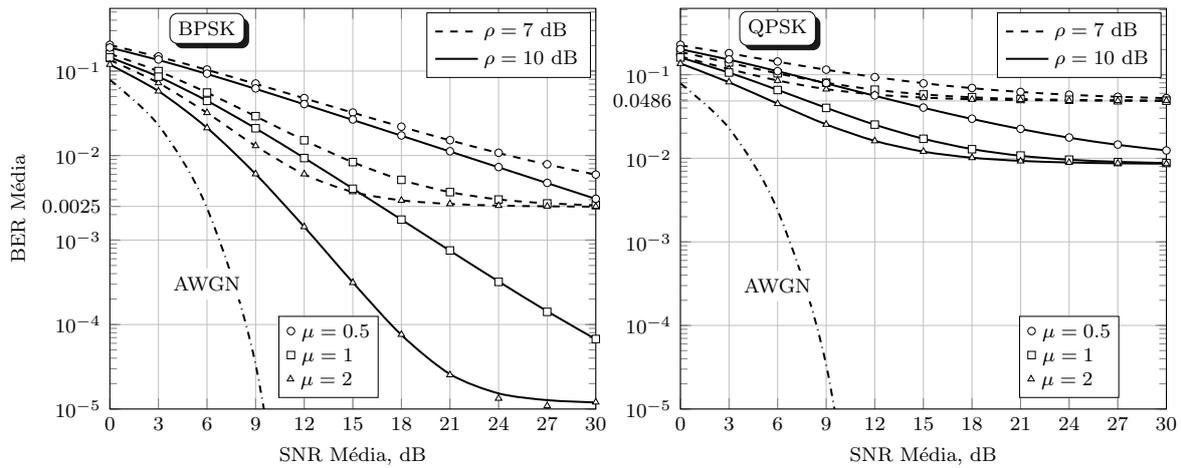


Figura 3.3: ABER do BPSK e do QPSK para vários valores de  $\mu$  em função da SNR média sob desvanecimento  $\alpha$ - $\mu$  e erro da fase Tikhonov.

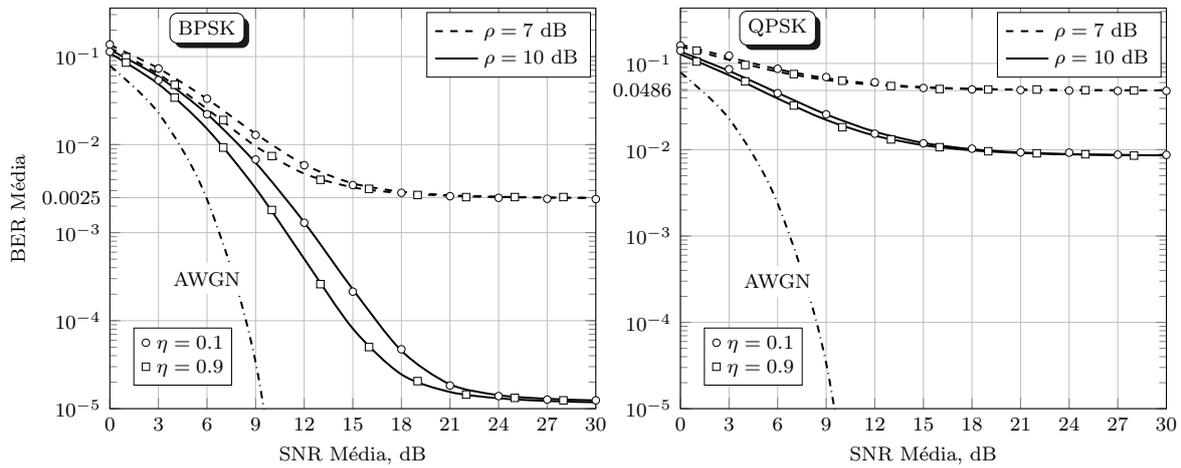


Figura 3.4: ABER do BPSK e do QPSK para vários valores de  $\eta$  em função da SNR média sob desvanecimento  $\eta$ - $\mu$  e erro da fase Tikhonov.

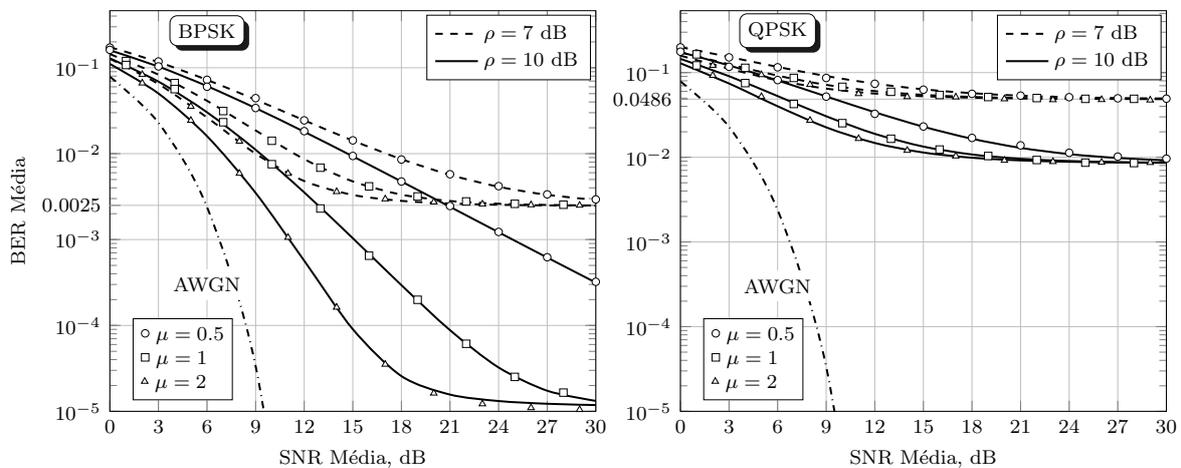


Figura 3.5: ABER do BPSK e do QPSK para vários valores de  $\mu$  em função da SNR média sob desvanecimento  $\eta$ - $\mu$  e erro da fase Tikhonov.

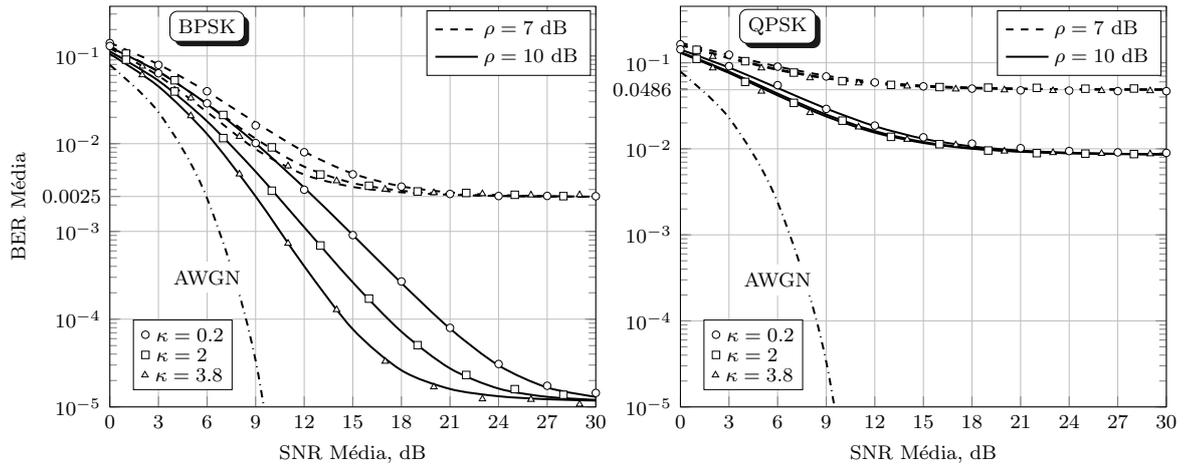


Figura 3.6: ABER do BPSK e do QPSK para vários valores de  $\kappa$  em função da SNR média sob desvanecimento  $\kappa$ - $\mu$  e erro da fase Tikhonov.

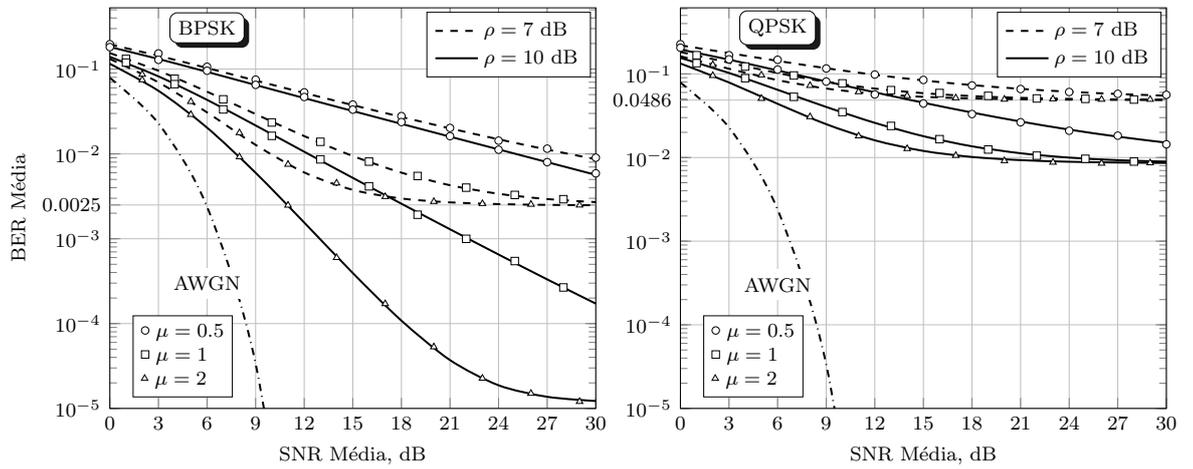


Figura 3.7: ABER do BPSK e do QPSK para vários valores de  $\mu$  em função da SNR média sob desvanecimento  $\kappa$ - $\mu$  e erro da fase Tikhonov.

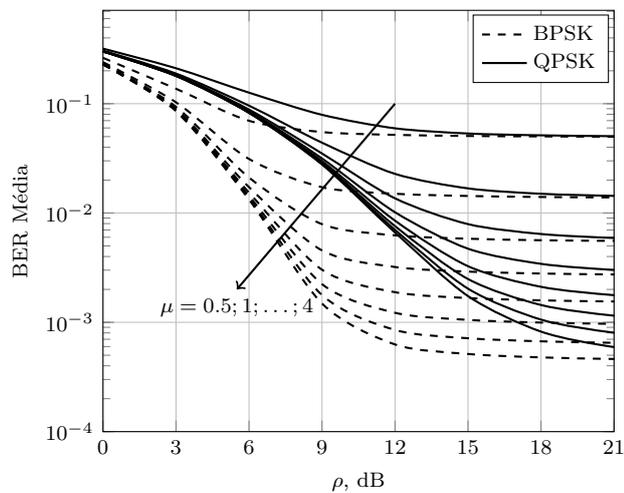


Figura 3.8: ABER do BPSK e QPSK para vários valores de  $\mu$  em função dos valores da SNR do loop sob desvanecimento  $\alpha$ - $\mu$  e erro da fase Tikhonov.

A Figura 3.8 mostra as curvas da ABER como uma função da SNR do *loop* para vários valores de  $\mu$ ,  $\alpha = 2.5$  e SNR média  $\hat{\gamma} = 10$  dB. Para pequenos valores de  $\rho$ , a ABER tende a ser alta, desde que esse é o pior cenário de sincronização da portadora. Conforme os valores de  $\rho$  aumentam, o desempenho melhora (menor ABER), e um valor irreduzível da probabilidade de erro é alcançado. Nesse caso, este valor irreduzível é devido à combinação dos efeitos, ruído térmico (AWGN) e desvanecimento do canal. E, para este mesmo cenário, tanto a modulação BPSK quanto a modulação QPSK alcançaram a mesma ABER. Essa taxa de erro irreduzível está de acordo com [23].

### 3.4 ASER exata para MPSK com ruído AWGN e estimação imperfeita da fase

Sejam  $Q$  e  $W$  um par de variáveis aleatórias Gaussianas descorrelacionadas com variâncias idênticas  $\sigma^2$  e respectivas médias  $m_Q$  e  $m_W$ , de modo que  $E_s \triangleq m_Q^2 + m_W^2$ . Definindo as variáveis aleatórias  $U = \sqrt{Q^2 + W^2}$  e  $\Theta = \arg(W/Q)$ , isto é o raio (módulo) e o ângulo (fase) da coordenada  $(Q, W)$ . Note que  $U$  segue uma distribuição Rice e que as variáveis aleatórias  $U$  e  $\Theta$  não são independentes. A FDP conjunta de  $U$  e  $\Theta$  pode ser escrita como [1, eq. (2.205)]

$$f_{U,\Theta}(u, \theta) = \frac{u}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{u^2 - 2u\sqrt{E_s}\cos\theta + E_s}{2\sigma^2}\right). \quad (3.37)$$

Nesse contexto, a FDP conjunta dada em (3.37) representa um dado sinal complexo transmitido com energia  $E_s$  cujas componentes em fase e em quadratura foram corrompidas pelo ruído AWGN de média nula e com variância  $\sigma^2$ .

Dado que o erro de fase  $\Phi$ , modelado pela distribuição Tikhonov, e o ruído AWGN são processos independentes [28], então a FDP conjunta de  $U$ ,  $\Theta$  e  $\Phi$  é dada pelo produto das FDPs, ou seja,  $f_{U,\Theta,\Phi}(u, \theta, \phi) = f_{U,\Theta}(u, \theta)f_\Phi(\phi)$ . Definindo a variável aleatória  $B = \Phi + \Theta$ , a qual representa o efeito conjunto do ruído AWGN com a estimativa imperfeita da fase, a FDC conjunta de  $U$  e  $B$  pode ser calculada por

$$F_{U,B}(u, \beta) = \int_0^u \int_{-\pi}^{\pi} f_{U,\Theta}(t, \theta) \int_{-\pi}^{\beta-\theta} f_\Phi(\phi) d\phi d\theta dt. \quad (3.38)$$

A integral interna pode ser resolvida com a ajuda de [4, eq. (4.38)], levando a

$$F_{U,B}(u, \beta) = \int_0^u \int_{-\pi}^{\pi} f_{U,\Theta}(t, \theta) \left( \frac{1}{2} + \frac{\beta - \theta}{2\pi} + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{I_\ell(\rho) \sin(\ell(\beta - \theta))}{\ell\pi I_0(\rho)} \right) d\theta dt. \quad (3.39)$$

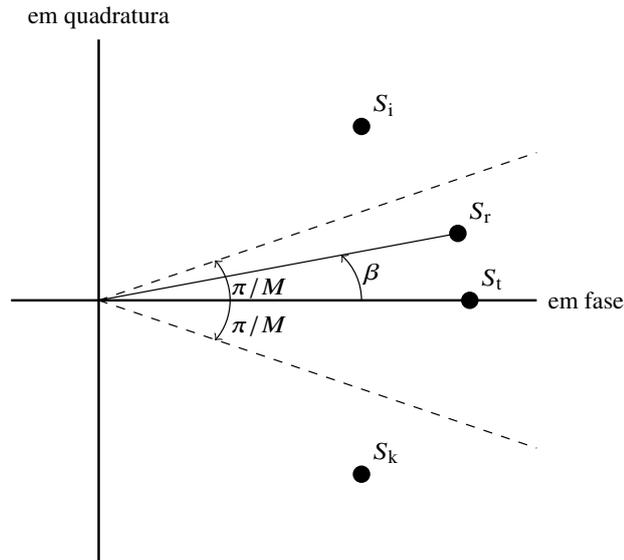


Figura 3.9: Parte de uma constelação MPSK

Substituindo (3.37) em (3.39), resolvendo a integral em  $\theta$ , encontrando a derivada em relação a ambos  $\beta$  e  $u$ , e depois de algumas manipulações matemáticas, a FDP conjunta de  $U$  e  $B$  é encontrada como

$$f_{U,B}(u, \beta) = \frac{u}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{u^2 + E_s}{2\sigma^2}\right) \left[ I_0\left(\frac{\sqrt{E_s}u}{\sigma^2}\right) + \frac{2}{I_0(\rho)} \sum_{\ell=1}^{\infty} I_\ell(\rho) I_\ell\left(\frac{\sqrt{E_s}u}{\sigma^2}\right) \cos(\ell\beta) \right]. \quad (3.40)$$

A FDP conjunta presente em (3.40) representa um dado sinal complexo transmitido com energia  $E_s$  sob o efeito conjunto do ruído AWGN e da estimativa imperfeita da fase no receptor.

A Figura 3.9 retrata três símbolos vizinhos de uma constelação MPSK e um símbolo recebido. Nessa figura, admite-se que  $S_t$  represente o símbolo transmitido com fase  $\vartheta = 0$ ,  $S_i$  e  $S_k$  representem os vizinhos mais próximos ao símbolo  $S_t$ ,  $S_r$  seja o símbolo recebido com módulo  $|S_r| = u$  e fase  $\arg(S_r) = \beta$ . Portanto, no semiplano à direita do eixo em quadratura, as linhas tracejadas delimitam a região de correta estimação do símbolo  $S_t$ . A ASER em sistemas MPSK com estimação imperfeita de fase, admitindo-se símbolos equiprováveis, é calculada como

$$P_s(E_s) = 1 - \int_0^\infty \int_{-\pi/M}^{\pi/M} f_{U,B}(u, \beta) d\beta du. \quad (3.41)$$

Com a ajuda de [26, eqs. (6.631.7) e (8.406.3)] e sabendo que  $I_{n/2-1/2}(-x) -$

$I_{n/2+1/2}(-x) = i^{n-1}(I_{n/2-1/2}(x) + I_{n/2+1/2}(x))$ , (3.41) pode ser reescrita como

$$P_s(E_s) = 1 - \left[ \frac{1}{M} + \exp\left(-\frac{E_s}{4\sigma^2}\right) \frac{\sqrt{E_s}}{\sigma\sqrt{2\pi}I_0(\rho)} \sum_{\ell=1}^{\infty} I_{\ell}(\rho) \times \left( I_{\frac{\ell-1}{2}}\left(\frac{E_s}{4\sigma^2}\right) + I_{\frac{\ell+1}{2}}\left(\frac{E_s}{4\sigma^2}\right) \right) \frac{\sin(\ell\pi/M)}{\ell} \right]. \quad (3.42)$$

Sabendo que  $E_b/N_0 = (E_s/\log_2 M)/(2\sigma^2)$  e com a ajuda de [20, eq. (8)], a ASER exata de um sistema MPSK sob a influência do ruído AWGN e da estimação imperfeita da fase é obtida como

$$P_s\left(\frac{E_b}{N_0}\right) = \frac{M-1}{M} - \frac{2}{\sqrt{\pi}I_0(\rho)} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{I_{\ell}(\rho) \sin(\ell\pi/M)}{\ell(0.5\ell - 0.5)!2^{\ell}} \times \left(\frac{E_b}{N_0} \log_2 M\right)^{0.5\ell} {}_1F_1\left(\frac{\ell}{2}; \ell+1; -\frac{E_b}{N_0} \log_2 M\right), \quad (3.43)$$

com  ${}_1F_1(\cdot; \cdot; \cdot)$  sendo a função hipergeométrica confluyente [26, eq. (9.210.1)]. A expressão em (3.43) é *exata* e, para o melhor conhecimento do autor, *nova*. Portanto, a Equação (3.43) constitui uma contribuição original desta dissertação.

Agora será demonstrado a convergência absoluta da série de infinitos termos presente em (3.43). Utilizando a representação em série de infinitos termos da função hipergeométrica confluyente [26, eq. (9.210.1)] e da função modificada de Bessel [26, 8.445], ou seja,

$${}_1F_1\left(\frac{\ell}{2}; \ell+1; -\frac{E_b}{N_0} \log_2 M\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\ell+1)\Gamma(i+0.5\ell)}{\Gamma(0.5\ell)\Gamma(i+\ell+1)} \frac{(-\log_2 M E_b/N_0)^i}{i!} \quad (3.44)$$

e

$$I_n(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho/2)^{n+2k}}{k! \Gamma(k+n+1)}, \quad (3.45)$$

respectivamente, pode-se aplicar o teste da razão de D'Alembert [35] na série presente em (3.43), logo

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \left| \frac{U_{\ell+1}}{U_{\ell}} \right| = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{\rho(0.5\ell - 0.5)! \ell (\log_2 M E_b/N_0)^{0.5}}{4(\ell+1)(0.5\ell)!(k+\ell+1)} \times \frac{(\ell+1)\Gamma(0.5\ell)\Gamma(i+0.5\ell+0.5)}{(i+\ell+1)\Gamma(0.5\ell+0.5)\Gamma(i+0.5\ell)} = 0. \quad (3.46)$$

Observe que

$$\begin{aligned} \lim_{\ell \rightarrow \infty} \left| \frac{\sin((\ell + 1)\pi/M)}{\sin(\ell\pi/M)} \right| &= \\ \lim_{\ell \rightarrow \infty} \left| \frac{\exp(-j\pi/M)[\exp(2j(\ell + 1)\pi/M) - 1]}{\exp(2j\ell\pi/M) - 1} \right| &= \\ \exp(-j\pi/M) & \end{aligned} \quad (3.47)$$

em que  $j = \sqrt{-1}$ .

### 3.5 ASER exata para MPSK em canais com desvanecimento, ruído AWGN e estimação imperfeita da fase

Seja  $R$  a envoltória do sinal recebido com desvanecimento plano e lento,  $\Upsilon$  a SNR instantânea por bit do sinal recebido como uma função do desvanecimento dada por  $\Upsilon = R^2 E_b/N_0$ . Portanto a ASER para sistemas MPSK pode ser calculada como uma média sobre todos os valores de  $\Upsilon$ , logo

$$P_s^{\text{MPSK}} = \int_0^\infty P_s(\gamma) f_\Upsilon(\gamma) d\gamma. \quad (3.48)$$

#### 3.5.1 ASER com desvanecimento $\alpha$ - $\mu$

Caso a envoltória do canal com desvanecimento  $R$  obedeça a uma distribuição  $\alpha$ - $\mu$ , a FDP da SNR instantânea por bit do sinal recebido  $\Upsilon$  é dada por (2.4). Admitindo  $R$  e  $\Phi$  como variáveis aleatórias independentes [18, 19] e, em (3.48), ao se substituir  $f_\Upsilon(\gamma)$  pela FDP  $\alpha$ - $\mu$ , tem-se

$$\begin{aligned} P_{\text{MPSK}}^{\alpha-\mu} &= \frac{M-1}{M} - \frac{2}{\sqrt{\pi} I_0(\rho)} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{I_\ell(\rho) \sin(\ell\pi/M)}{\ell(0.5\ell - 0.5)! 2^\ell} (\log_2 M)^{0.5\ell} \frac{\alpha\mu^\mu}{2\Gamma(\mu)\hat{\gamma}^{0.5\alpha\mu}} \\ &\times \int_0^\infty \gamma^{0.5(\alpha\mu+\ell)-1} \exp\left(-\mu \frac{\gamma^{0.5\alpha}}{\hat{\gamma}^{0.5\alpha}}\right) {}_1F_1(0.5\ell; \ell+1; -\gamma \log_2 M) d\gamma. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Reescrevendo apenas os termos dependentes de  $\gamma$ , obtêm-se

$$\mathcal{I} = \int_0^\infty \gamma^{0.5(\alpha\mu+\ell)-1} \exp\left(-\mu \frac{\gamma^{0.5\alpha}}{\hat{\gamma}^{0.5\alpha}}\right) {}_1F_1(0.5\ell; \ell+1; -\gamma \log_2 M) d\gamma. \quad (3.50)$$

Para calcular a integral em (3.50), primeiramente deve-se reescrever a função hipergeométrica confluyente e a função exponencial utilizando [26, eq. (9.34.8)] e [33],

respectivamente, ou seja,

$${}_1F_1(0.5\ell; \ell + 1; -\gamma \log_2 M) = \frac{\Gamma(\ell + 1)}{\Gamma(0.5\ell)} G_{1,2}^{1,1} \left( \gamma \log_2 M \left| \begin{matrix} 1 - 0.5\ell \\ 0, -\ell \end{matrix} \right. \right) \quad (3.51)$$

e

$$\exp(-y) = G_{0,1}^{1,0} \left( y \left| \begin{matrix} - \\ 0 \end{matrix} \right. \right), \quad (3.52)$$

nas quais  $G_{p,q}^{m,n}(\cdot | \cdot)$  representa a função-G de Meijer [26, eq. (9.301)].

Definindo  $\alpha/2 \triangleq l/b$  de modo que o MDC( $l, b$ ) = 1 com  $l$  e  $b$  inteiros, utilizando as equações (3.51) e (3.52) e com o auxílio de [34], pode-se resolver a integral em  $\mathcal{I}$ , logo

$$\mathcal{I} = \frac{\Gamma(\ell + 1) b^{0.5} l^{0.5\alpha\mu - 1.5}}{\Gamma(0.5\ell) (2\pi)^{\frac{1}{2}(b+l-2)} (\log_2 M)^{0.5(\ell + \alpha\mu)}} G_{l+b,l}^{2l,l+b} \left( \frac{l^l \mu^b}{b^b (\hat{\gamma} \log_2 M)^l} \left| \begin{matrix} P_4, P_5 \\ P_6 \end{matrix} \right. \right) \quad (3.53)$$

com

$$\begin{aligned} P_4 &= \Delta(l, 0.5(\alpha\mu + \ell)), \\ P_5 &= \Delta(l, 0.5\alpha\mu - 0.5\ell), \\ P_6 &= \Delta_1(b, 0, l, 0.5\alpha\mu + 1), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \Delta(a, b) &= \left\{ \frac{1-b}{a}, \frac{2-b}{a}, \dots, \frac{a-b}{a} \right\} \\ \Delta_1(a, b, c, d) &= \left\{ \frac{b}{a}, \dots, \frac{b+a-1}{a}, \frac{1-d}{c}, \dots, \frac{c-d}{c} \right\}. \end{aligned}$$

Utilizando (3.53) em (3.49), a ASER para um sistema operando com modulação MPSK sob a influência de desvanecimento  $\alpha\text{-}\mu$ , com erro da fase modelado por uma distribuição Tikhonov e ruído AWGN pode ser escrita como

$$\begin{aligned} P_{\text{MPSK}}^{\alpha\text{-}\mu} &= \frac{M-1}{M} \frac{\alpha\mu^\mu l^{0.5\alpha\mu - 1.5} (\hat{\gamma} \log_2 M)^{-0.5\alpha\mu}}{b^{-0.5} \sqrt{\pi} (2\pi)^{\frac{1}{2}(b+l-2)} \Gamma(\mu) I_0(\rho)} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\ell + 1) I_\ell(\rho)}{(\ell 2^\ell (0.5\ell - 0.5)!) \Gamma(0.5\ell)} \\ &\quad \times \sin\left(\frac{\pi\ell}{M}\right) G_{l+b,l}^{2l,l+b} \left( \frac{l^l \mu^b}{b^b (\hat{\gamma} \log_2 M)^l} \left| \begin{matrix} P_4, P_5 \\ P_6 \end{matrix} \right. \right). \end{aligned} \quad (3.54)$$

### 3.5.2 ASER com desvanecimento $\eta$ - $\mu$

Caso a envoltória do canal com desvanecimento  $R$  obedeça a uma distribuição  $\eta$ - $\mu$ , a FDP da SNR instantânea por bit do sinal recebido  $\Upsilon$  é dada por (2.13). Admita  $R$  e  $\Phi$  como variáveis aleatórias independentes [18, 19]. Substituindo  $f_{\Upsilon}(\gamma)$  pela FDP  $\eta$ - $\mu$  em (3.48), obtêm-se

$$P_{\text{MPSK}}^{\eta-\mu} = \frac{M-1}{M} - \frac{2}{\sqrt{\pi} I_0(\rho)} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{I_{\ell}(\rho) \sin(\ell\pi/M)}{\ell(0.5\ell-0.5)!2^{\ell}} (\log_2 M)^{0.5\ell} \frac{2\sqrt{\pi} \mu^{\mu+0.5} h^{\mu}}{\Gamma(\mu) H^{\mu-0.5} \hat{\gamma}^{\mu+0.5}} \times \int_0^{\infty} \gamma^{\mu+0.5\ell-0.5} \frac{I_{\mu-0.5}(2\mu H\gamma/\hat{\gamma})}{\exp(2\mu h\gamma/\hat{\gamma})} {}_1F_1(0.5\ell; \ell+1; -\gamma \log_2 M) d\gamma. \quad (3.55)$$

Utilizando a representação da função de Bessel em série de infinitos termos (3.20) e, em (3.55), tomando apenas os termos dependentes de  $\gamma$ , tem-se

$$\mathcal{I} = \int_0^{\infty} \gamma^{2n+2\mu+0.5\ell-1} \exp\left(-\frac{\gamma(2\mu h(\eta))}{\hat{\gamma}}\right) {}_1F_1(0.5\ell; \ell+1; -\gamma \log_2 M) d\gamma. \quad (3.56)$$

Posteriormente, com o auxílio da diretiva [26, eq. (7.621.4)], tem-se

$$\mathcal{I} = \Gamma(2n+2\mu+0.5\ell) \left(\frac{\hat{\gamma}}{2\mu h + \hat{\gamma} \log_2 M}\right)^{2n+2\mu+0.5\ell} \times {}_2F_1\left(0.5\ell+1, 2\mu+0.5\ell+2n; \ell+1; \frac{\hat{\gamma} \log_2 M}{2\mu h + \hat{\gamma} \log_2 M}\right). \quad (3.57)$$

Utilizando (3.57) em (3.55), a ASER para um sistema operando com modulação MPSK sob a influência de desvanecimento  $\eta$ - $\mu$ , com erro da fase modelado por uma distribuição Tikhonov e ruído AWGN pode ser escrita como

$$P_{\text{MPSK}}^{\eta-\mu} = \frac{M-1}{M} - \frac{4\mu^{2\mu} h^{\mu}}{\sqrt{\pi} \Gamma(\mu) I_0(\rho)} \sum_{\ell=1, n=0}^{\infty} \frac{(\mu H)^{2n} (n+\mu+0.5)_{0.5\ell+\mu+n-0.5}}{n! (2\mu h + \hat{\gamma} \log_2 M)^{2n+0.5\ell+2\mu}} \times \frac{(\hat{\gamma} \log_2 M)^{0.5\ell}}{\ell(0.5\ell+1)_{0.5\ell}} I_{\ell}(\rho) \sin\left(\frac{\ell\pi}{M}\right) \times {}_2F_1\left(0.5\ell+1, 2n+0.5\ell+2\mu; \ell+1; \frac{\hat{\gamma} \log_2 M}{2\mu h + \hat{\gamma} \log_2 M}\right). \quad (3.58)$$

A convergência absoluta das séries de infinitos termos presentes em (3.58) pode ser demonstrada de forma análoga a realizada em (3.22), desde que seja observado (3.47).

### 3.5.3 ASER com desvanecimento $\kappa$ - $\mu$

Caso a envoltória do canal com desvanecimento  $R$  obedeça a uma distribuição  $\kappa$ - $\mu$ , a FDP da SNR instantânea por bit do sinal recebido  $\Upsilon$  é dada por (2.18). Admita  $R$  e  $\Phi$  como variáveis aleatórias independentes [18, 19]. Substituindo  $f_{\Upsilon}(\gamma)$  pela FDP  $\kappa$ - $\mu$  em (3.48), obtêm-se

$$P_{\text{MPSK}}^{\kappa-\mu} = \frac{M-1}{M} - \frac{2}{\sqrt{\pi}I_0(\rho)} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{I_{\ell}(\rho) \sin(\ell\pi/M)}{\ell(0.5\ell-0.5)!2^{\ell}} (\log_2 M)^{0.5\ell} \frac{\mu(1+\kappa)^{\frac{\mu+1}{2}}}{\kappa^{\frac{\mu-1}{2}} \exp(\mu\kappa)\hat{\gamma}^{\frac{\mu+1}{2}}} \times \int_0^{\infty} \gamma^{0.5(\mu+\ell-1)} \frac{I_{\mu-1}(2\mu\sqrt{\kappa(1+\kappa)\gamma/\hat{\gamma}})}{\exp(\mu(1+\kappa)\gamma/\hat{\gamma})} {}_1F_1(0.5\ell; \ell+1; -\gamma \log_2 M) d\gamma. \quad (3.59)$$

Utilizando a representação da função de Bessel em série de infinitos termos (3.29) e, em (3.59), tomando apenas os termos dependentes de  $\gamma$ , tem-se

$$\mathcal{I} = \int_0^{\infty} \gamma^{n+\mu+0.5\ell-1} \exp\left(-\frac{\gamma((\kappa+1)\mu)}{\hat{\gamma}}\right) {}_1F_1(0.5\ell; \ell+1; -\gamma \log_2 M) d\gamma. \quad (3.60)$$

Posteriormente, com o auxílio da diretiva [26, eq (7.621.4)], tem-se

$$\mathcal{I} = \Gamma(0.5\ell + \mu + n) \left( \frac{\hat{\gamma}}{\mu(1+\kappa) + \hat{\gamma} \log_2 M} \right)^{n+\mu+0.5\ell} \times {}_2F_1\left(0.5\ell + 1, \mu + 0.5\ell + n; \ell + 1; \frac{\hat{\gamma} \log_2 M}{\mu(1+\kappa) + \hat{\gamma} \log_2 M}\right). \quad (3.61)$$

Utilizando (3.61) em (3.59), a ASER para um sistema operando com modulação MPSK sob a influência de desvanecimento  $\kappa$ - $\mu$ , com erro da fase modelado por uma distribuição Tikhonov e ruído AWGN pode ser escrita como

$$P_{\text{MPSK}}^{\kappa-\mu} = \frac{M-1}{M} - \frac{2\mu^{\mu}(1+\kappa)^{\mu}}{\pi \exp(\kappa\mu)I_0(\rho)} \sum_{\ell=1, n=0}^{\infty} \frac{I_{\ell}(\rho)(\mu\sqrt{(\kappa+1)\kappa})^{2n}(\mu+n)_{0.5\ell}}{n!(\mu(\kappa+1) + \hat{\gamma} \log_2 M)^{n+0.5\ell+\mu}} \sin\left(\frac{\ell\pi}{M}\right) \times \frac{(\hat{\gamma} \log_2 M)^{0.5\ell}}{\ell(0.5\ell+1)_{0.5\ell}} {}_2F_1\left(0.5\ell + 1, n + 0.5\ell + \mu; \ell + 1; \frac{\hat{\gamma} \log_2 M}{\mu(\kappa+1) + \hat{\gamma} \log_2 M}\right). \quad (3.62)$$

Dada a observação feita em (3.47), a convergência absoluta das séries de infinitos termos presentes em (3.62) pode ser demonstrada de forma análoga a realizada em (3.31).

As equações (3.54), (3.58) e (3.62) são gerais e exatas e constituem uma contribuição original desta dissertação.

### 3.5.4 ASER assintótica

Um resultado assintótico para altos valores de SNR pode ser obtido como se segue. Considere um sistema operando em regime de altos valores de  $E_b/N_0$ . Nesse cenário, os erros são induzidos única e exclusivamente devido à translação da fase, dada pela variável aleatória com distribuição Tikhonov cuja FDP é dada por (2.19).

Então a ASER assintótica pode ser calculada como  $P_s^\infty = 1 - \int_{-\pi/M}^{\pi/M} f_\Phi(\phi) d\phi$ . Com a ajuda de [4, eq. (4.38)], a ASER assintótica pode ser escrita como

$$P_s^\infty = \frac{M-1}{M} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n/M) I_n(\rho)}{n\pi I_0(\rho)}. \quad (3.63)$$

### 3.5.5 Resultados Numéricos

Nesta seção, o desempenho de sistemas MPSK em termos da ASER com estimação imperfeita da fase é investigado. Os resultados teóricos são calculados utilizando (3.43), para o cenário sem desvanecimento, (3.54), (3.58) e (3.62), para o cenário com desvanecimento  $\alpha$ - $\mu$ ,  $\eta$ - $\mu$  e  $\kappa$ - $\mu$ , respectivamente. Simulações computacionais independentes, as quais foram realizadas utilizando o software MATLAB de acordo com os modelos descritos neste trabalho, corroboram as expressões teóricas derivadas ao longo desta seção. Para cada ponto simulado, foram geradas no mínimo  $10^7$  amostras utilizando a abordagem de Monte Carlo. As amostras do canal com desvanecimento, e seus casos particulares, foram geradas como em [36]. Em todas as figuras desta seção, foi adotado  $\hat{r} = 1$ , conseqüentemente a SNR média  $\hat{\gamma} = E_b/N_0$ . As amostras da distribuição Tikhonov foram geradas conforme descrito em [37].

Nas Figuras 3.10, 3.11 e 3.12, a ASER teórica (linhas) e a ASER obtida por meio da simulação de Monte Carlo (símbolos) são traçadas em função da SNR média por bit na presença de desvanecimento, erro da fase com distribuição Tikhonov e ruído AWGN. Como uma curva de referência, o caso de não desvanecimento (AWGN puro) com detecção idealmente coerente ( $\rho \rightarrow \infty$ ) foi também mostrado nessas figuras para fins de comparação. As curvas revelam a degradação na ASER causada pela combinação do desvanecimento com a estimativa incorreta da fase para modulações QPSK e 8-PSK. Observe a excelente concordância entre curvas simuladas e teóricas o que demonstra a utilidade e exatidão das expressões analíticas derivadas.

Na Figura 3.10(a), o parâmetro de não linearidade do meio  $\alpha$  varia como  $\{1.2; 2\}$ , para um valor fixo do parâmetro  $\mu = 2.2$  e com diferentes valores da SNR do *loop*  $\{10; 13\}$  dB. Na Figura 3.10(b), o parâmetro  $\mu$  varia de uma condição pouco severa de desvanecimento ( $\mu = 3.5$ ), uma condição menos severa de desvanecimento ( $\mu = 6$ )

até um cenário sem desvanecimento ( $\mu \rightarrow \infty$ ), para diferentes valores da SNR do *loop* {10; 13} dB e com um valor fixo do parâmetro de não linearidade do meio  $\alpha = 0.8$ .

Na Figura 3.11(a), o parâmetro de desbalanceamento  $\eta$  varia como {0.1; 0.7}, para um valor fixo do parâmetro  $\mu = 1.5$  e com diferentes valores da SNR do *loop* {10; 13} dB. Na Figura 3.11(b), o parâmetro  $\mu$  varia de uma condição severa de desvanecimento ( $\mu = 0.5$ ), uma condição menos severa de desvanecimento ( $\mu = 1.1$ ) até um cenário sem desvanecimento ( $\mu \rightarrow \infty$ ), para diferentes valores da SNR do *loop* {10; 13} dB e com um valor fixo do parâmetro de desbalanceamento  $\eta = 0.5$ .

Na Figura 3.12(a), o parâmetro de desbalanceamento de potência  $\kappa$  varia como {0.5; 5}, para um valor fixo do parâmetro  $\mu = 1.5$  e com diferentes valores da SNR do *loop* {10; 13} dB. Na Figura 3.12(b), o parâmetro  $\mu$  varia como {0.9; 2}, para um valor fixo do parâmetro  $\kappa = 3$  e com diferentes valores da SNR do *loop* {10; 13} dB.

Está claro desses resultados que a degradação no desempenho do sistema, devido ao erro na estimativa da fase, é mais severa em modulações 8-PSK do que em sistemas operando com modulações QPSK. E pode-se observar também que a modulação 8-PSK é extremamente mais sensível do que a modulação QPSK a variações do parâmetro  $\rho$ . Em contra partida, a modulação 8-PSK apresenta uma melhor eficiência espectral do que a modulação QPSK [2, Sec. 6.2.2.8]. É notório o impacto decisivo da estimativa da fase na probabilidade de erro, primeiramente em um cenário de ruído térmico e também em um meio com desvanecimento. Mais importante, as curvas mostram que a probabilidade de erro aumenta significativamente quando a SNR do *loop*  $\rho$  decresce.

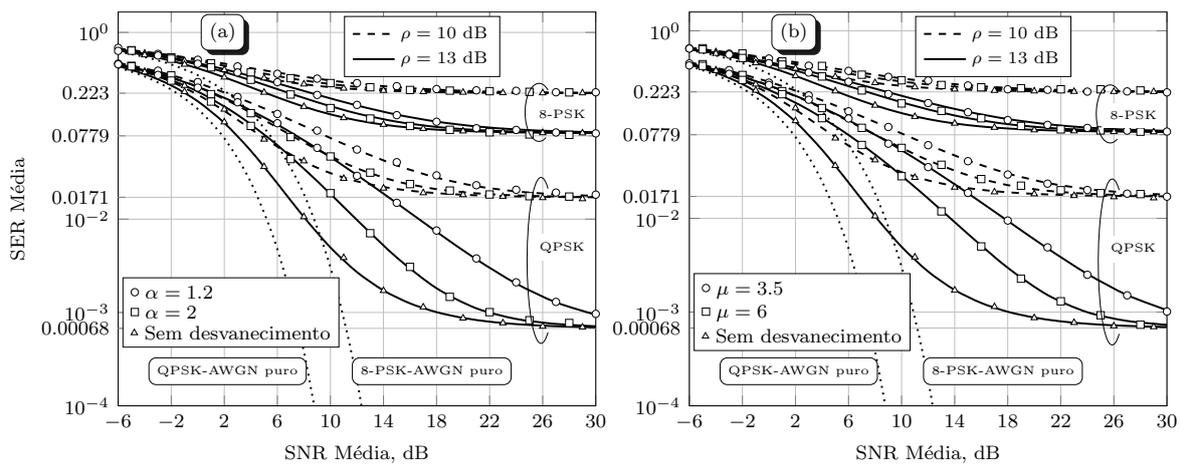


Figura 3.10: ASER em função da SNR média sem desvanecimento, com desvanecimento  $\alpha$ - $\mu$  e erro da fase Tikhonov.

É interessante examinar o comportamento da ASER em regimes de SNR alta. Note que a paralelização da curva ASER com o eixo das abcissas, ou seja, a probabilidade

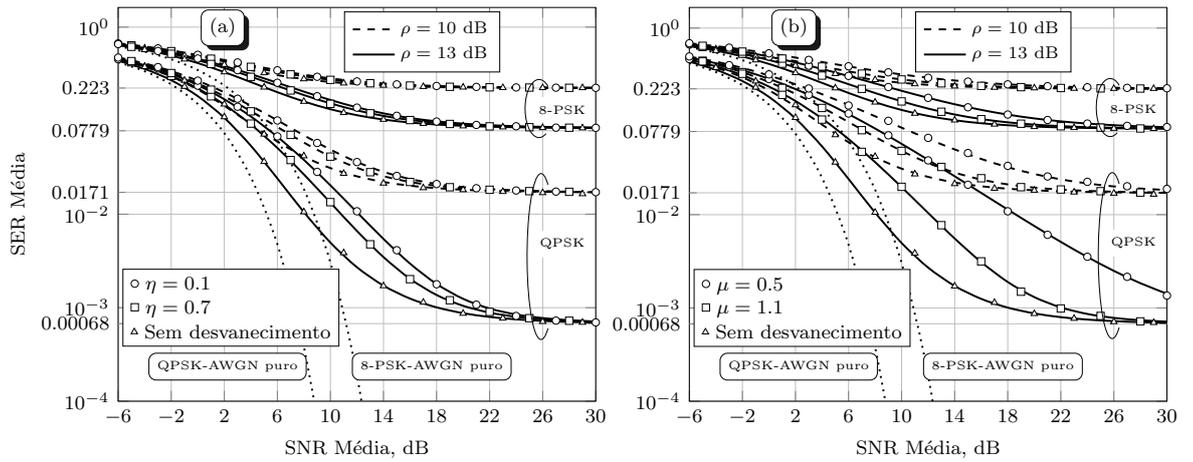


Figura 3.11: ASER em função da SNR média sem desvanecimento, com desvanecimento  $\eta$ - $\mu$  e erro da fase Tikhonov.

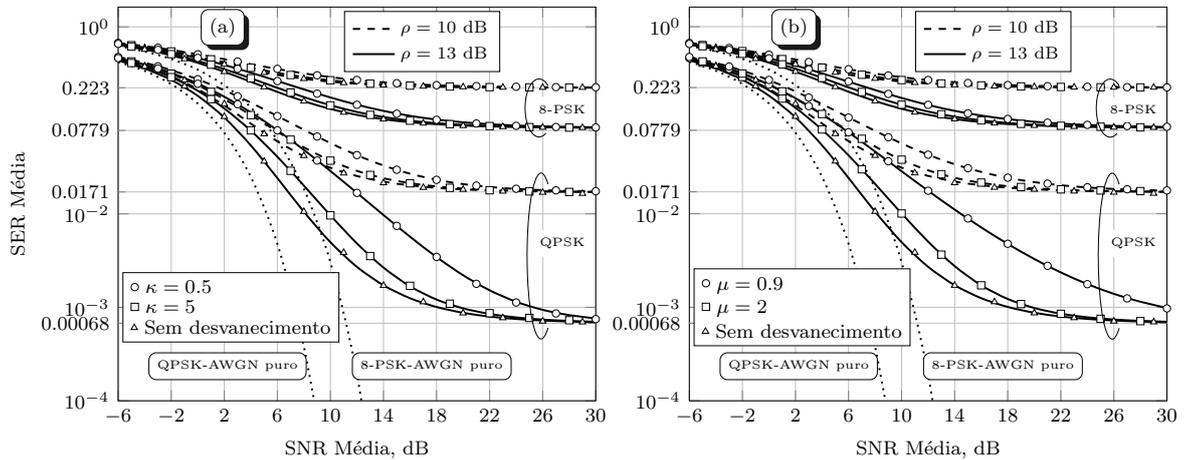


Figura 3.12: ASER em função da SNR média sem desvanecimento, com desvanecimento  $\kappa$ - $\mu$  e erro da fase Tikhonov.

de erro irreduzível, depende apenas do valor da SNR *loop*  $\rho$ . Claramente, conforme a SNR média tende a infinito, a componente de ruído térmico (AWGN) não altera as estatísticas de teste. Da mesma forma, a componente de desvanecimento não degrada a ASER. Consequentemente, a probabilidade de erro irreduzível é unicamente devido à estimação imperfeita da fase. Essa probabilidade de erro irreduzível está de acordo com (3.63), a qual prova a exatidão da nossa formulação assintótica. Por exemplo, quando  $\rho = 10$  dB em modulação 8-PSK, a probabilidade de erro irreduzível é 0.223, como destacado nas figuras.

Ademais, das Figuras 3.10, 3.11 e 3.12, pode-se concluir que o aumento do número de *clusters* de múltiplo percurso  $\mu$  diminui a ASER para um valor fixo dos parâmetros  $\alpha$ ,  $\eta$  e  $\kappa$ , respectivamente. Esse é um resultado esperado, desde que o parâmetro  $\mu$  é o inverso da variância normalizada de  $R$ . Em outras palavras, quanto mais alto o valor

de  $\mu$  menos severo será o desvanecimento.

Das Figuras 3.10, 3.12 e 3.11, com o aumento dos parâmetros  $\alpha$  e  $\kappa$  e com o aumento do parâmetro  $\eta$  em direção a 1, melhora-se o desempenho em termos de probabilidade de erro, respectivamente.

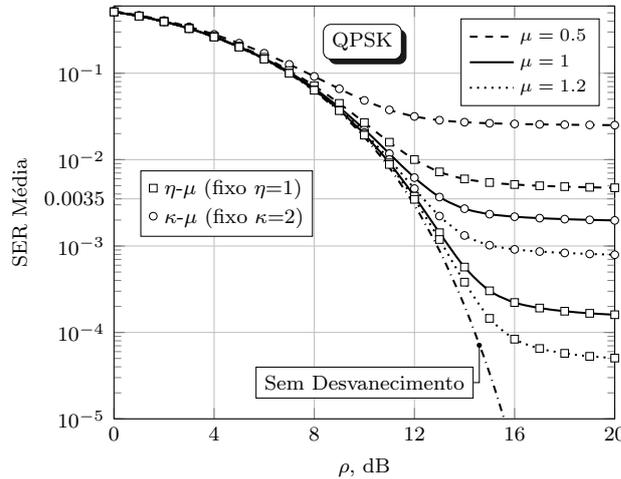


Figura 3.13: ASER em função do parâmetro  $\rho$  para vários valores de  $\mu$  sob desvanecimento  $\kappa$ - $\mu$  e  $\eta$ - $\mu$  e erro da fase Tikhonov para modulação QPSK.

A Figura 3.13 traça a ASER de um sistema operando com modulação QPSK como uma função da SNR do *loop* para vários valores de  $\mu$  com  $\eta$ - $\mu$  (fixo  $\eta = 1$ ),  $\kappa$ - $\mu$  (fixo  $\kappa = 2$ ) e  $\hat{\gamma} = 20$  dB. Para pequenos valores de  $\rho$ , a ASER tende a ser alta, desde que esse é o pior cenário de sincronização. Note que, quando  $\mu = 0.5$ ,  $\mu = 1$ ,  $\mu = 1.2$  para  $\eta$ - $\mu$ , as distribuições Rayleigh, Nakagami- $m$  ( $m = 2$ ) e Nakagami- $m$  ( $m = 2.4$ ) são obtidas, e a ASER está em acordo com [18]. Para  $\kappa$ - $\mu$ , quando  $\mu = 1$ , a distribuição Rice é obtida, e a ASER está em acordo com [18]. Com o aumento do valor de  $\rho$ , o desempenho do sistema melhora, i.e., valores de ASER baixos. E uma taxa irredutível de erro é alcançada. Essa taxa irredutível é devido à combinação dos efeitos, ruído térmico (AWGN) e desvanecimento.

# Capítulo 4

## Conclusões e Trabalhos Futuros

### 4.1 Conclusões

**E**sta dissertação forneceu uma análise do cálculo da ABER para modulações BPSK e QPSK operando com detecção não idealmente coerente, quando corrompidas por canais com desvanecimento plano e lento juntamente com o ruído AWGN. Expressões analíticas exatas e assintóticas para o cálculo da ABER foram derivadas. Forneceu-se uma análise do cálculo da ASER para a modulação MPSK operando com detecção não idealmente coerente, quando corrompidas por canais com desvanecimento plano e lento juntamente com o ruído AWGN. Expressões analíticas exatas, aproximadas e assintóticas para o cálculo da ASER foram derivadas. As expressões analíticas derivadas para o cálculo da ABER e ASER abrangem os dois principais modelos encontrados na literatura, Tikhonov e Gaussiano, para descrever o erro na estimativa da fase. Ao longo do Capítulo 3 discutiu-se os efeitos da estimação imperfeita da fase nas modulações BPSK, QPSK e MPSK. Diferente do caso idealmente coerente, o desempenho da modulação QPSK sofre maior degradação do que a modulação BPSK no cenário de detecção não idealmente coerente. Quanto aos modelos de canais com desvanecimento abordados nesta dissertação ( $\alpha$ - $\mu$ ,  $\eta$ - $\mu$ ,  $\kappa$ - $\mu$ ), o impacto de seus respectivos parâmetros na ABER e ASER foi discutido. Simulações extensivas também foram realizadas para corroborar os resultados teóricos.

### 4.2 Trabalhos Futuros

Algumas questões continuam abertas dentro da área do trabalho apresentado por esta dissertação. São elas:

- A SNR do *loop* de recuperação da portadora, o parâmetro  $\rho$ , foi admitido como constante e não proporcional à SNR instantânea do canal. A suposição de proporcionalidade entre a SNR do *loop* e a envoltória do canal é deixada para um trabalho futuro, pois aparenta ser bastante complexa.
- Estender os resultados obtidos nesta dissertação para modelos mais generalizado de canais com desvanecimento plano. Tais como  $\alpha$ - $\eta$ - $\mu$ ,  $\alpha$ - $\kappa$ - $\mu$  e  $\alpha$ - $\eta$ - $\kappa$ - $\mu$ .
- Desenvolver uma análise para modulações QAM quando operando com detecção não idealmente coerente.
- Buscar expressões exatas para o cálculo da ABER em modulações MPSK quando operando com detecção não idealmente coerente sob a influência de canais com desvanecimento.
- Avaliar o desempenho em receptores otimizados, ou seja, considerar os modelos tratados nessa dissertação dentro do cenário de detecção parcialmente coerente.

## Referências Bibliográficas

- [1] P. M. Shankar, *Fading and shadowing in wireless systems*, 1st ed. Drexel University, Philadelphia, USA: Springer, 2012.
- [2] D. A. Guimarães, *Digital transmission: a simulation-aided introduction with Vis-Sim/Comm*, 1st ed. Berlin: Springer, 2009.
- [3] A. Goldsmith, *Wireless Communications*, 1st ed. Stanford University: Cambridge University Press, 2005.
- [4] A. J. Viterbi, *Principles of coherent communication*, 1st ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1966.
- [5] M. K. Simon and M.-S. Alouini, *Digital communication over fading channels: a unified approach to performance analysis*, 1st ed. New York, EUA: John Wiley and Sons, 2000.
- [6] L. F. Rayleigh, “On the resultant of a large number of vibrations of the same pitch and of arbitrary phase,” *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, vol. 10, no. 60, pp. 73–78, Aug. 1880.
- [7] M. Nakagami, *Statistical Methods in Radio Wave Propagation*, 1st ed. Faculty of Engineering, Kobe University, Kobe, Japan: Elsevier, 1960.
- [8] W. R. Braun and U. Dersch, “A physical mobile radio channel model,” *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 40, no. 2, pp. 472–482, May 1991.
- [9] M. D. Yacoub, “The  $\alpha$ - $\mu$  distribution: A physical fading model for the stacy distribution,” *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 56, no. 1, pp. 27–34, Jan. 2007.
- [10] —, “The  $\kappa$ - $\mu$  distribution and the  $\eta$ - $\mu$  distribution,” *IEEE Antennas Propag. Mag.*, vol. 49, no. 1, pp. 68–81, Feb. 2007.
- [11] —, “Nakagami- $m$  phase-envelope joint distribution: A new model,” *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 59, no. 3, pp. 1552–1557, Mar. 2010.
- [12] V. M. Rodrigo-Penarrocha, J. Reig, L. Rubio, H. Fernández, and S. Loredó, “Analysis of small-scale fading distributions in vehicle-to-vehicle communica-

- tions,” *Mobile Information Systems*, vol. 2016, p. 7, Jun. 2016.
- [13] J. Reig, M.-T. Martínez-Inglés, L. Rubio, V.-M. Rodrigo-Penarrocha, and J.-M. Molina-García-Pardo, “Fading evaluation in the 60 GHz band in line-of-sight conditions,” *International Journal of Antennas and Propagation*, vol. 2014, p. 12, Aug. 2014.
- [14] N. Bhargava, S. L. Cotton, and D. B. Smith, “An experimental-based analysis of inter-BAN co-channel interference using the  $\kappa$ - $\mu$  fading model,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 65, no. 2, pp. 983–988, Feb. 2017.
- [15] S. Kumar and S. Kalyani, “Coverage probability and rate for  $\kappa - \mu/\eta - \mu$  fading channels in interference-limited scenarios,” *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 14, no. 11, pp. 6082–6096, Nov. 2015.
- [16] Weisstein, eric w. delta function. from mathworld - a wolfram web resource. [Online]. Available: <http://mathworld.wolfram.com/DeltaFunction.html>
- [17] W. Weber, “Performance of phase-locked loops in the presence of fading communication channels,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 24, no. 5, pp. 487–499, May 1976.
- [18] I. A. Falujah and V. Prabhu, “Performance analysis of PSK systems in the presence of slow fading, imperfect carrier phase recovery, and AWGN,” *IEE Proc.-Commun.*, vol. 152, no. 6, pp. 903–911, Dec. 2005.
- [19] A. Chandra, A. Patra, and C. Bose, “Performance analysis of PSK systems with phase error in fading channels: A survey,” *Physical Communication*, pp. 63–82, Dec. 2010.
- [20] C. Lo and W. Lam, “Error probability of binary phase shift keying in Nakagami- $m$  fading channel with phase noise,” *Electronics Letters*, vol. 36, no. 21, pp. 1773–1774, Oct. 2000.
- [21] A. Chandra, A. Patra, and C. Bose, “Performance analysis of BPSK over different fading channels with imperfect carrier phase recovery,” in *2010 IEEE Symposium on Industrial Electronics and Applications (ISIEA)*, Oct. 2010, pp. 106–111.
- [22] J. Anastasov, N. Milošević, Z. Marjanović, and G. T. Đorđević, “BER evaluation of PSK receiver over Weibull fading in the presence of imperfect carrier phase estimation,” *Infoteh-jahorina*, vol. 16, pp. 344–348, Mar. 2017.
- [23] A. M. Magableh and M. M. Matalgah, “Moment generating function of the generalized  $\alpha$ - $\mu$  distribution with applications,” *IEEE Commun. Lett.*, vol. 13, no. 6, pp. 411–413, Jun. 2009.
- [24] Y. Jang, D. Yoon, and S.-K. Lee, “Generalized BER expression of MPSK in the

- presence of phase error,” *IEEE Commun. Lett.*, vol. 17, no. 12, pp. 2213–2216, Dec. 2013.
- [25] Q. Wang and P.-Y. Kam, “Simple, unified, and accurate prediction of error probability for higher order MPSK/MDPSK with phase noise in optical communications,” *J. Lightw. Technol.*, vol. 32, no. 21, pp. 4133–4142, Nov. 2014.
- [26] I. Gradshteyn and I. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, 7th ed. New York, EUA: NY: Editora Academic Press, 2007.
- [27] J. I. Marcum, “A statistical theory of target detection by pulsed radar,” *IRE Transactions on Information Theory*, vol. 6, no. 2, pp. 59–267, April 1960.
- [28] A. J. Viterbi, “Phase-locked loop dynamics in the presence of noise by Fokker-Planck techniques,” *Proc. IEEE*, vol. 51, no. 12, pp. 1737–1753, Dec. 1963.
- [29] S. Zhang, P.-Y. Kam, C. Yu, and J. Chen, “Decision-aided carrier phase estimation for coherent optical communications,” *J. Lightw. Technol.*, vol. 28, no. 11, pp. 1597–1607, Jun. 2010.
- [30] P. Y. Kam, “Maximum likelihood carrier phase recovery for linear suppressed-carrier digital data modulations,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 34, no. 6, pp. 522–527, Jun. 1986.
- [31] M. K. Simon and M.-S. Alouini, “Simplified noisy reference loss evaluation for digital communication in the presence of slow fading and carrier phase error,” *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 50, no. 2, pp. 480–486, Mar. 2001.
- [32] P. C. Jain and N. M. Blachman, “Detection of a PSK signal transmitted through a hard-limited channel,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. IT-19, no. 5, pp. 623–630, Sep. 1973.
- [33] I. Wolfram Research. Meijer G-function - Exponential Function. [Online]. Available: <http://functions.wolfram.com/07.34.03.0228.01>
- [34] I. Wolfram Research. Meijer G-function. [Online]. Available: <http://functions.wolfram.com/07.34.21.0013.01>
- [35] G. Arfken, H. Weber, and F. E. Harris, *Mathematical Methods for Physicists*, 7th ed. Miami University Oxford: Academic Press, 2012.
- [36] V. M. Rennó, R. A. A. de Souza, and M. D. Yacoub, “On the generation of white samples in severe fading conditions,” *IEEE Commun. Lett.*, vol. 23, no. 1, pp. 180–183, Jan. 2019.
- [37] D. J. Best and N. I. Fisher, “Efficient simulation of the von Mises distribution,” *Journal of the Royal Statistical Society*, vol. 28, no. 2, pp. 152–157, 1979.

