

Um Método Empírico para Estimação
do Número de Fontes de Sinais
Incidentes em um Arranjo de
Sensores

PATRÍCIA MARIA SOARES

FEVEREIRO/2014

**Um Método Empírico para Estimação do
Número de Fontes de Sinais Incidentes em um
Arranjo de Sensores**

PATRÍCIA MARIA SOARES

Dissertação apresentada ao Instituto Nacional
de Telecomunicações, como parte dos
requisitos para obtenção do Título de Mestre
em Telecomunicações.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Dayan Adionel
Guimarães

CO-ORIENTADOR: Prof. Dr. Rausley A. A.
de Souza

Santa Rita do Sapucaí
2014

Soares, Patrícia Maria

S676m

Um Método Empírico para Estimação do Número de Fontes de Sinais Incidentes em um Arranjo de Sensores. / Patrícia Maria Soares. – Santa Rita do Sapucaí, 2014.

82p.

Orientador: Prof. Dr. Dayan Adionel Guimarães e Prof. Dr. Rausley Adriano Amaral de Souza.

Dissertação de Mestrado – Engenharia de Telecomunicações – Instituto Nacional de Telecomunicações – INATEL.

Inclui bibliografia e anexo.

1. Estimação do número de fontes 2. Teoria de matrizes aleatórias 3. Método (AIC) 4. Método (BIC) 5. Método MDL 6. Engenharia de Telecomunicações I. Guimarães, Dayan Adionel. II. Souza, Rausley Adriano Amaral de III. Instituto Nacional de Telecomunicações – INATEL. IV. Título.

CDU 621.39

FOLHA DE APROVAÇÃO

Dissertação defendida e aprovada em ____ / ____ / ____ ,
pela comissão julgadora:

Prof. Dr. Dayan Adionel Guimarães

INATEL

Prof. Dr. Rausley Adriano Amaral de Souza

INATEL

Prof. Dr. Luís Henrique de Carvalho Ferreira

UNIFEI

Prof. Dr. Carlos Alberto Ynoguti

INATEL

Coordenador do Curso de Mestrado
Prof. Dr. José Marcos Câmara Brito

*“We build too many walls and not enough bridges”
– Sir Isaac Newton*

Aos meus queridos avós (*in memoriam*) pelos
grandes ensinamentos.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por permitir que concretizasse o sonho desse trabalho.

Aos meus pais Vicente e Marlysia, pelo amor incondicional e pelo apoio.

Aos meus irmãos Ana Paula, Carlos Henrique e Flávia pela amizade e companheirismo.

Ao Lucas e família, que estiveram ao meu lado apoiando e incentivando.

Aos Professores Dr. Dayan Adionel Guimarães e Dr. Rausley A.A. de Souza pelos conhecimentos adquiridos, orientação e motivação concedida durante a elaboração deste trabalho.

À toda Comunidade INATEL, professores e funcionários pelos conhecimentos adquiridos e atenção.

Aos amigos adquiridos no mestrado pela ajuda mútua e por tornarem os momentos sempre agradáveis.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS.....	viii
LISTA DE TABELAS	x
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS	xi
LISTA DE SÍMBOLOS	xii
RESUMO.....	xiv
ABSTRACT	xv
Capítulo 1 Introdução	1
1.1 Contextualização e pesquisas relacionadas.....	1
1.2 Formulação do problema.....	3
1.3 Estrutura e contribuições da dissertação	7
Capítulo 2 Métodos de Estimação do Número de Fontes por Autovalores. 9	
2.1 Fundamentos	9
2.1.1 <i>Estimação de ordem do modelo pelo critério de máxima</i> <i>verossimilhança</i>	<i>10</i>
2.1.2 <i>Estimação de ordem do modelo pelo critério de máxima a</i> <i>posteriori</i>	<i>11</i>
2.1.3 <i>Distância de Kullback-Leibler (KL).....</i>	<i>12</i>

2.1.4	Aplicação do Critério MAP e da Informação de KL na estimação de ordem do modelo.....	13
2.2	Critério de informação de Akaike (AIC)	15
2.3	Critério de informação Bayesiano (BIC)	19
2.4	Método de comprimento de mínima descrição (MDL)	24
2.5	Método baseado na teoria de matrizes aleatórias (RMT).....	25
2.5.1	Alguns resultados da teoria de matrizes aleatórias.....	25
2.5.2	O método RMT	28
Capítulo 3	Algoritmo Baseado em Norma	36
3.1	Algoritmo proposto	36
3.2	Resultados Numéricos.....	40
Capítulo 4	Resultados Numéricos	45
4.1	Introdução	45
4.2	Desempenho dos estimadores AIC, BIC/MDL, RMT e NB para SNR (dB) variável	48
4.3	Desempenho dos estimadores AIC, BIC/MDL, RMT e NB para número de fontes p variável	49
4.4	Desempenho dos estimadores AIC, BIC/MDL, RMT e NB para número de amostras n variável.....	50
4.5	Desempenho dos estimadores AIC, BIC/MDL, RMT e NB para número de sensores m variável	52

Capítulo 5 Conclusões e Oportunidades para Pesquisas Futuras.....	54
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	57
APÊNDICE	59

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1: <i>Representação dos ganhos na matriz de canal H em um cenário com p transmissores e m receptores.</i>	4
Figura 1.2: <i>Classificação dos autovalores da matriz de covariância estimada para $SNR = 0$ dB e $SNR = -15$ dB.</i>	7
Figura 2.1: <i>Desempenho do estimador AIC para SNR variável.</i>	17
Figura 2.2: <i>Desempenho do estimador AIC para p variável.</i>	18
Figura 2.3: <i>Desempenho do estimador AIC para n variável.</i>	19
Figura 2.4: <i>Desempenho do estimador AIC para m variável.</i>	19
Figura 2.5: <i>Desempenho do estimador BIC para SNR variável.</i>	21
Figura 2.6: <i>Desempenho do estimador BIC para p variável.</i>	22
Figura 2.7: <i>Desempenho do estimador BIC para n variável.</i>	23
Figura 2.8: <i>Desempenho do estimador BIC para m variável.</i>	24
Figura 2.9: <i>Representação gráfica dos autovalores de $\hat{\mathbf{R}}$ e limiares de decisão do algoritmo RMT de [3].</i>	30
Figura 2.10: <i>Desempenho do estimador RMT para SNR variável.</i>	32
Figura 2.11: <i>Desempenho do estimador RMT para p variável.</i>	33
Figura 2.12: <i>Desempenho do estimador RMT para n variável.</i>	34
Figura 2.13: <i>Desempenho do estimador RMT para m variável.</i>	34
Figura 3.1: <i>Representação gráfica dos autovalores de $\hat{\mathbf{R}}$ da Figura 2.9 e dos autovalores normalizados (sob índice j) segundo o algoritmo NB.</i>	37

Figura 3.2: Representação gráfica de $\{b_i\}$ e de $\{c_i\}$ para diferentes expoentes E	39
Figura 3.3: Variação na probabilidade de decisão correta sobre o número de fontes em função do expoente E	40
Figura 3.4: Desempenho do estimador NB para SNR variável.....	41
Figura 3.5: Desempenho do estimador NB para p variável.....	42
Figura 3.6: Desempenho do estimador NB para n variável.....	43
Figura 3.7: Desempenho do estimador NB para m variável.....	43
Figura 4.1: Fluxograma dos desempenhos dos estimadores em função de P_c e P_{se} .	47
Figura 4.2: Desempenhos dos estimadores AIC, BIC/MDL, RMT e NB para SNR variável.....	48
Figura 4.3: Desempenhos dos estimadores AIC, BIC/MDL, RMT e NB para p variável.....	50
Figura 4.4: Desempenhos dos estimadores AIC, BIC/MDL, RMT e NB para n variável.....	51
Figura 4.5: Desempenhos dos estimadores AIC, BIC/MDL, RMT e NB para m variável.....	52

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: <i>Conjuntos de parâmetros utilizados na composição da Figura 3.3.</i>	39
---	----

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AIC	<i>Akaike information criterion</i>
AWGN	<i>Additive white Gaussian noise</i>
BIC	<i>Bayesian information criterion</i>
DoA	<i>Direction of arrival</i>
FDP	Função densidade probabilidade
KL	Critério de informação de Kullback-Leibler
MAP	<i>Máximo a posteriori</i>
MDL	<i>Minimum description length</i>
NB	<i>Norm based</i>
RC	Rádio cognitivo
RMT	<i>Random matrix theory</i>
SNR	<i>Signal-to-noise ratio</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

λ_i	<i>i</i> -ésimo Autovalor
$(\cdot)^\dagger$	Conjugado transposto do argumento
\mathcal{H}_0	Hipótese de nulidade
\mathcal{H}_1	Hipótese alternativa
\mathcal{H}_k	Hipótese para ordem do modelo k
H	Matriz de canal
I_m	Matriz identidade de ordem m
R	Matriz de covariância do sinal recebido
$\hat{\mathbf{R}}$	Matriz de covariância estimada do sinal recebido
X	Matriz de amostras do sinal recebido
S	Matriz de amostras do sinal transmitido
N	Matriz de ruído Gaussiano
$\ \cdot\ $	Norma do argumento
n	Número de amostras coletadas por cada sensor
p	Número de fontes
\hat{p}	Número de fontes estimadas
m	Número de sensores
\mathbf{x}_i	Observações m -dimensionais do sinal recebido
$P(\mathcal{H}_k \mathbf{x})$	Probabilidade a posteriori da hipótese \mathcal{H}_k
$P(\mathcal{H}_k)$	Probabilidade a priori \mathcal{H}_k
P_c	Probabilidade de detecção correta
P_{se}	Probabilidade de sobrestimação

Π	Produtório
h_{kl}	Representação do ganho do canal
$E[\cdot]$	Valor esperado do argumento
σ^2	Variância do ruído Gaussiano
$f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$	Função densidade de probabilidade do vetor \mathbf{x} em função dos parâmetros em $\boldsymbol{\theta}$
$\hat{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$	Função densidade de probabilidade estimada do vetor \mathbf{x} em função dos parâmetros em $\boldsymbol{\theta}$
Σ	Somatório
$\text{tr}(\cdot)$	Traço da matriz
\mathbf{s}_i	Vetores de sinais aleatórios estacionários de média nula
\mathbf{n}_i	Vetores de ruído aditivo Gaussiano
$\boldsymbol{\theta}$	Vetor de parâmetros do sinal recebido
$\hat{\boldsymbol{\theta}}$	Vetor de parâmetros estimado do sinal recebido

RESUMO

Esta dissertação propõe um método empírico para se estimar o número de fontes de sinais recebidos por múltiplos sensores. O método é baseado na análise das normas de vetores cujos elementos são os autovalores normalizados da matriz de covariância do sinal recebido e os correspondentes índices, também normalizados. Tal norma pode ser usada para classificar os autovalores, separando os maiores dos demais, permitindo assim que se estime o número de fontes sem que se conheça nenhum parâmetro adicional. O método baseado em norma, como aqui é denominado, produz estimativas consistentes à medida que o número de amostras aumenta e em algumas situações apresenta uma probabilidade de acerto superior quando comparado com um recente e eficaz método baseado na teoria de matrizes aleatórias. Também são abordados neste trabalho métodos baseados na teoria da informação os quais são: critério de informação de Akaike (AIC), método do comprimento de mínima descrição (MDL) e critério de informação Bayesiana (BIC). Alguns conceitos fundamentais também são fornecidos, objetivando facilitar o entendimento dos métodos supracitados.

Palavras-chave: Estimação do número de fontes, teoria de matrizes aleatórias, critério de informação de Akaike (AIC), critério de informação Bayesiana (BIC), método do comprimento de mínima descrição (MDL).

ABSTRACT

This dissertation proposes an empirical method for estimating the number of sources of signals impinging on multiple sensors. The method is based on the analysis of the norms of vectors whose elements are the normalized eigenvalues of the received signal covariance matrix and the corresponding normalized indexes. It is shown that such norms can be used to classify the eigenvalues in two groups: the largest and the remaining ones, thus allowing for the estimation of the number of sources without the knowledge of any additional parameter. The norm-based method, as it is called here, produces consistent estimates as the number of samples increases, and in some situations has a higher probability of correct estimation when compared to a new and effective method based on the random matrix theory. Is also addressed in this study methods based on information theory which is the Akaike information criterion (AIC), the method of minimum description length (MDL) and the Bayesian information criterion (BIC). Some fundamental concepts are also provided, in order to facilitate the understanding of the above methods.

Keywords: Estimation of the number of sources, random matrix theory, Akaike information criterion (AIC), Bayesian information criterion (BIC), minimum description length (MDL).

Capítulo 1

Introdução

1.1 Contextualização e pesquisas relacionadas

Estimar o número de fontes significa determinar a quantidade de fontes geradoras dos estímulos recebidos por um arranjo de sensores. Trata-se de um problema clássico em processamento digital de sinais, encontrando aplicações em telecomunicações, medicina, sistemas de radares, estatística e em muitas outras áreas [1]-[8]. No contexto de sistemas de telecomunicações, estimar o número de fontes significa estimar o número de transmissores ativos em uma determinada faixa de frequências, usando um arranjo de antenas como elemento sensor ou um conjunto de receptores com antenas simples compondo um arranjo virtual de antenas.

No contexto de sensoriamento espectral em sistemas de rádio cognitivo (RC) [9], por exemplo, pode ser importante nas técnicas de detecção que a rede secundária conheça o número de transmissores para que possa corretamente computar a estatística de teste que permitirá verificar o estado de ocupação do espectro, ou até mesmo como dado adicional de entrada de um processo cognitivo mais amplo. Neste caso, as antenas dos rádios cognitivos compõem o arranjo virtual de antenas. Outra aplicação em sistemas de telecomunicações consiste da estimação da variância de ruído térmico na entrada de um receptor, na presença de sinal. Vários algoritmos de estimação desta variância necessitam conhecer o número de sinais recebidos de forma que operem a contento [3]. Este também é o caso de vários algoritmos de estimação de direção de chegada (DoA, *direction of arrival*) de sinais em arranjos de

antenas, os quais produzem estimativas mais precisas se é conhecido o número de transmissores [10]. Em sistemas de radar, a estimação do número de fontes pode auxiliar no conhecimento do número de ecos de um sinal refletido por um alvo, permitindo que etapas posteriores de processamento reduzam a influência de tais ecos na caracterização do alvo [2][11]. Em medicina, a estimação do número de fontes pode ser utilizada, por exemplo, na contagem do número de neurônios que respondem a estímulos controlados em cada parte do cérebro, permitindo que as áreas cerebrais sensíveis a cada tipo de estímulo sejam identificadas [8].

Muito se tem pesquisado sobre a estimação do número de fontes desde o trabalho seminal de M. Wax e T. Kailath [2], o qual discorre sobre os métodos fundamentados pela teoria da informação. Entre eles merecem destaque o método baseado no critério de informação de Akaike (AIC, *Akaike information criterion*) [12][13], o método do comprimento de mínima descrição (MDL, *minimum description length*) [14] e o método baseado no critério de informação Bayesiana (BIC, *Bayesian information criterion*) [15]. Dentre estes, o método MDL tem sido considerado referência ou elemento de comparação na maioria dos estudos [3].

Métodos baseados na teoria de matrizes aleatórias (RMT, *random matrix theory*) têm sido explorados como alternativos em relação àqueles baseados na teoria da informação. Em [3], por exemplo, são aplicados recentes resultados sobre a distribuição dos autovalores da matriz de covariância do sinal recebido e do ruído em um novo algoritmo baseado em uma sequência de testes de hipóteses. O algoritmo proposto em [3] procura obter alta probabilidade de detecção correta em regimes de baixa relação sinal-ruído, característica marcante do estimador AIC, bem como boa consistência em regimes de grande número de amostras do sinal recebido, característica relevante do estimador MDL. A maior desvantagem do método baseado na teoria de matrizes aleatórias consiste da necessidade de se estimar a variância de ruído térmico para que, em seguida, um limiar de decisão do teste de hipóteses seja computado. Isto pode representar um grande obstáculo de ordem prática, além de produzir variação de desempenho em função do grau de precisão do valor estimado de variância.

Nos métodos baseados na teoria da informação, assim como no método baseado na teoria de matrizes aleatórias, o número de fontes é estimado tomando por base uma classificação dos autovalores da matriz de covariância do sinal (estímulo) sensoriado. Tal classificação pode ser caracterizada como um problema de seleção de modelo (*model selection*) ou de determinação de ordem do modelo (*model order determination*) [1]-[3][16] e busca identificar, dentre todos os autovalores, um subconjunto cujo número de elementos está associado ao número de sinais recebidos. Esta classificação dos autovalores corresponde a um dos maiores desafios destes métodos.

1.2 Formulação do problema

Considere que o sinal incidente em um receptor com um arranjo de m antenas (ou em m receptores com uma antena cada um, formando um arranjo virtual) no i -ésimo instante de tempo discreto, $i = 1, 2, \dots, n$, possa ser representado por

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{H}\mathbf{s}_i + \mathbf{n}_i, \quad (1.1)$$

em que $\{\mathbf{x}_i\} = \{\mathbf{x}(t_i)\}$ denota observações m -dimensionais do sinal recebido, \mathbf{H} é a matriz de canal de ordem $m \times p$, com p colunas linearmente independentes contendo m elementos, $m \geq p$, ou seja

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1l} & \cdots & h_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{k1} & \cdots & h_{kl} & \cdots & h_{kp} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1} & \cdots & h_{ml} & \cdots & h_{mp} \end{bmatrix}. \quad (1.2)$$

Os elementos $\{h_{kl}\}$ de \mathbf{H} , $k = 1, 2, \dots, m$ e $l = 1, 2, \dots, p$, representam o ganho do canal entre o l -ésimo transmissor (ou fonte) e o k -ésimo sensor (elemento em um arranjo de antenas ou receptor com antena simples), como ilustrado na Figura 1.1. O conjunto $\{\mathbf{s}_i\}$, de ordem $p \times 1$, representa sinais aleatórios estacionários de média nula. Por fim, $\{\mathbf{n}_i\}$, de ordem $m \times 1$, representa os vetores de ruído aditivo Gaussiano $\mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathbf{I}_m)$, com \mathbf{I}_m sendo uma matriz identidade de ordem m .

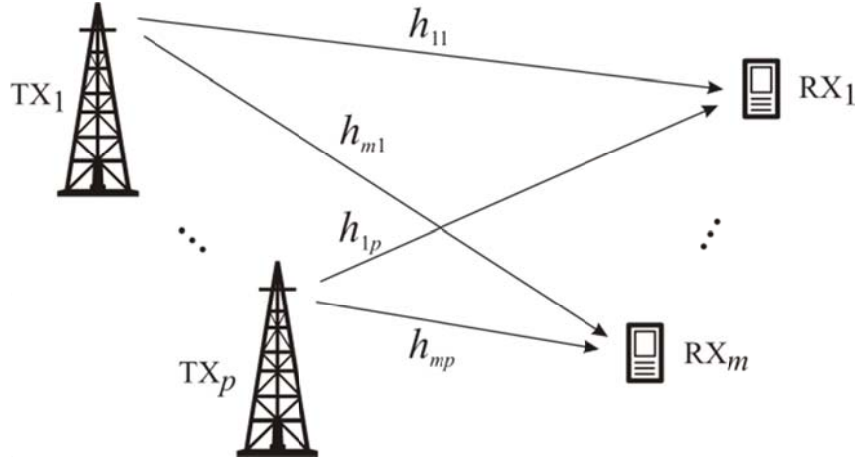


Figura 1.1: Representação dos ganhos na matriz de canal \mathbf{H} em um cenário com p transmissores e m receptores.

Seja \mathbf{R} a matriz de covariância do sinal recebido, a qual tem sua estimativa de máxima verossimilhança dada pela média amostral (*sample covariance matrix*)

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^\dagger = \frac{1}{n} \mathbf{X} \mathbf{X}^\dagger, \quad (1.3)$$

em que \dagger denota conjugado transposto e \mathbf{X} , de ordem $m \times n$, é a matriz formada arranjando-se lado a lado os n vetores do conjunto $\{\mathbf{x}_i\}$. Seja \mathbf{S} , de ordem $p \times n$, a matriz formada arranjando-se lado a lado os n vetores $\{\mathbf{s}_i\}$. Se \mathbf{N} , de ordem $m \times n$, é a matriz formada arranjando-se lado a lado os n vetores $\{\mathbf{n}_i\}$, então se pode escrever que

$$\mathbf{X} = \mathbf{H} \mathbf{S} + \mathbf{N}. \quad (1.4)$$

Existem duas possibilidades de entrada no receptor, formuladas por meio de duas hipóteses:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 : \mathbf{X} &= \mathbf{N} \\ \mathcal{H}_1 : \mathbf{X} &= \mathbf{H} \mathbf{S} + \mathbf{N}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

em que \mathcal{H}_0 representa a hipótese de nulidade na qual o sinal de entrada é apenas ruído e \mathcal{H}_1 representa a hipótese na qual o sinal de entrada é um sinal somado ao ruído.

Devido à média nula do ruído e sua independência do sinal, pode-se verificar que \mathbf{R} pode ser assim escrita [17]

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{X}\mathbf{X}^\dagger] = \mathbf{H}\mathbf{R}_s\mathbf{H}^\dagger + \sigma^2\mathbf{I}, \quad (1.6)$$

em que $E[.]$ é a esperança estatística (ou valor esperado) do argumento, \mathbf{R}_s é a matriz de covariância do sinal transmitido, ou seja, $\mathbf{R}_s = E[\mathbf{S}\mathbf{S}^\dagger]$ e σ^2 é a variância do ruído.

Sob hipótese \mathcal{H}_1 a matriz de covariância do sinal recebido é dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= E[\mathbf{X}\mathbf{X}^\dagger] \\ &= E[(\mathbf{H}\mathbf{S} + \mathbf{N})(\mathbf{H}\mathbf{S} + \mathbf{N})^\dagger] \\ &= E[(\mathbf{H}\mathbf{S} + \mathbf{N})((\mathbf{H}\mathbf{S})^\dagger + (\mathbf{N})^\dagger)]. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Aplicando a propriedade $(XY)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger$, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= E[(\mathbf{H}\mathbf{S} + \mathbf{N})((\mathbf{H}\mathbf{S})^\dagger + (\mathbf{N})^\dagger)] \\ &= E[(\mathbf{H}\mathbf{S} + \mathbf{N})(\mathbf{S}^\dagger\mathbf{H}^\dagger + \mathbf{N}^\dagger)] \\ &= E[\mathbf{H}\mathbf{S}\mathbf{S}^\dagger\mathbf{H}^\dagger + \mathbf{H}\mathbf{S}\mathbf{N}^\dagger + \mathbf{N}\mathbf{S}^\dagger\mathbf{H}^\dagger + \mathbf{N}\mathbf{N}^\dagger] \\ &= E[\mathbf{H}\mathbf{S}\mathbf{S}^\dagger\mathbf{H}^\dagger] + E[\mathbf{H}\mathbf{S}\mathbf{N}^\dagger] + E[\mathbf{N}\mathbf{S}^\dagger\mathbf{H}^\dagger] + E[\mathbf{N}\mathbf{N}^\dagger]. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Como \mathbf{H} é considerada constante dentro do intervalo de coleta das amostras recebidas (simulando desvanecimento lento), pela propriedade $E[aX] = aE[X]$, tem-se

$$\mathbf{R} = \mathbf{H}E[\mathbf{S}\mathbf{S}^\dagger]\mathbf{H}^\dagger + \mathbf{H}E[\mathbf{S}\mathbf{N}^\dagger] + \mathbf{H}^\dagger E[\mathbf{N}\mathbf{S}^\dagger] + \sigma^2\mathbf{I}, \quad (1.9)$$

e como $E[AB] = E[A]E[B]$ para variáveis aleatórias independentes e $E[\mathbf{N}] = 0$, a matriz de covariância é dada por

$$\mathbf{R} = \mathbf{H}\mathbf{R}_s\mathbf{H}^\dagger + \sigma^2\mathbf{I}. \quad (1.10)$$

Da teoria de álgebra linear, se a matriz de canal \mathbf{H} tiver todas as p colunas linearmente independentes (*full rank*), o posto (*rank*) da matriz $\mathbf{H}\mathbf{R}_s\mathbf{H}^\dagger$ será p ou, equivalentemente, os $m - p$ menores autovalores de $\mathbf{H}\mathbf{R}_s\mathbf{H}^\dagger$ serão nulos. Como os

autovalores de \mathbf{R} são os autovalores de $\mathbf{H}\mathbf{R}_s\mathbf{H}^\dagger$ mais os autovalores de $\sigma^2\mathbf{I}$, então os $m - p$ menores autovalores de \mathbf{R} serão iguais a σ^2 , uma vez que \mathbf{R} é uma matriz definida semi positiva. Note então que é possível se estimar o número de fontes p determinando-se a multiplicidade dos menores autovalores de \mathbf{R} .

Na prática, entretanto, não se conhece a matriz de covariância \mathbf{R} , mas apenas sua estimativa $\hat{\mathbf{R}}$, a qual é obtida a partir de um número finito n de amostras, conforme [2]. Neste caso os menores autovalores de $\hat{\mathbf{R}}$ serão diferentes com probabilidade 1, e a estimação do número de fontes meramente “observando” os autovalores se torna uma tarefa bastante difícil [2].

A classificação dos autovalores de $\hat{\mathbf{R}}$ em dois grupos que permitam identificar quantos são os maiores (ou menores) corresponde justamente ao maior problema na estimação do número de fontes por meio da estimativa da matriz de covariância do sinal recebido. Para ilustrar esse problema, a Figura 1.2 mostra os gráficos dos autovalores $\{\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m\}$ da matriz de covariância do sinal recebido, $\hat{\mathbf{R}}$, normalizados em relação ao máximo autovalor, para valores de relação sinal-ruído (SNR, *signal-to-noise ratio*) de 0 dB e -15 dB. O número de fontes é $p = 5$, o número de sensores é $m = 30$, o número de amostras por receptor (sensor) é $n = 1000$ e a potência total do sinal transmitido é unitária. Para uma SNR = 0 dB, perceba que na Figura 1.2 os $m - p = 25$ menores autovalores estão nitidamente separados dos $p = 5$ maiores, possibilitando uma estimação correta do número de fontes p . Já para uma SNR = -15 dB, correspondente a uma relação sinal-ruído bem menor, é praticamente impossível notar a separação entre os p maiores e os $m - p$ menores autovalores, o que significa que a estimação do número de fontes nessa situação levaria a uma alta probabilidade de erro.

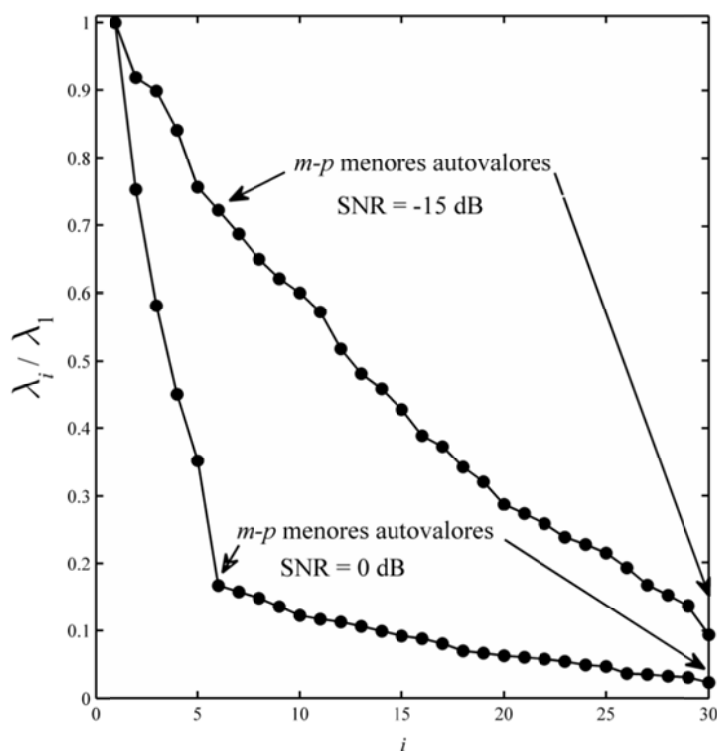


Figura 1.2: Classificação dos autovalores da matriz de covariância estimada para SNR = 0 dB e SNR = -15 dB.

1.3 Estrutura e contribuições da dissertação

Como mencionado anteriormente, métodos de estimação do número de fontes baseados em autovalores da matriz de covariância do sinal recebido têm sido explorados desde o trabalho seminal de M. Wax e T. Kailath [2]. O grande desafio para tal estudo é encontrar uma forma de classificar os autovalores de modo que seja possível determinar o número de fontes.

Este trabalho apresenta um método empírico de estimação do número de fontes, também baseado na classificação dos autovalores da matriz de covariância do sinal recebido em um arranjo de sensores. O método aqui proposto e denominado como NB (*Norm-Based*) não necessita computar um limiar para a classificação dos autovalores. Seu funcionamento consiste na análise das normas dos vetores cujos elementos são os autovalores normalizados da matriz de covariância do sinal recebido e os correspondentes índices, também normalizados. É justamente a norma dos vetores que permite que a técnica aqui utilizada faça tal classificação.

Uma contribuição desta pesquisa é a comparação entre os desempenhos de alguns estimadores baseados na teoria da informação e na teoria de matrizes aleatórias com o método aqui proposto. Tal comparação é realizada de forma a contextualizar, fundamentar e apresentar resultados em situações com variações da SNR, do número de fontes, do número de amostras e do número de sensores. A partir dos resultados obtidos para estes parâmetros analisados, é possível comprovar a eficiência do estimador NB em algumas circunstâncias.

Outra contribuição deste trabalho é que o método proposto não precisa conhecer a variância do ruído para que se possa estimar o número de fontes, o que torna sua implementação simples em relação ao método baseado na teoria de matrizes aleatórias.

Os próximos capítulos da dissertação encontram-se organizados da seguinte maneira: no Capítulo 2 são apresentados conceitos iniciais que contribuem para o entendimento das técnicas baseadas na teoria da informação bem como a descrição destas com apresentação dos resultados e análise de seus desempenhos em diversas situações. Ainda são apresentados alguns conceitos e o método baseado na teoria de matrizes aleatórias expondo também as análises de seu desempenho. No Capítulo 3, é apresentado o método baseado em norma, descrevendo-o e analisando seu desempenho em diversas situações. No Capítulo 4 são apresentados os resultados numéricos da comparação do desempenho de todos os estimadores citados nesta pesquisa bem como suas interpretações. O Capítulo 5 apresenta as conclusões e propostas para pesquisas futuras.

As seguintes publicações foram geradas como resultados das pesquisas:

i) P.M. SOARES, D.A. GUIMARÃES e R.A.A. SOUZA, **Estimação do Número de Fontes Utilizando Métodos Baseados na Teoria da Informação**. (Tutorial). Revista Telecomunicações (Inatel), Vol. 15, No. 2, 2013, pp. 93-102.

ii) **An Empirical Method for Estimating the Number of Signal Sources**. IEEE Latin America Transactions. Submetido

Capítulo 2

Métodos de Estimação do Número de Fontes por Autovalores

Neste capítulo são descritos alguns dos principais métodos para estimação do número de fontes que são baseados nos autovalores da matriz de covariância do sinal recebido por múltiplos sensores. São abordados os estimadores AIC, BIC e MDL, os quais também são fundamentados na Teoria da Informação e ainda o estimador RMT, fundamentado na Teoria de Matrizes Aleatórias. Não são considerados nesta dissertação outros métodos não consistentes em autovalores.

2.1 Fundamentos

Nesta seção são apresentados alguns fundamentos sobre a teoria da estimação de ordem (ou seleção) de modelo. Não se pretende aqui cobrir com profundidade todos os conceitos e desenvolvimentos matemáticos, mas apenas estabelecer a conexão entre eles de forma que o leitor possa conseguir entender as origens de cada um dos métodos de estimação discutidos. Espera-se também que os fundamentos aqui apresentados sirvam para que o leitor tenha condições de estudar tais métodos de forma mais aprofundada, ou até mesmo estudar outros métodos não cobertos nesta dissertação.

2.1.1 Estimação de ordem do modelo pelo critério de máxima verossimilhança

Considere um vetor m -dimensional \mathbf{x} observado em um determinado instante de tempo discreto. O critério de máxima verossimilhança pode ser utilizado para se obter a estimativa de um determinado parâmetro a partir desse vetor [16][18]. Considerando \mathbf{x} uma variável aleatória (multidimensional) associada a um sinal recebido e $\boldsymbol{\theta}$ um vetor de parâmetros desse sinal, a função densidade de probabilidade (FDP) de \mathbf{x} pode ser representada por $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, conhecida como função de verossimilhança do vetor \mathbf{x} em função dos parâmetros em $\boldsymbol{\theta}$ [2][3][18]. Seja o vetor \mathbf{x} representado por [18]

$$\mathbf{x} = \mu(\boldsymbol{\gamma}) + \boldsymbol{\eta}, \quad (2.1)$$

em que $\boldsymbol{\gamma}$ é um vetor desconhecido, $\mu(\boldsymbol{\gamma})$ é uma função determinística de $\boldsymbol{\gamma}$ e $\boldsymbol{\eta}$ representa o ruído Gaussiano e branco de média zero e matriz de covariância igual a $\sigma^2 \mathbf{I}$. Então se pode escrever $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ como [18]

$$f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} (\sigma^2)^{m/2}} e^{-\frac{\|\mathbf{x} - \mu(\boldsymbol{\gamma})\|^2}{2\sigma^2}}, \quad (2.2)$$

em que

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma} \\ \sigma^2 \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Como $\boldsymbol{\theta}$, a princípio, é um vetor de parâmetros desconhecidos, representa-se por $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ a sua estimativa. A aplicação do critério de máxima verossimilhança consiste em encontrar o conjunto de parâmetros que maximiza $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ ou $\ln f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$. A adoção de $\ln f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ é em grande parte das vezes preferida, já que a função logarítmica é uma função monotônica crescente que simplifica o desenvolvimento matemático do critério quando há somas de funções exponenciais que vão se transformar em produtos dos expoentes.

A estimativa de máxima verossimilhança do vetor θ pode assim ser escrita [18]

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \ln f(\mathbf{x}, \theta). \quad (2.4)$$

Em muitas aplicações, não somente os valores dos parâmetros estimados a partir do vetor observado são de interesse, mas também a dimensão do vetor de parâmetros θ . Esta dimensão é usualmente denominada de *ordem do modelo* em análise e pode estar associada, por exemplo, ao número de fontes de sinais incidindo sobre um arranjo de sensores. É dessa forma que o critério de máxima verossimilhança está conectado aos métodos de seleção ou de determinação de ordem do modelo [18].

A seguir, o problema de seleção de ordem do modelo é formulado como um teste de hipóteses, para o qual se verifica que o critério do máximo *a posteriori* (MAP) pode ser considerado ótimo. Em seguida discute-se sobre o critério de informação de Kullback-Leibler (KL), o qual direciona para uma abordagem alternativa para a elaboração de regras de seleção de ordem do modelo baseadas na teoria da informação.

2.1.2 Estimação de ordem do modelo pelo critério de máxima *a posteriori*

Seja \mathcal{H}_k a hipótese de que a ordem do modelo em análise é k e seja K um limitante superior para essa ordem. Considere ainda que as hipóteses $\{\mathcal{H}_k\}_{k=1}^K$ são mutuamente excludentes, ou seja, apenas uma delas pode ser considerada como verdadeira por vez. O critério MAP é aquele que maximiza a probabilidade *a posteriori* da hipótese \mathcal{H}_k , $P(\mathcal{H}_k | \mathbf{x})$, e alternativamente pode ser assim descrito [18]:

$$\max_k f(\mathbf{x} | \mathcal{H}_k)P(\mathcal{H}_k), \quad (2.5)$$

em que $P(\mathcal{H}_k)$ é a probabilidade *a priori* de \mathcal{H}_k . Se as hipóteses são equiprováveis, o critério MAP se reduz a

$$\max_k f(\mathbf{x} | \mathcal{H}_k). \quad (2.6)$$

No contexto de estimação de parâmetros, quando o parâmetro estimado é um inteiro, se costuma dizer que se trata de um problema de *detecção*. Sendo assim, quando se estima o parâmetro de interesse atribui-se ao processo de estimação uma *probabilidade de detecção correta*. Considere que, para o problema de estimação de ordem do modelo, a probabilidade de detecção correta P_c seja aquela obtida pela média sobre todas as hipóteses. Pode-se mostrar [18] que o critério MAP maximiza P_c e que, portanto, trata-se de um critério ótimo para determinação de ordem do modelo.

Aspectos de realização prática do critério MAP são discutidos mais adiante, na Seção 2.1.4.

2.1.3 Distância de Kullback-Leibler (KL)

A distância de Kullback-Leibler é uma medida de discrepância entre duas FDPs, a verdadeira e a estimada, por exemplo. Definindo a FDP verdadeira como $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ e a FDP estimada como $\hat{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, a distância de Kullback-Leibler é definida como [18]

$$D[f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}), \hat{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})] = \int f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) \ln \frac{f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})}{\hat{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})} d\mathbf{x}. \quad (2.7)$$

Pode-se mostrar [18] que $D[f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}), \hat{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})] \geq 0$ e que $D[f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}), \hat{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})] = 0$ se e somente se $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = \hat{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$.

A distância de KL é também conhecida como *entropia relativa*. Como, segundo a *teoria da informação*, a entropia é uma medida de quantidade de informação, então se pode associar a discrepância medida pela distância de KL à perda de informação pelo uso de $\hat{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ em vez de $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$. Por essa razão, a distância de KL é às vezes denominada de função de *informação de KL* e os métodos de determinação de ordem do modelo dela derivados são usualmente denominados de métodos baseados na teoria da informação.

Aspectos de realização prática da informação de KL são discutidos na próxima seção.

2.1.4 Aplicação do Critério MAP e da Informação de KL na estimação de ordem do modelo

É importante ressaltar que nem o critério MAP nem a informação de KL podem ser utilizados diretamente para estimação de ordem do modelo, pois as FDPs relacionadas ao vetor de dados sob as várias hipóteses, $f(\mathbf{x} | \mathcal{H}_k)$, ou a FDP verdadeira dos dados, $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, são desconhecidas.

Uma alternativa para se utilizar a abordagem MAP consiste em se atribuir uma FDP *a priori* para o vetor desconhecido $\boldsymbol{\theta}$, integrando $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta} | \mathcal{H}_k)$ em relação a essa FDP para se encontrar a FDP associada a cada hipótese, $f(\mathbf{x} | \mathcal{H}_k)$.

Em relação à informação de KL, uma possibilidade de utilizá-la na estimação de ordem do modelo consiste em utilizar uma estimativa da distância de KL, denotada por $\hat{D}[f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}), \hat{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})]$, escolhendo-se uma FDP $\hat{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ que seja adequada ao modelo. A determinação da ordem do modelo é então realizada pela minimização de $\hat{D}[f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}), \hat{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})]$.

No caso particular da informação de KL, note que a expressão (2.7) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} D[f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}), \hat{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})] &= \mathbb{E} \left[\ln \frac{f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})}{\hat{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})} \right] \\ &= \mathbb{E}[\ln f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) - \ln \hat{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})] \\ &= \mathbb{E}[\ln f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})] - \mathbb{E}[\ln \hat{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})], \end{aligned} \tag{2.8}$$

em que o valor esperado é tomado com relação à FDP real dos dados observados, $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$. Note que somente a parcela da direita em (2.8) é dependente do modelo. Então, minimizar $\hat{D}[f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}), \hat{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})]$ é equivalente a maximizar $\mathbb{E}[\ln \hat{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})]$, a chamada informação relativa de Kullback-Leibler.

A escolha ideal para $\hat{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ de forma que $E[\ln \hat{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})]$ seja maximizada é $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$. Como esta função não está disponível, uma escolha razoável seria aquela obtida com os parâmetros estimados, ou seja, $f(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$. No entanto, ainda não seria possível computar o valor esperado $E[\ln \hat{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})]$, já que $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, a FDP real dos dados sobre a qual o valor esperado seria tomado, não é conhecida. Como saída pode-se utilizar o estimador não polarizado trivial de $E[\ln \hat{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})]$, que é $\ln \hat{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$. Entretanto, como ressaltado em [18], a ordem do modelo obtida a partir da maximização de $\ln \hat{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ não terá grande utilidade prática, podendo falhar completamente em alguns casos, principalmente naqueles em que hipóteses estão aninhadas, ou seja, quando o modelo associado a uma hipótese é um caso particular de um modelo associado a outra hipótese.

Uma primeira abordagem para a solução do problema supracitado consiste em aproximar a FDP desconhecida do modelo, $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, por uma expansão de Taylor em torno do vetor de parâmetros estimados, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, usando então essa aproximação como $\hat{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ no problema de maximização da informação relativa de KL, $E[\ln \hat{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})]$. Como resultado, a ordem do modelo k (dimensão do vetor $\hat{\boldsymbol{\theta}}$) estimada será aquela que minimiza [18]

$$-2 \ln f(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) + k. \quad (2.9)$$

Verificou-se em [12] que a ordem do modelo obtida por meio da minimização de (2.9) tende a ser superestimada porque uma redução no primeiro termo tende a ser pouco compensada pelo aumento no segundo termo. Em outras palavras, o segundo termo em (2.9) penaliza a sobrestimação, mas não o faz a contento. Mais genericamente, o termo de penalização (ou termo de correção) é então responsável por tornar não polarizada a estimativa da distância média de KL entre a densidade real do modelo, $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, e a densidade estimada $\hat{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$.

Como visto na Seção 2.1.1, a densidade $\hat{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ pode ser determinada a partir da estimativa de máxima verossimilhança $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ do vetor de parâmetros desconhecidos, ou seja, $\hat{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = f(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$. Para o caso específico da estimação da ordem do modelo aplicada à estimação do número de fontes, $\hat{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, ou $\ln \hat{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, é uma função dos autovalores $\{\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m\}$ da matriz de covariância do sinal recebido.

Admitindo ruído Gaussiano, sinais fonte com distribuição Gaussiana e matriz de canal com posto máximo (*full rank*), tal função de log-verossimilhança terá a forma [2]

$$\ln f(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = n \ln \frac{\prod_{i=k+1}^m \lambda_i}{\left(\frac{1}{m-k} \sum_{i=k+1}^m \lambda_i \right)^{m-k}}. \quad (2.10)$$

Pode-se verificar [2] que o vetor $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ terá $k+1+2mk$ parâmetros, dos quais $k(2m-k)+1$ são parâmetros livres para escolha. Portanto, de acordo com (2.9), o número de fontes estimado será o valor de k que minimiza

$$-2n \ln \frac{\prod_{i=k+1}^m \lambda_i}{\left(\frac{1}{m-k} \sum_{i=k+1}^m \lambda_i \right)^{m-k}} + \text{ termo de correção}. \quad (2.11)$$

A seguir verifica-se que os critérios AIC, BIC e MDL tem uma forma muito similar àquela representada pela expressão (2.11). Basicamente o que difere tais critérios é a forma como cada um penaliza a sobrestimação da ordem do modelo, o que é determinado pelo termo de correção, que será uma função do número de parâmetros livres $k(2m-k)+1$.

2.2 Critério de informação de Akaike (AIC)

O método de estimação de ordem do modelo por meio do critério de informação de Akaike (AIC, *Akaike information criterion*) foi proposto por Akaike em 1973 [12][13]. Derivado dos conceitos de minimização da informação de Kullback-Leibler, o método AIC consiste em selecionar a ordem do modelo que minimiza [2]

$$-2 \ln f(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) + 2\kappa. \quad (2.12)$$

O primeiro termo do estimador AIC corresponde ao primeiro termo de (2.9) e o termo de correção κ corresponde ao número de parâmetros livres em $\boldsymbol{\theta}$. Substituindo em (2.12) a função de log-verossimilhança de (2.10) e o número de parâmetros livres $k(2m-k)+1$ de $\boldsymbol{\theta}$ para o problema de estimação do número de fontes, o critério de informação de Akaike passa a ser escrito como

$$\text{AIC}(k) = -2n \ln \frac{\prod_{i=k+1}^m \lambda_i}{\left(\frac{1}{m-k} \sum_{i=k+1}^m \lambda_i \right)^{m-k}} + 2[k(2m-k)]. \quad (2.13)$$

O número de fontes estimado, \hat{p} , será o valor de k que minimiza $\text{AIC}(k)$, para $k = 0, 1, \dots, m-1$.

Todos os gráficos de desempenho P_c e P_{se} , os quais representam as probabilidades de detecção correta e de sobrestimação do número de fontes, respectivamente, apresentados deste ponto em diante foram obtidos por meio de um mínimo de 3000 eventos de Monte Carlo utilizando o software Matlab[®]. O código fonte desenvolvido está reproduzido no Apêndice.

O desempenho do estimador AIC é mostrado na Figura 2.1, considerando SNR variável, potência de transmissão unitária, número de fontes $p = 5$ e $p = 15$, $n = 500$ amostras por sensor e $m = 30$ sensores. Note que, como esperado, o aumento da SNR eleva a probabilidade de detecção correta. No entanto, verifica-se que é necessária uma SNR maior caso se deseje alta probabilidade de detecção correta para um número maior de fontes. Tais comportamentos não são particulares do AIC, ressalta-se. Observe também na Figura 2.1 que, mesmo para altos valores de SNR, o estimador AIC não atinge $P_c = 1$, o que é uma característica intrínseca a este estimador (como mostrado mais adiante, esse comportamento é causado porque o estimador AIC não é *consistente*, apresentando sempre uma probabilidade não nula de sobrestimação). Note também que, para altos valores de SNR, a probabilidade de sobrestimação $P_{se} \rightarrow (1 - P_c)$, o que significa que, quando o estimador comete um erro, comete-o estimando um número de fontes maior que o real (p). Isto não ocorre para valores mais baixos de SNR, ou seja, embora haja erros de sobrestimação nesta

situação, a maior parte deles é de subestimação: note na Figura 2.1 que em regimes de baixa SNR tem-se $(1 - P_c) \gg P_{se}$.

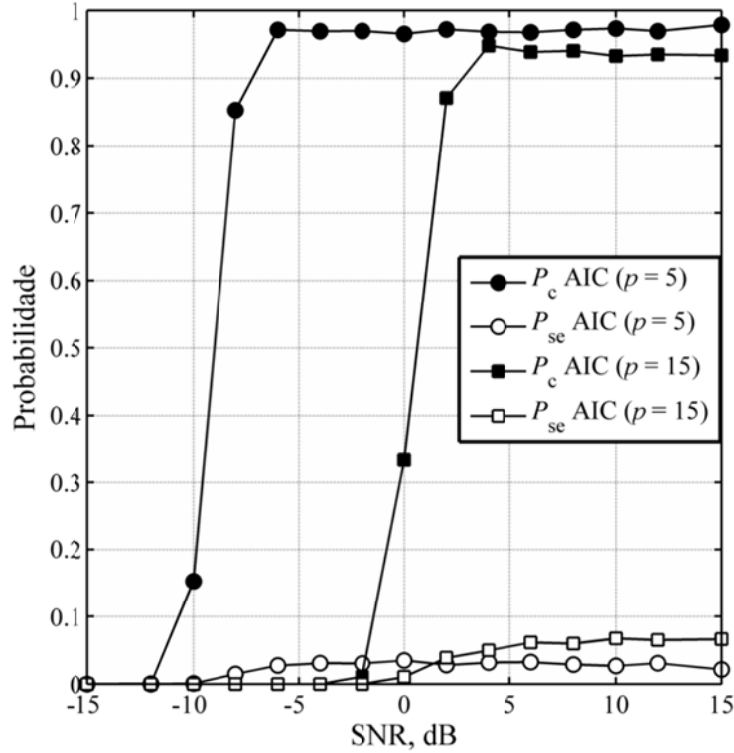


Figura 2.1: Desempenho do estimador AIC para SNR variável.

A Figura 2.2 mostra o desempenho do estimador AIC para o número de fontes variável, potência de transmissão unitária, SNR = 0 dB e -5 dB, $n = 1000$ amostras por sensor e $m = 30$ sensores. Note que, para uma SNR fixa, a probabilidade de detecção correta decresce com o aumento do número de fontes. Note também que o máximo número de fontes estimado com alta probabilidade de detecção correta decresce à medida que a SNR é reduzida. Observe novamente que P_c não atinge o valor 1 devido à probabilidade não nula de sobrestimação produzida pelo estimador AIC.

A Figura 2.3 mostra o desempenho do estimador AIC para o número de amostras variável, potência de transmissão unitária, SNR = -2 dB e -4 dB, número de fontes $p = 10$ e $m = 30$ sensores. Por meio desta figura é possível notar que, de fato, o estimador AIC é *inconsistente*, ou seja, o valor estimado não converge para o valor real do parâmetro estimado (p) à medida que se aumenta o número de amostras

colhidas (n). Observe também que valores mais baixos de SNR pressupõem maior número de amostras para que se atinja uma determinada probabilidade de detecção correta. Esta não é, contudo, uma característica particular do estimador AIC.

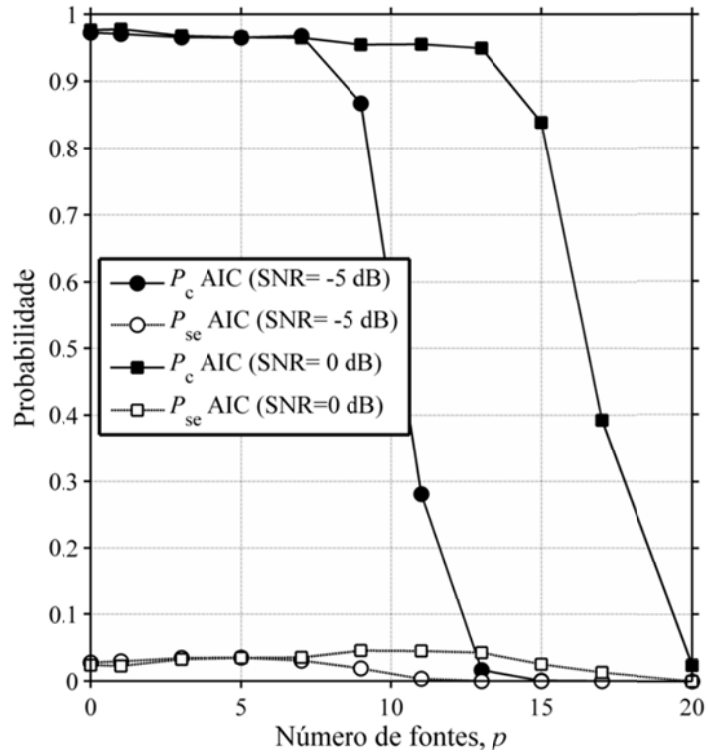


Figura 2.2: Desempenho do estimador AIC para p variável.

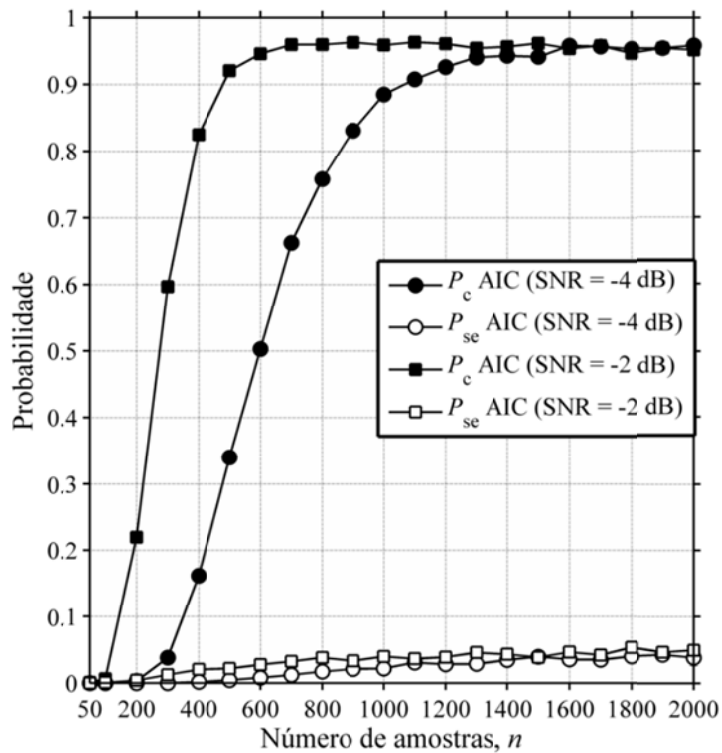


Figura 2.3: Desempenho do estimador AIC para n variável.

A Figura 2.4 mostra o desempenho do estimador AIC para o número de sensores variável, potência de transmissão unitária, SNR = -5 dB, $n = 1000$ amostras por sensor e número de fontes $p = 8$ e $p = 10$. Observe que, para um número de fontes menor o AIC precisa de uma menor quantidade de sensores para se atingir uma determinada probabilidade de detecção correta. Como mencionado anteriormente, devido a sua inconsistência, o AIC não atinge $P_c = 1$. Note também que

$P_{se} \rightarrow (1 - P_c)$ a medida que o número de sensores m cresce.

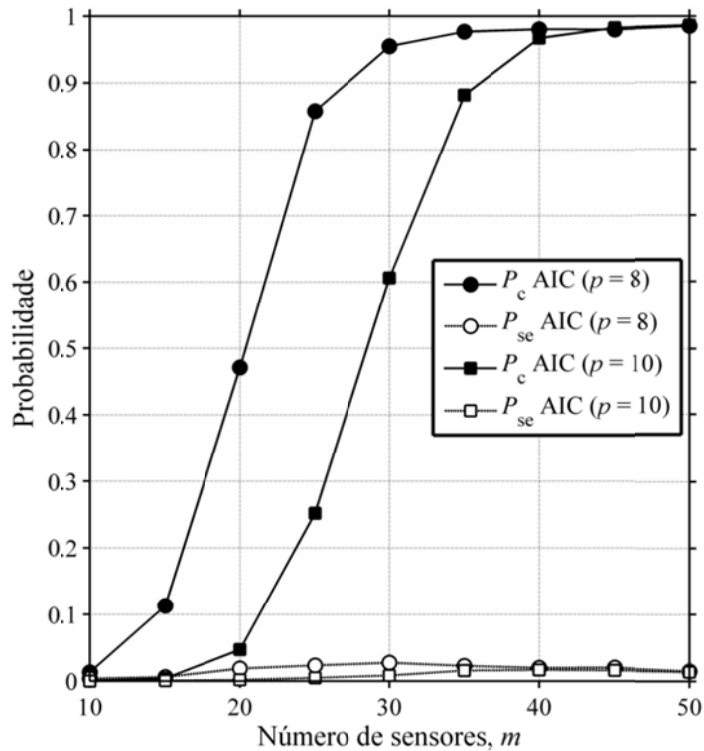


Figura 2.4: Desempenho do estimador AIC para m variável.

2.3 Critério de informação Bayesiano (BIC)

O critério de informação Bayesiano (BIC, *Bayesian information criterion*), também conhecido como critério de Schwarz, foi proposto por Schwarz em 1978 [15].

Tanto o AIC quanto o BIC se baseiam na minimização da informação de KL. No entanto, diferentemente do AIC, em uma das formas de desenvolvimento matemático do BIC utiliza-se a FDP *a priori* do parâmetro a ser estimado, $f(\boldsymbol{\theta})$, de forma análoga ao que acontece no critério MAP com as probabilidades *a priori* das hipóteses. O uso de $f(\boldsymbol{\theta})$ se faz necessário devido à adoção de uma aproximação ligeiramente diferente daquela adotada no AIC na aproximação da FDP desconhecida do modelo em torno do vetor de parâmetros estimados.

Assim como no MAP, o teorema de Bayes é invocado no desenvolvimento matemático do BIC de forma a relacionar devidamente as probabilidades *a priori* e *a posteriori*. Essa é a razão da associação do nome “Bayesiano” ao BIC.

Contrastando com o estimador AIC, o estimador BIC é *consistente*, ou seja, a probabilidade de detecção correta tende a 1 com o aumento no número de amostras. Matematicamente, $P_c \rightarrow 1$ se $n \rightarrow \infty$. Portanto, assim como o MAP, o estimador BIC é considerado ótimo para o problema de seleção de ordem do modelo.

O método BIC consiste em selecionar a ordem do modelo que minimiza [18]

$$-2 \ln f(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) + \kappa \ln n. \quad (2.14)$$

Note que o primeiro termo do estimador BIC também corresponde ao primeiro termo de (2.9) e o termo de correção que corresponde ao número de parâmetros livres em $\boldsymbol{\theta}$ tem um fator $\ln n$ extra. Substituindo em (2.14) a função de log-verossimilhança de (2.10) e o número de parâmetros livres $k(2m-k)+1$ de $\boldsymbol{\theta}$ para o problema de estimação no número de fontes, o critério de informação Bayesiano passa a ser escrito como

$$\text{BIC}(k) = -2n \ln \frac{\prod_{i=k+1}^m \lambda_i}{\left(\frac{1}{m-k} \sum_{i=k+1}^m \lambda_i \right)^{m-k}} + k(2m-k) \ln n. \quad (2.15)$$

O número de fontes estimado, \hat{p} , será o valor de k que minimiza $\text{BIC}(k)$, para $k = 0, 1, \dots, m-1$.

O desempenho do estimador BIC é mostrado na Figura 2.5, considerando SNR variável, potência de transmissão unitária, $p = 5$ e $p = 15$, $n = 1000$ e $m = 30$. Observe novamente que o aumento da SNR traduz-se em aumento da probabilidade de detecção correta e que é necessária uma SNR maior caso se deseje alta probabilidade de detecção correta para um número maior de fontes. Em contraste com o estimador AIC, observe na Figura 2.4 que o estimador BIC atinge $P_c = 1$, o que ocorre porque o estimador BIC é *consistente*. Note também que a probabilidade de sobrestimação é sempre nula, ou seja, quando o estimador BIC comete um erro comete-o sempre estimando um número de fontes menor que p .

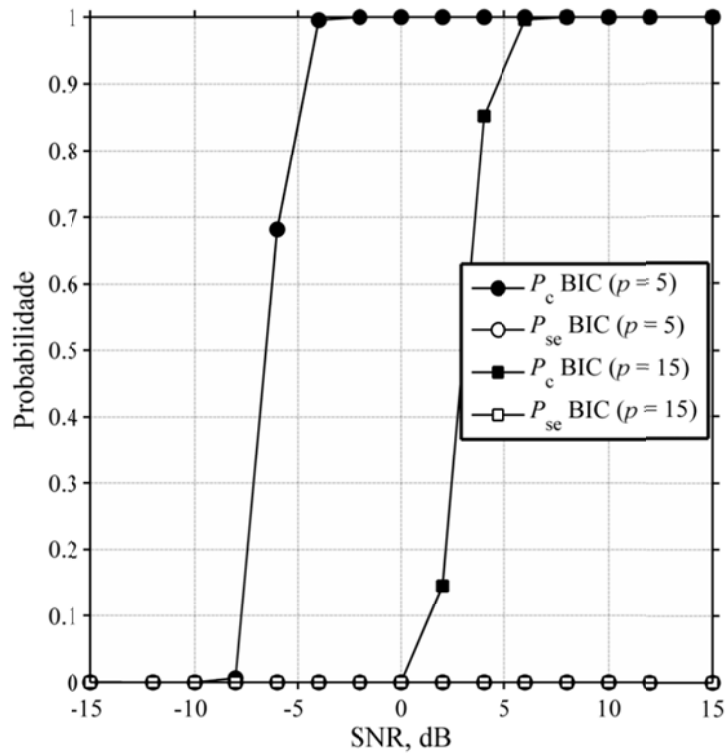


Figura 2.5: Desempenho do estimador BIC para SNR variável.

A Figura 2.6 mostra o desempenho do estimador BIC para o número de fontes variável, potência de transmissão unitária, SNR = 0 dB e -5 dB, $n = 1000$ e $m = 30$. Assim como no caso do AIC, a probabilidade de detecção correta decresce com o aumento do número de fontes e o máximo número de fontes estimado com alta probabilidade de detecção correta decresce à medida que a SNR é reduzida. Observe novamente que P_c pode atingir o valor 1 e que $P_{se} = 0$ em qualquer situação.

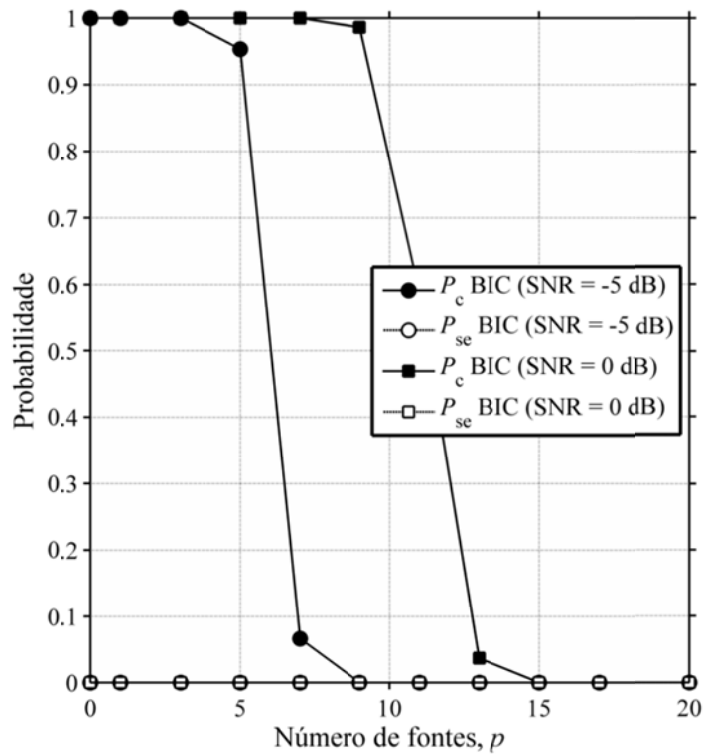


Figura 2.6: Desempenho do estimador BIC para p variável.

A Figura 2.7 mostra o desempenho do estimador BIC para o número de amostras variável, potência de transmissão unitária, SNR = 0 dB e 2 dB, $p = 10$ e $m = 30$. Por meio desta figura é possível notar que, de fato, o estimador BIC é *consistente*, ou seja, a probabilidade de detecção correta converge para 1 à medida que se aumenta o número de amostras. Observe também que, assim como no caso do AIC, valores mais baixos de SNR pressupõem maior número de amostras para que se atinja uma determinada probabilidade de detecção correta com o BIC.

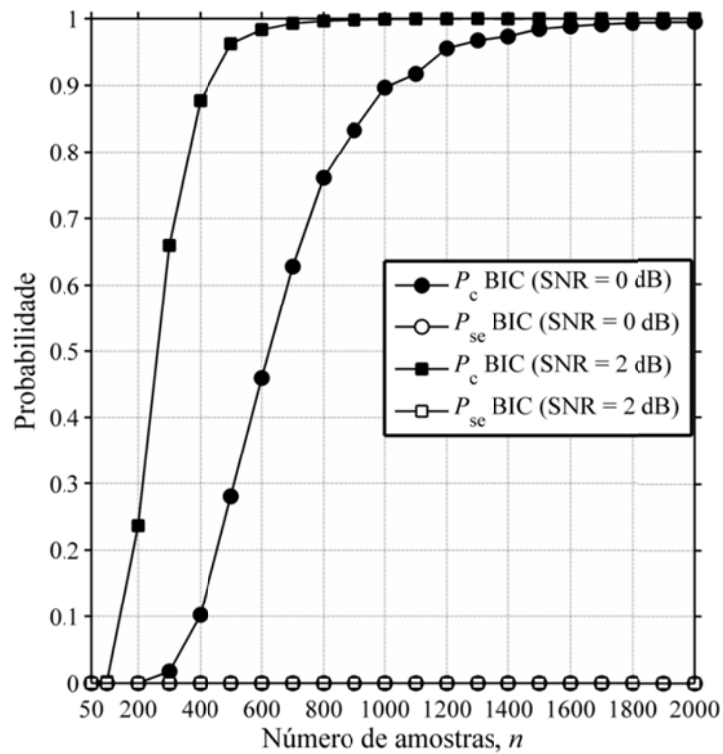


Figura 2.7: Desempenho do estimador BIC para n variável.

A Figura 2.8 mostra o desempenho do estimador BIC para o número de sensores variável, potência de transmissão unitária, SNR = 0 dB, $n = 1000$ amostras por sensor, e número de fontes $p = 8$ e $p = 10$. Por meio desta figura é possível notar que à medida que m cresce $P_c \rightarrow 1$, confirmando mais uma vez a consistência deste estimador. Para as mesmas condições da simulação, nota-se que um número de fontes maior ($p = 10$) alcança o mesmo desempenho do que quando se utiliza o número de fontes menor ($p = 8$), aumentando apenas o número de sensores utilizados. Ainda é possível observar que a P_{se} se mantém nula para toda a variação de m permitindo verificar que quando o estimador comete erros, é computado um número de fontes menor que o valor real de p .

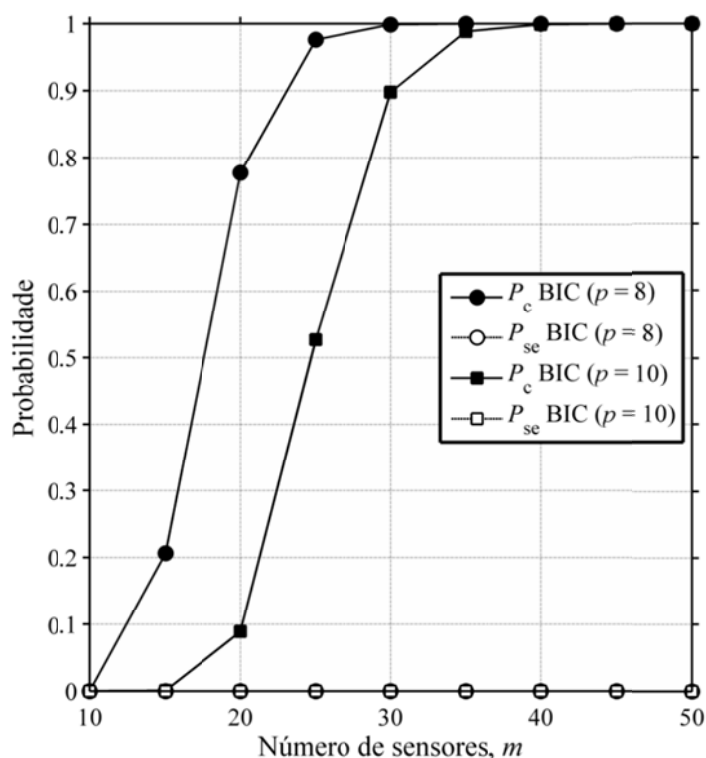


Figura 2.8: Desempenho do estimador BIC para m variável.

2.4 Método de comprimento de mínima descrição (MDL)

O método do comprimento de mínima descrição (MDL, *minimum description length*) foi desenvolvido de forma independente por Schwarz [15] e Rissanen [14] em 1978. O desenvolvimento do método MDL também utiliza conceitos relacionados à teoria da informação. Particularmente, Schwarz adotou uma abordagem Bayesiana, similar àquela utilizada no desenvolvimento do BIC. Rissanen, no entanto, se baseou em aspectos de compressão de informação. Resumidamente, Rissanen notou que cada modelo em julgamento pode ser interpretado como uma forma de codificação de fonte (compressão) dos dados observados. O modelo selecionado é então aquele que mais comprime tais dados, ou seja, é aquele que minimiza o comprimento médio do código. O nome *minimum description length* advém dessa observação.

Embora derivado a partir de diferentes abordagens, o estimador MDL obtido por Schwarz e por Rissanen mostrou-se ser o mesmo. Mais que isso, em alguns casos o estimador MDL é equivalente ao BIC. Essa equivalência é válida somente se, no

desenvolvimento de ambos os estimadores, considera-se que o número de parâmetros estimados é fixo. Caso seja variável ou crescente à medida que o número de amostras aumenta, os modelos para os estimadores BIC e MDL se tornam distintos, podendo estimar ordens de modelo bastante distintas [19].

No presente contexto os critérios para equivalência entre MDL e BIC são satisfeitos e, portanto, o estimador MDL tem a mesma expressão e o mesmo desempenho do BIC. Então, conforme (2.15),

$$\text{MDL}(k) = -2n \ln \frac{\prod_{i=k+1}^m \lambda_i}{\left(\frac{1}{m-k} \sum_{i=k+1}^m \lambda_i \right)^{m-k}} + k(2m-k) \ln n. \quad (2.16)$$

Assim, o número de fontes estimado, \hat{p} , será o valor de k que minimiza $\text{MDL}(k)$, para $k = 0, 1, \dots, m-1$.

2.5 Método baseado na teoria de matrizes aleatórias (RMT)

Nesta seção são apresentados alguns fundamentos sobre a teoria de matrizes aleatórias de forma que o leitor possa conseguir entender a origem do método fundamentado em RMT.

2.5.1 Alguns resultados da teoria de matrizes aleatórias

Suponha que se deseja decidir entre as hipóteses \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 , as quais correspondem à ausência de sinal recebido e à presença de um único sinal com variância conhecida θ , respectivamente. Tais hipóteses podem ser assim descritas:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 : \mathbf{R} &= \sigma^2 \mathbf{I} \\ \mathcal{H}_1 : \mathbf{R} &= \mathbf{H} \mathbf{R}_s \mathbf{H}^\dagger + \sigma^2 \mathbf{I} = \text{diag}(\theta, 0, \dots, 0) + \sigma^2 \mathbf{I}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

em que $\text{diag}(\theta, 0, \dots, 0)$ é a matriz diagonal cujos elementos não nulos são os valores $(\theta, 0, \dots, 0)$.

Admitindo que a variância de ruído seja conhecida a priori, para qualquer valor de m e n , para as duas hipóteses há somente duas densidades de probabilidade para os autovalores de \mathbf{R} . Neste caso o procedimento ótimo para se distinguir entre as duas hipóteses é a razão entre as correspondentes funções de verossimilhança, teste também conhecido como teste de razão de verossimilhança (*likelihood ratio test*) ou teste de Neyman-Pearson. O desenvolvimento matemático do teste de Neyman-Pearson produz o importante resultado que afirma: para $n \rightarrow \infty$, com m fixo, a distinção entre \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 em (2.17) deve ser baseada somente na observação do máximo autovalor da matriz de covariância do sinal recebido, que é justamente o que se propõe no conhecido teste de Roy de máxima raiz (RLRT, *Roy's largest root test*) [3].

Desenvolvimento similar ao teste de Neyman-Pearson pode ser aplicado ao teste que permite distinguir entre as hipóteses

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &: k - 1 \text{ sinais presentes,} \\ \mathcal{H}_1 &: k \text{ sinais presentes.} \end{aligned} \tag{2.18}$$

Novamente admitindo conhecimento *a priori* da variância de ruído e da intensidade dos sinais, o resultado do desenvolvimento matemático do teste de Neyman-Pearson permite afirmar que, assintoticamente, a distinção entre \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 em (2.18) deve ser baseada somente na observação do k -ésimo autovalor da matriz de covariância do sinal recebido [3]. Considera-se implicitamente que os autovalores de \mathbf{R} estão ordenados de forma decrescente, ou seja, $\{\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m\}$.

Em ambos os testes de hipóteses anteriormente descritos, a “observação” de um autovalor corresponde a um teste de significância em que cada autovalor é comparado com um limiar, o qual deve ser calculado em função do nível de confiança esperado sobre o resultado do teste. Resultados da teoria de matrizes aleatórias também trazem úteis informações sobre a determinação desse limiar, como descrito a seguir.

Seja $\hat{\mathbf{R}}$ a estimativa da matriz de covariância do sinal recebido, cf.[2], mas considerando apenas a presença do ruído. No limite conjunto $m, n \rightarrow \infty$, com $n/m \rightarrow c \geq 0$, a distribuição do máximo autovalor da matriz aleatória $\hat{\mathbf{R}}$ converge para a distribuição de Tracy-Widom, dada por

$$\Pr \left\{ \frac{\lambda_1 / \sigma^2 - \mu_{n,m}}{\xi_{n,m}} > s \right\} \rightarrow F_\beta(s), \quad (2.19)$$

em que $\mu_{n,m}$ e $\xi_{n,m}$ são, respectivamente, os parâmetros de centralização e de escala da distribuição de Tracy-Widom $F_\beta(s)$ e β indica se as amostras de ruído são reais ($\beta = 1$) ou complexas ($\beta = 2$).

Para o caso do teste de Roy de máxima raiz, a hipótese \mathcal{H}_0 é rejeitada se [3]

$$\lambda_1 > \sigma^2 [\mu_{n,m} + s(\alpha)\xi_{n,m}], \quad (2.20)$$

em que α é a chamada probabilidade de falso alarme assintótica, que é o nível de confiança esperado sobre o resultado do teste de hipóteses. Ainda com relação a (2.20), $s(\alpha)$ é tal que

$$F_\beta [s(\alpha)] = 1 - \alpha. \quad (2.21)$$

Como não há expressão fechada para a distribuição de Tracy-Widom, $s(\alpha)$ pode ser calculada invertendo-se numericamente $F_\beta(s)$, ou seja,

$$s(\alpha) = F_\beta^{-1}(1 - \alpha). \quad (2.22)$$

Para facilitar tal inversão numérica, os autores de [3] elaboraram um conjunto de rotinas em MATLAB, as quais estão disponíveis para *download* em [20].

Vale ressaltar que, embora os resultados apresentados nesta subseção sejam fruto de uma análise de comportamento assintótico ($m, n \rightarrow \infty$, com $n/m \rightarrow c \geq 0$) da distribuição dos autovalores da matriz de covariância do sinal recebido, tem-se boa aproximação destes resultados com aqueles obtidos com valores finitos de m e n , desde que $\min(m, n) \gg 1$ e desde que a razão m/n ou n/m não seja elevada [3].

Na próxima subseção, os resultados aqui sumarizados serão aplicados ao método RMT proposto em [3], de forma que o mesmo possa ser comparado com o algoritmo proposto neste artigo, o qual é detalhado na seção seguinte.

2.5.2 O método RMT

O algoritmo proposto em [3] é baseado em uma sequência de testes de hipóteses [21][22][23]. Em cada passo, testa-se a significância do k -ésimo autovalor da matriz de covariância do sinal recebido por m sensores. No algoritmo RMT, para $k = 1, 2, \dots, \min(m, n) - 1$, faz-se o teste de significância

$$\lambda_k > \hat{\sigma}^2(k)C_{n,m,k}(\alpha), \quad (2.23)$$

em que $\hat{\sigma}^2(k)$ é a estimativa da variância de ruído a cada passo e $C_{n,m,k}(\alpha)$ é o parâmetro que depende do nível de confiança $\alpha \ll 1$ determinado pelo usuário, ou seja,

$$C_{n,m,k}(\alpha) = \mu_{n,m-k} + s(\alpha)\xi_{n,m-k}, \quad (2.24)$$

com $s(\alpha)$ sendo determinado por meio da expressão (2.22).

Uma interpretação para α à luz do teste de hipóteses em (2.18) é: se somente $k - 1$ sinais estão presentes e o k -ésimo autovalor é devido ao ruído, então

$$\Pr \{ \text{rejeitar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0 \} = \Pr \{ \lambda_k > \sigma^2 C_{n,m,k}(\alpha) \mid \mathcal{H}_0 \} \approx \alpha. \quad (2.25)$$

Então, no contexto de estimação do número de fontes pelo método RMT, α corresponde ao valor aproximado da probabilidade de sobrestimação assintótica ($n \rightarrow \infty$).

O número de fontes estimado pelo método RMT é então:

$$\hat{p} = \arg \min_k \{ \lambda_k < \hat{\sigma}^2(k) C_{n,m,k}(\alpha) \} - 1. \quad (2.26)$$

Pelo exposto percebe-se que o método RMT sugerido em [3] é relativamente simples, mas para que o limiar de decisão seja computado, este necessita da estimativa da variância do ruído, $\hat{\sigma}^2(k)$. Por esta razão, em [3], além do algoritmo supracitado, sugere-se também um método para a estimação de $\hat{\sigma}^2(k)$.

Para ilustrar a operação do método RMT, a Figura 2.9 ilustra a distribuição de três grupos de autovalores da matriz $\hat{\mathbf{R}}$ definida em [3], ordenados e normalizados em relação a seus valores máximos (λ_1), em função de seus índices (i) e considerando $m = 30$ sensores, número de fontes $p = 0, p = 5$ e $p = 15$, SNR = -5 dB e $n = 1 \times 10^4$ amostras por sensor. Também estão apresentados na Figura 2.9 os limiares de decisão do algoritmo RMT, também normalizados em relação a λ_1 , admitindo-se conhecimento perfeito da variância de ruído. Nas situações mostradas na Figura 2.9 percebe-se nitidamente que o algoritmo RMT produziria estimativas corretas do número de fontes, pois o número de autovalores acima de cada um dos limiares é igual ao correspondente valor de p . Os parâmetros $\mathbf{\Lambda}$ mostrados na Figura 2.9 serão descritos no próximo capítulo.

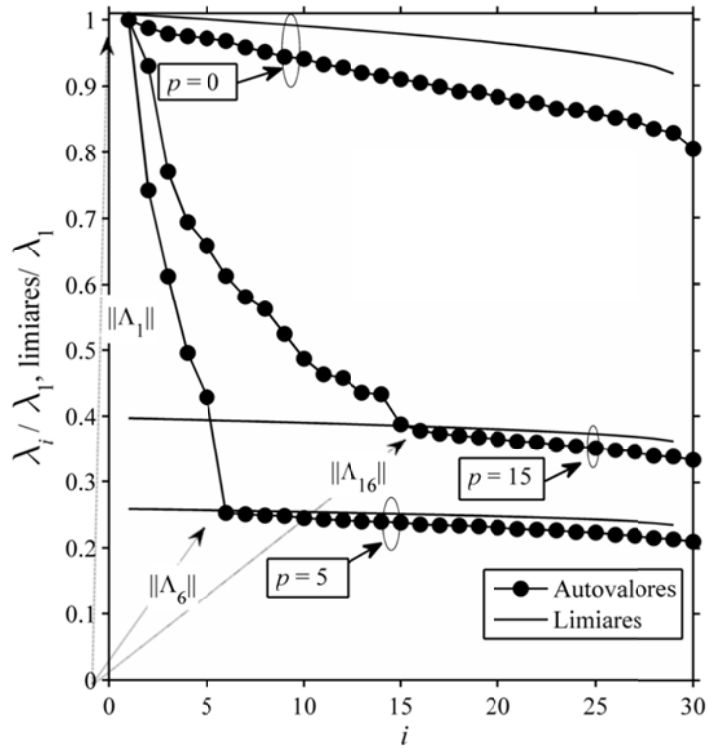


Figura 2.9: Representação gráfica dos autovalores de $\hat{\mathbf{R}}$ e limiares de decisão do algoritmo RMT de [3].

A seguir, serão apresentados e interpretados alguns resultados de simulação de Monte Carlo do algoritmo proposto em [3] denotado por RMT.

Cada resultado aqui registrado contou com a geração aleatória de 5000 matrizes $\mathbf{X} = \mathbf{H}\mathbf{S} + \mathbf{N}$, com $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{m \times p}$, $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{p \times n}$ e $\mathbf{N} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, sendo que cada elemento nas matrizes \mathbf{H} , \mathbf{S} e \mathbf{N} tem distribuição Gaussiana. A distribuição Gaussiana dos elementos de \mathbf{H} simula um canal com desvanecimento Rayleigh plano e lento (constante durante o intervalo de coleta das amostras). A distribuição Gaussiana dos elementos de \mathbf{S} é comumente adotada por representar de forma bastante fiel a distribuição de amplitude de sinais tipicamente encontrados em sistemas de comunicação, por exemplo, sinais multiportadora, tal como o sinal OFDM (*orthogonal frequency division multiplexing*), que é um dos tipos de sinal de transmissão mais adotados nos sistemas de telecomunicações mais modernos, incluindo vários padrões de televisão digital. A distribuição Gaussiana dos elementos de \mathbf{N} é característica intrínseca ao comportamento estatístico do ruído término gerado na entrada dos receptores.

Considerando potência de transmissão unitária, a relação sinal-ruído é definida por

$$\text{SNR} = \frac{\text{tr}[\mathbf{H}^\dagger \mathbf{H}]}{mp\sigma^2}, \quad (2.27)$$

em que $\text{tr}[\mathbf{H}^\dagger \mathbf{H}]$ é o traço da matriz $\mathbf{H}^\dagger \mathbf{H}$. Nos casos em que se considera imprecisão na estimativa de σ^2 , que é a variância de ruído utilizada como informação *a priori* no algoritmo RMT, adicionou-se ao valor correto uma variável aleatória com distribuição uniforme em $[\sigma^2 - 0,05\sigma^2, \sigma^2 + 0,05\sigma^2]$. O parâmetro fixo adicional utilizado na simulação foi $\alpha = 0,01$ (para o método RMT). A plataforma de simulação utilizada foi o Matlab[®].

O desempenho do estimador RMT é mostrado na Figura 2.10 considerando SNR variável, potência de transmissão unitária, número de fontes $p = 5$ e $p = 15$, $n = 1000$ amostras por sensor, $m = 30$ sensores e $\alpha = 0,01$. Observe na figura que para um número de fontes maior é necessário uma SNR mais elevada para uma dada probabilidade de detecção correta. Note também que com o aumento da SNR a P_{se} se mantém não nula, desconsiderando a estimativa imprecisa do ruído. Isso significa que quando $P_c \rightarrow (1 - \alpha)$ a $P_{se} \rightarrow (1 - P_c)$ porém, isto não ocorre para valores baixos de SNR. Para $\text{SNR} < -8$ dB aproximadamente, o estimador computa um número de fontes menor do que o valor real p . Ainda é possível observar que ao considerar a estimativa imprecisa do ruído o desempenho do RMT apresenta uma queda e que à medida que a SNR aumenta a estimativa considerando $p = 15$ se apresenta melhor que $p = 5$.

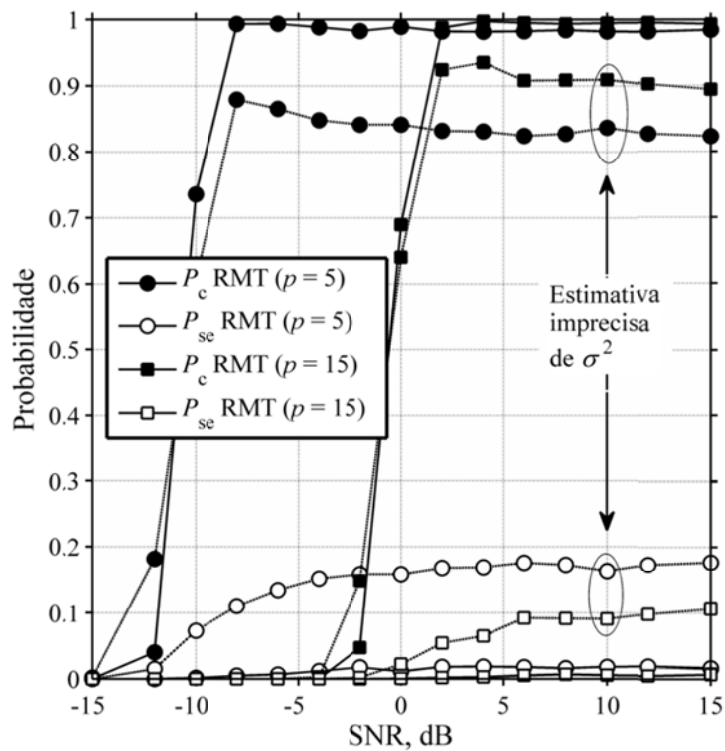


Figura 2.10: Desempenho do estimador RMT para SNR variável.

A Figura 2.11 mostra o desempenho do estimador RMT considerando p variável, potência de transmissão unitária, SNR = -5 dB e SNR = 0 dB, $n = 1000$ amostras por sensor, $m = 30$ sensores e $\alpha = 0,01$. Observe na figura que para SNR = -5 dB, a P_c se mantém satisfatória ($P_c \approx 1$) para número de fontes em torno de $p < 8$ e para SNR = 0 dB, a P_c se mantém satisfatória em torno de $p < 13$ fontes aproximadamente. Note ainda que para $p > 13$ a $P_{se} = 0$ mostrando que o estimador está computando um número de fontes menor que o valor real de (p). Ainda é possível observar que quando se utiliza a estimativa imprecisa do ruído existe uma queda no desempenho do estimador. Neste caso a variância do ruído é uniformemente distribuída em $[\sigma^2 - 0,05\sigma^2, \sigma^2 + 0,05\sigma^2]$.

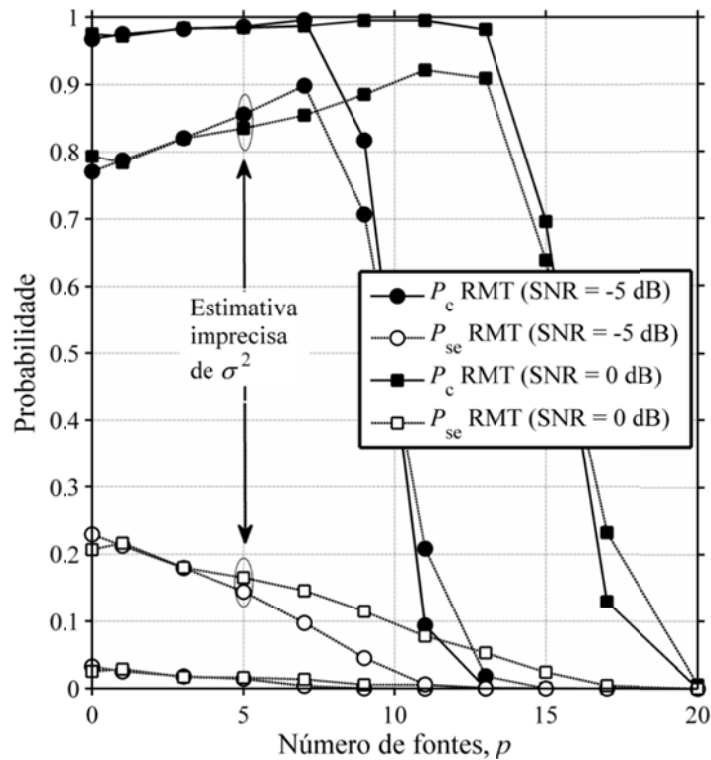


Figura 2.11: Desempenho do estimador RMT para p variável.

A Figura 2.12 mostra o desempenho do estimador RMT considerando n variável, potência de transmissão unitária, SNR = -5 dB e SNR = 0 dB, $p = 5$, $m = 30$ sensores e $\alpha = 0,01$. Observe na figura que à medida que $n \rightarrow \infty$, $P_c \rightarrow (1 - \alpha)$ e $P_{se} \rightarrow 0$, o que confirma a consistência do estimador em regimes assintóticos. Note também que o desempenho do estimador RMT, considerando a estimativa imprecisa do ruído apresenta significativa redução com o aumento de n . Considerando ainda imprecisão na estimativa do ruído, a curva para SNR = -5 dB apresenta um desempenho ligeiramente melhor que para SNR = 0 dB, isto ocorre porque a variância do ruído é maior quando se utiliza uma SNR mais baixa.

A Figura 2.13 mostra o desempenho do estimador RMT considerando m variável, potência de transmissão unitária, SNR = -5 dB e SNR = 0 dB, $p = 7$, $m = 30$ sensores e $\alpha = 0,01$. Observe na figura que à medida que m aumenta $P_c \rightarrow (1 - \alpha)$ e $P_{se} \rightarrow (1 - P_c)$ para ambas as SNRs. Assim como na Figura 2.10, considerando imprecisão na estimativa do ruído, a SNR = -5 dB apresenta um desempenho ligeiramente melhor que para SNR = 0 dB.

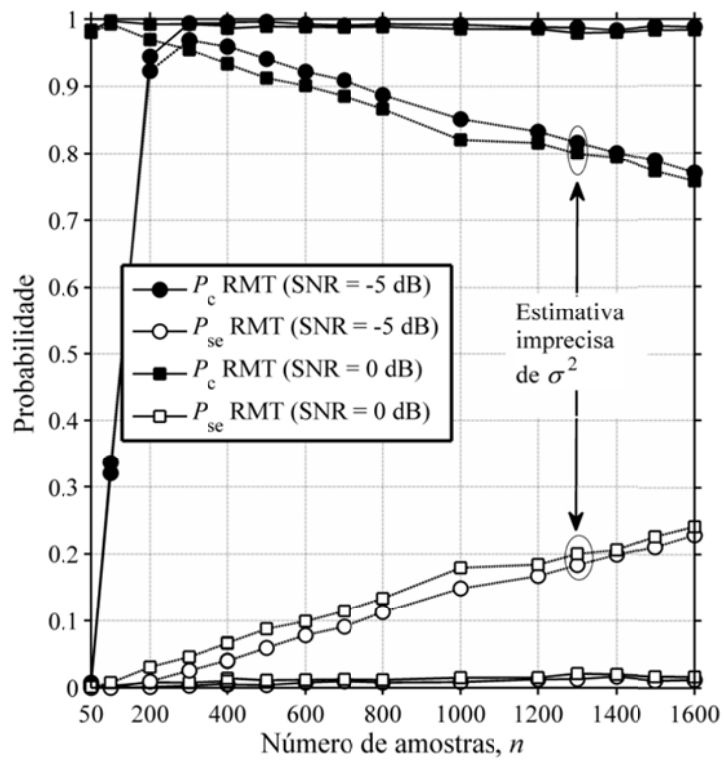


Figura 2.12: Desempenho do estimador RMT para n variável.

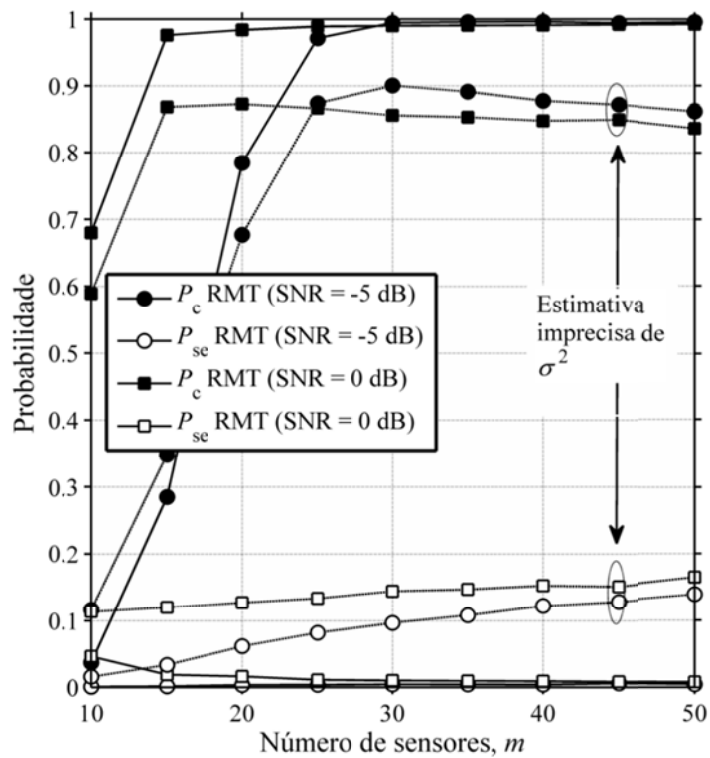


Figura 2.13: Desempenho do estimador RMT para m variável.

Este capítulo apresentou as técnicas de estimação de fontes baseadas na teoria da informação e na teoria de matrizes aleatórias, bem como alguns conceitos teóricos com a finalidade de facilitar o entendimento destas. Também foi apresentado o desempenho de cada estimador em função das probabilidades de estimação correta e de sobrestimação.

É importante ressaltar que o objetivo deste capítulo não foi comparar o desempenho dos métodos de estimação de número de fontes aqui citados e, por esta razão, a apresentação dos gráficos das probabilidades em função da variação da SNR, número de fontes, número de amostras e número de sensores não dispõem dos mesmos parâmetros de entrada, viabilizando desta forma os comentários de cada técnica. A comparação entre os desempenhos dos estimadores é apresentada no Capítulo 4.

No próximo capítulo é proposto um novo estimador também baseado nos autovalores da matriz de covariância do sinal recebido, aqui denominado de método NB (*norm-based*).

Capítulo 3

Algoritmo Baseado em Norma

Este capítulo propõe um novo estimador empírico do número de fontes baseado nas normas dos vetores associados aos autovalores, por esta razão este método é denominado como NB (*Norm-based*)

3.1 Algoritmo proposto

Retornando à Figura 2.9 observa-se que há certa evidência de pontos de inflexão nas curvas dos autovalores justamente na transição entre os primeiros p autovalores e os $m - p$ restantes, exceto no caso de $p = 0$. O método NB se baseia justamente nestes pontos de inflexão: seja $\Lambda_i = [\lambda_i/\lambda_1 \ i]^T$ o vetor associado ao i -ésimo autovalor, correspondente ao i -ésimo ponto circular na Figura 2.9. No caso de $p = 5$ observa-se que a distância Euclidiana entre Λ_6 e a origem, que é igual a $\|\Lambda_6\|$, a norma de Λ_6 , é a menor entre todas. Em uma primeira análise, percebe-se que o índice associado a tal norma poderia ser usado para se determinar o número de fontes. Entretanto, nas situações ilustradas na Figura 2.9 em que $p = 0$ e $p = 15$ verifica-se que haveria erro na estimativa, pois há vetores com menor norma que os vetores Λ_1 e Λ_{16} , respectivamente. Tal problema pode ser parcialmente resolvido com as seguintes medidas heurísticas: i) primeiro, os autovalores e os correspondentes índices são normalizados de forma que se distribuam entre 0 e 1; ii) em seguida, acentua-se a curvatura dos autovalores de forma que no caso de $p = 0$ tenha-se $\|\Lambda_1\|$ como a menor das normas; iii) por fim, são considerados na busca pela menor norma somente $K = \lfloor m/2 \rfloor$ vetores do conjunto $\{\Lambda_i\}$, em que $\lfloor m/2 \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a $m/2$. Esta última medida desloca para a direita o ponto de

inflexão da curva quando p é próximo de zero, reduzindo a chance de vetores de índice elevado terem norma menor que $\|\Lambda_{p+1}\|$.

A Figura 3.1 reapresenta os autovalores da Figura 2.9, normalizados em relação a seus valores máximos (sob o índice i , com $i = 1, 2, \dots, m$), em conjunto com os autovalores normalizados e modificados de acordo com o que está descrito no parágrafo anterior (sob o índice j , com $j = 1, 2, \dots, K$). É agora evidente que os novos vetores Λ_1 , Λ_6 e Λ_{16} tem normas menores que os demais, permitindo que se estime de forma correta o número de fontes por meio de seus índices. Tal evidência pode ser observada por meio dos arcos de circunferência, os quais são os lugares geométricos de pontos equidistantes da origem. Note que no caso de $p = 15$ foram utilizados todos os pontos ($K = m$) na normalização do eixo horizontal. Isto sugere que o método aqui proposto pode produzir estimativas mais precisas para um número de fontes não muito elevado em relação a m . Resultados numéricos apresentados na próxima seção sustentam esta afirmativa, quantificando-a, e mostram que esta não é uma particularidade do método NB.

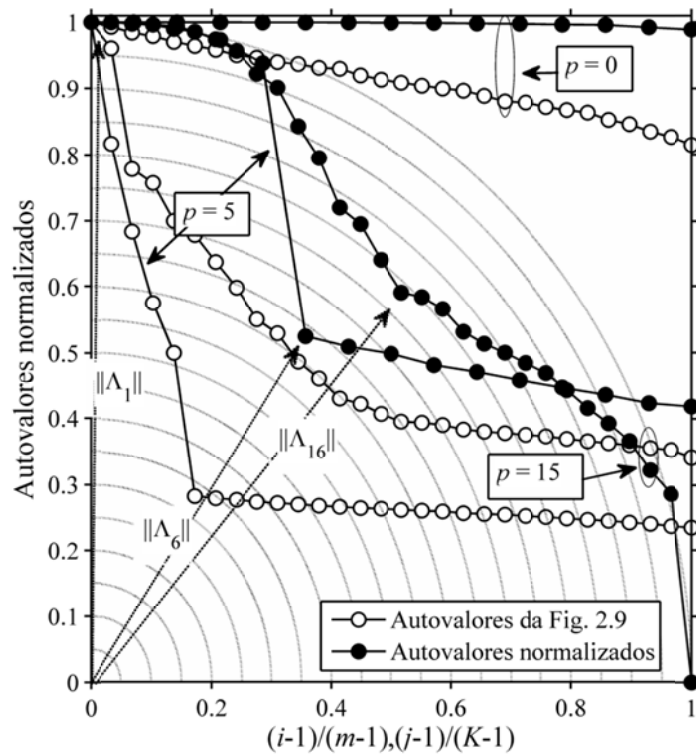


Figura 3.1: Representação gráfica dos autovalores de $\hat{\mathbf{R}}$ da Figura 2.9 e dos autovalores normalizados (sob índice j) segundo o algoritmo NB.

A partir das proposições registradas nesta seção, o algoritmo NB pode ser assim resumido:

Algoritmo 1 - Algoritmo NB

For $i = 1 \dots m$
 $a_i \leftarrow \lambda_i - \min(\boldsymbol{\lambda})$
 $b_i \leftarrow \frac{a_i}{\max(\mathbf{a})}$
 $c_i \leftarrow \sqrt{1 - (1 - b_i)^E}$
End for
 $K = \lfloor m/2 \rfloor$
For $j = 1 \dots K$
 $\boldsymbol{\Lambda}_j \leftarrow \left[c_j \frac{j-1}{K-1} \right]^T$
End for
 $\hat{p} = \arg \min_j \| \boldsymbol{\Lambda}_j \| - 1$

O expoente E no cálculo de $\{c_i\}$ é a variável que permite controlar o arqueamento da curva dos autovalores. A heurística na determinação de seu valor se baseia no exemplo ilustrado na Figura 3.2. Nela $\{b_i\}$ são os autovalores normalizados para a faixa de 0 a 1. Considerando $p = 0$ e $n = 50000$, os autovalores da matriz $\hat{\mathbf{R}}$ definida em [3] tendem a ficar aproximadamente iguais, o que faz com que os valores de $\{b_i\}$ se distribuam aproximadamente sobre uma reta. Expoentes $E > 2$ no cálculo de $\{c_i\}$ fazem, como desejado, que os autovalores normalizados se distribuam acima do arco de raio unitário.

O valor ótimo de E pode ser obtido pelo menos de duas maneiras: i) como aquele que maximiza a probabilidade e estimação correta do número de fontes para um conjunto de parâmetros do sistema; ii) como aquele que maximiza a média da probabilidade de estimação correta para vários conjuntos de parâmetros do sistema. Por ser mais conservadora, a segunda alternativa foi utilizada como referência neste trabalho e é ilustrada por meio da Figura 3.3, a título de exemplo. Nela é mostrada a variação na probabilidade de estimação correta em função do expoente E , para os

conjuntos de parâmetros dados na Tabela 1. Nota-se que o valor de expoente que produz maior média para a probabilidade de estimação correta do número de fontes está por volta de $E = 5$. Este valor foi utilizado para compor os resultados numéricos fornecidos na Seção 3.2.

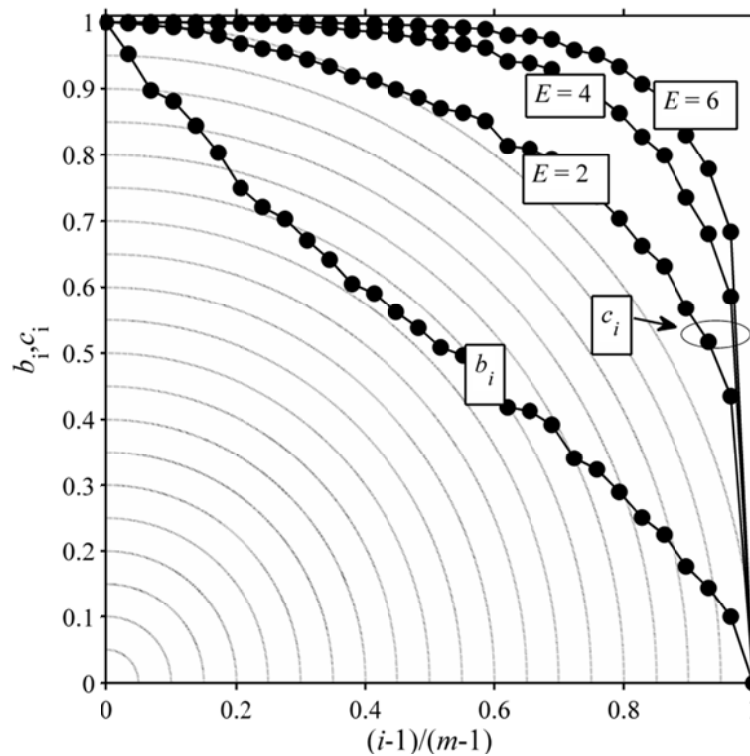


Figura 3.2: Representação gráfica de $\{b_i\}$ e de $\{c_i\}$ para diferentes expoentes E .

Tabela 1: Conjuntos de parâmetros utilizados na composição da Figura 3.3.

Curva	m	n	p	SNR, dB
1	10	50	2	0
2	15	50	5	8
3	15	50	5	10
4	15	100	5	8
5	20	100	5	0
6	50	50	2	10
7	50	1000	10	-5
8	50	1000	15	0

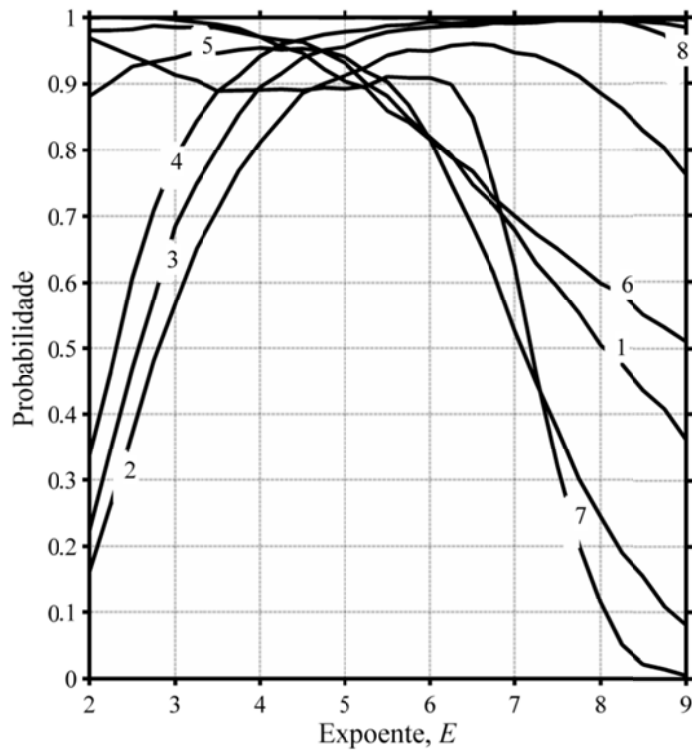


Figura 3.3: *Varição na probabilidade de decisão correta sobre o número de fontes em função do expoente E.*

3.2 Resultados Numéricos

O desempenho do estimador NB é mostrado na Figura 3.4, considerando SNR variável, potência de transmissão unitária, número de fontes $p = 5$ e $p = 10$, $n = 1000$ amostras por sensor, $m = 30$ sensores e $E = 5$. Observe na figura que à medida que a SNR aumenta $P_c \rightarrow 1$ e $P_{se} \rightarrow (1 - P_c)$. Note que para um número de fontes menor ($p = 5$) é possível operar em regimes mais baixos de SNR para que se atinja um desempenho satisfatório ($P_c > 0.9$).

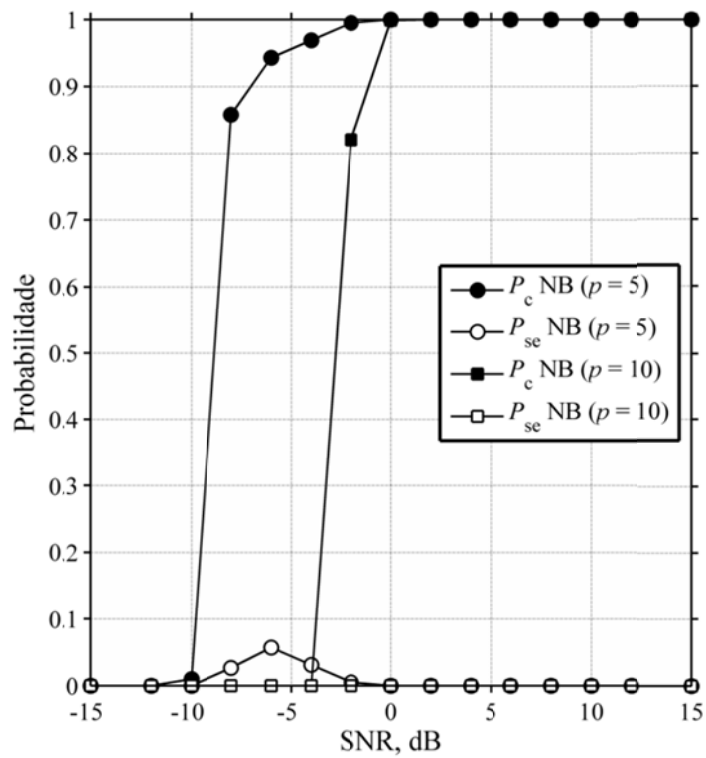


Figura 3.4: Desempenho do estimador NB para SNR variável.

O desempenho do estimador NB é mostrado na Figura 3.5, considerando p variável, potência de transmissão unitária, SNR = -3 dB e SNR = 0 dB, $n = 1000$ amostras por sensor, $m = 30$ sensores e $E = 5$. Observe na figura que, para um número pequeno de fontes e SNR = -3 dB, o estimador NB se mostra inconsistente, porém, sobre mesmo regime de SNR e $3 < p < 10$ fontes, o estimador mostra um comportamento satisfatório, reduzindo seu desempenho para $p > 10$ fontes. Para uma SNR = 0 dB o estimador se mostra consistente em torno de $p < 10$ fontes, o que verifica-se que em regimes de maiores SNR o seu desempenho se apresenta melhor.

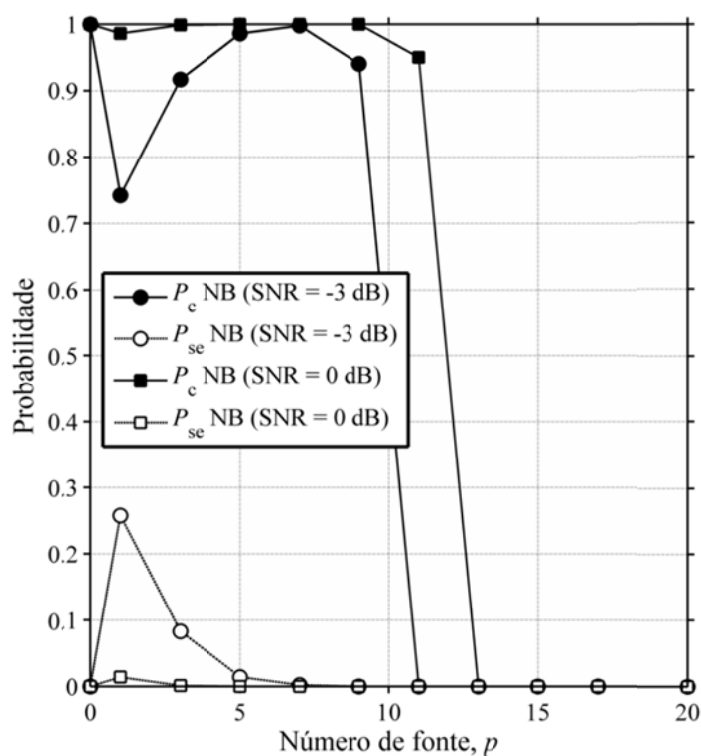


Figura 3.5: Desempenho do estimador NB para p variável.

O desempenho do estimador NB é mostrado na Figura 3.6, considerando n variável, potência de transmissão unitária, SNR = -7 dB e SNR = -5 dB, $p = 5$, $m = 30$ sensores e $E = 5$. Observe na figura que para SNR = -7 dB e SNR = -5 dB à medida que n aumenta $P_c \approx 1$ porém, não converge para um exatamente. Isso pode ser explicado por meio dos resultados obtidos anteriormente, que para regimes baixos de SNR o estimador não apresenta consistência, entretanto, pode-se afirmar que para maiores valores de SNR, $P_c \rightarrow 1$.

O desempenho do estimador NB é mostrado na Figura 3.7, considerando m variável, potência de transmissão unitária, $p = 4$, SNR = -4 dB e SNR = 0 dB, $n = 1000$ e $E = 5$. Por meio desta figura é possível observar que, para regimes de SNR mais baixos, um aumento de m pode reduzir de forma drástica o desempenho do estimador, fato que pode ser corrigido com aumento da SNR, como mostra a Figura 3.4. Note ainda que a medida que m aumenta, $P_{se} \rightarrow (1 - P_c)$.

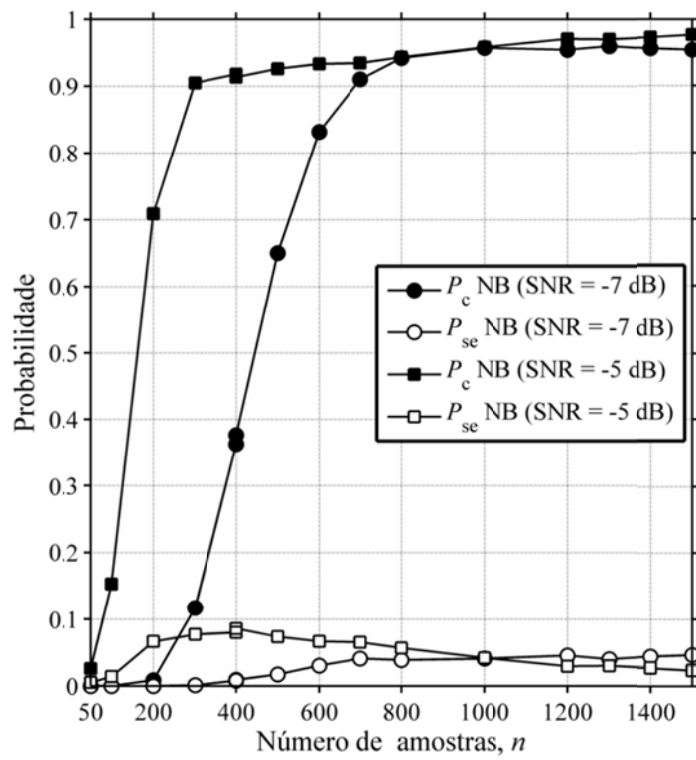


Figura 3.6: Desempenho do estimador NB para n variável.

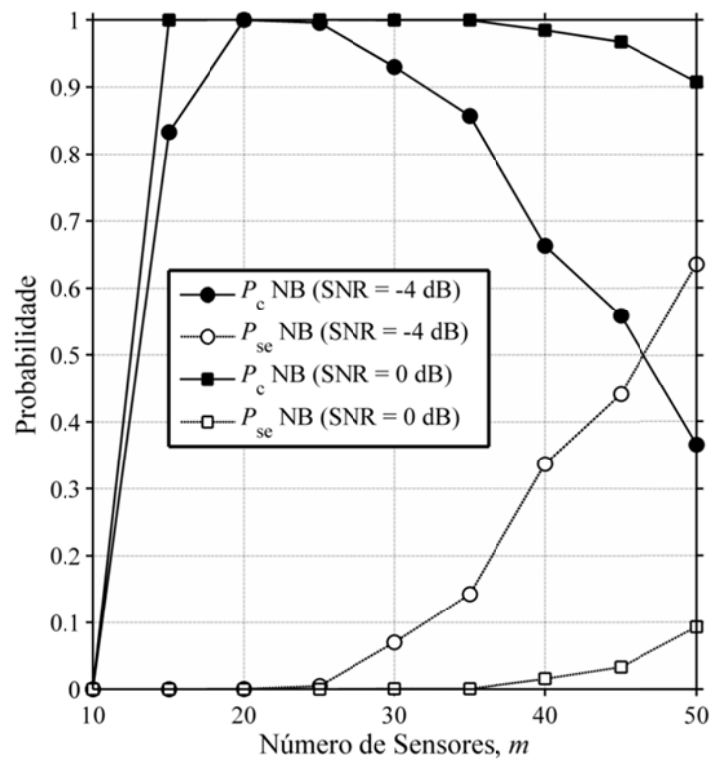


Figura 3.7: Desempenho do estimador NB para m variável.

Neste capítulo foi proposto um novo algoritmo de estimação do número de fontes de sinais incidentes em um arranjo de sensores. O algoritmo é baseado na análise da norma dos vetores associados aos autovalores da matriz de covariância do sinal recebido. Resultados numéricos mostraram o comportamento do estimador NB em termos das probabilidades de detecção correta e sobrestimação, em função da variação da SNR, do número de fontes, do número de amostras e do número de sensores.

A comparação do método aqui proposto com os demais métodos mencionados no Capítulo 2 é realizada no capítulo seguinte, em que os parâmetros de entrada no sistema são iguais para todos os estimadores, possibilitando assim a análise conjunta destes.

Capítulo 4

Resultados Numéricos

4.1 Introdução

O principal objetivo deste trabalho foi investigar o comportamento do estimador proposto, NB em função das probabilidades de detecção correta, P_c , e de sobrestimação, P_{se} , e compará-lo aos métodos já mencionados.

O procedimento realizado para determinar as probabilidades P_c e P_{se} em função de um parâmetro variável pode ser descrito da seguinte forma: escolha o parâmetro que se deseja variar entre m (número de sensores), n (número de amostras), p (número de fontes), SNR (relação sinal ruído em dB), e E (expoente). A quantidade de valores inseridos no vetor parâmetro variante representa a quantidade de pontos do vetor. Após escolher o parâmetro que se deseja variar introduzem-se valores fixos para os demais parâmetros e defina quantos eventos de Monte Carlo (no algoritmo, N_{testes}) se deseja que a simulação seja executada. Alguns parâmetros específicos como α , que representa a probabilidade de falso alarme assintótica, e o $E > 2$, que representa a curvatura dos autovalores normalizados, são utilizados nos métodos RMT e NB, respectivamente.

Em seguida, gera-se \mathbf{X} , \mathbf{H} e \mathbf{V} referentes às matrizes de sinal transmitido, canal e ruído, respectivamente, as quais são construídas de posse dos parâmetros de entrada. Por fim, $\mathbf{Y} = \mathbf{HX} + \mathbf{V}$ é a matriz resultante do sinal recebido, $\hat{\mathbf{R}}$ é a matriz de covariância do sinal recebido obtida pela média amostral, Equação (1.3), e λ_i (com $i = 1 \dots m$) são os autovalores de $\hat{\mathbf{R}}$ computados e ordenados de forma decrescente. Os algoritmos AIC e MDL estimam o número de fontes \hat{p} de forma a encontrar qual o valor de k , para $k = 0, 1, \dots, m - 1$ que os minimizam. No algoritmo RMT foram consideradas duas situações com relação à variância do ruído: i) variância do ruído conhecida e ii) variância do ruído uniformemente distribuída em $[\sigma^2 - 0,05\sigma^2, \sigma^2 + 0,05\sigma^2]$. Em ambos os casos é necessário o cálculo do limiar, como mencionado na Seção 2.5. Os autovalores acima desse limiar resultam no número de fontes estimado. Já no caso do algoritmo NB, os autovalores acima do autovalor com menor norma representam o número de fontes estimado. Cada técnica utilizada compara o valor de \hat{p} estimado com o valor de p pré-definido atualizando os contadores. Esse processo se repete de 1 a N_{testes} , de modo a realizar o número de iterações de Monte Carlo definido anteriormente. As probabilidades P_c e P_{se} são calculadas por meio da frequência relativa dos \hat{p} estimados corretamente e sobrestimados. Por fim, são plotados os gráficos do desempenho dos estimadores em função de um dos parâmetros variáveis escolhidos. A Figura 4.1 representa o fluxograma da simulação com as etapas que aqui foram descritas, realizadas no software Matlab[®].

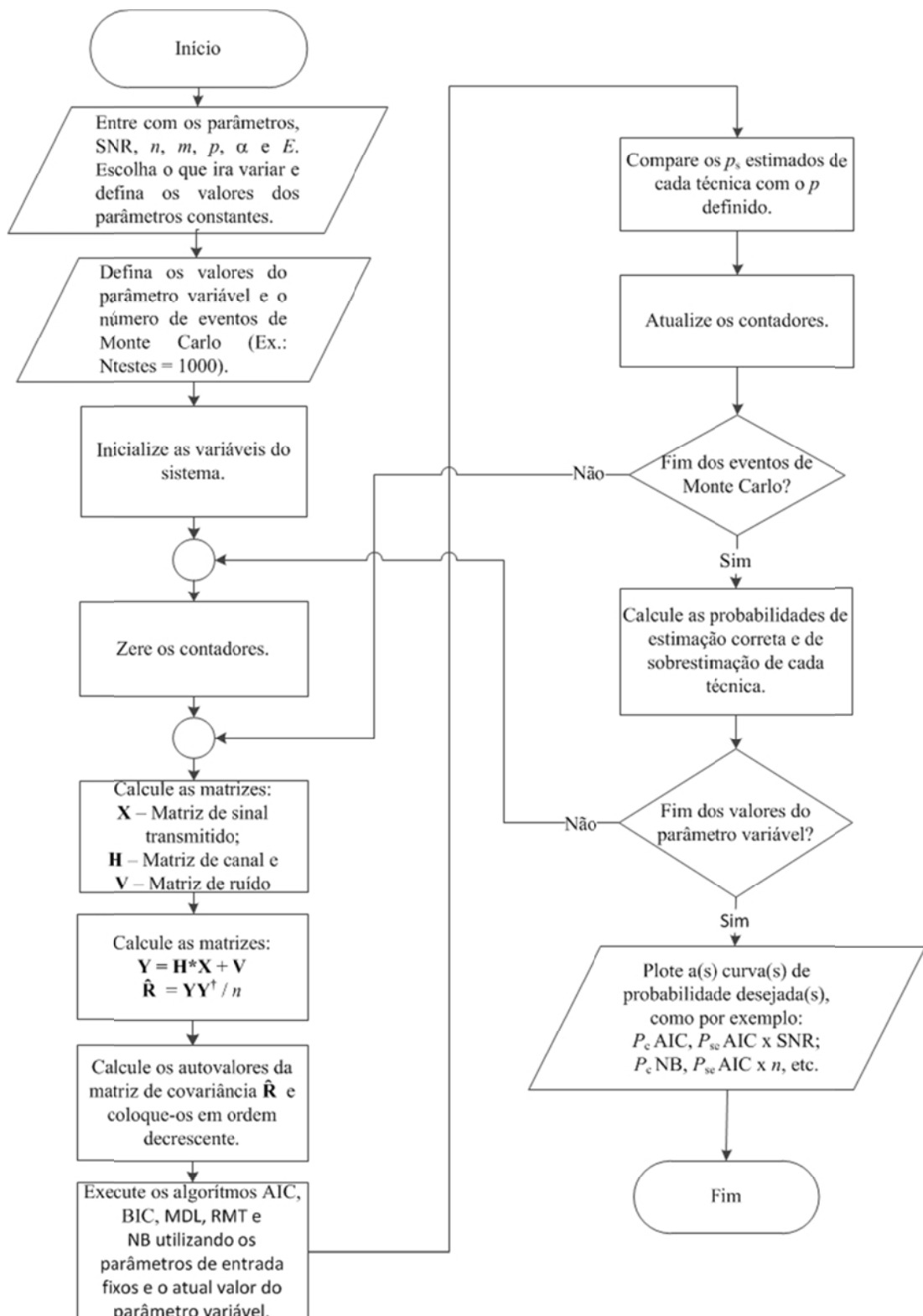


Figura 4.1: Fluxograma dos desempenhos dos estimadores em função de P_c e P_{se} .

4.2 Desempenho dos estimadores AIC, BIC/MDL, RMT e NB para SNR (dB) variável

Os desempenhos dos estimadores AIC, BIC/MDL, RMT e NB em função da variação da SNR são mostrados na Figura 4.2, considerando potência de transmissão unitária, $p = 5$, $m = 30$ sensores, $n = 1000$ amostras por sensor, $\alpha = 0,01$ e $E = 5$. Nota-se que o estimador BIC/MDL apresenta pior desempenho que os demais estimadores em regimes de baixa SNR. No entanto, sua inferioridade deixa de existir em altos valores de SNR. Note ainda que o estimador AIC não consegue atingir $P_c = 1$, embora produza altos valores de probabilidade de acerto, pois possui probabilidade de sobrestimação não desprezível. Observe ainda que o algoritmo RMT sofre grande influência da imprecisão na estimativa de σ^2 , porém consegue produzir estimativas do número de fontes com alta probabilidade de acerto sob valores um pouco mais baixos de SNR. Por fim, é possível verificar que embora o estimador NB não apresente bom desempenho em regimes muito baixos de SNR, ele mostra comportamento monotonicamente crescente da probabilidade de estimação correta com o aumento da SNR.

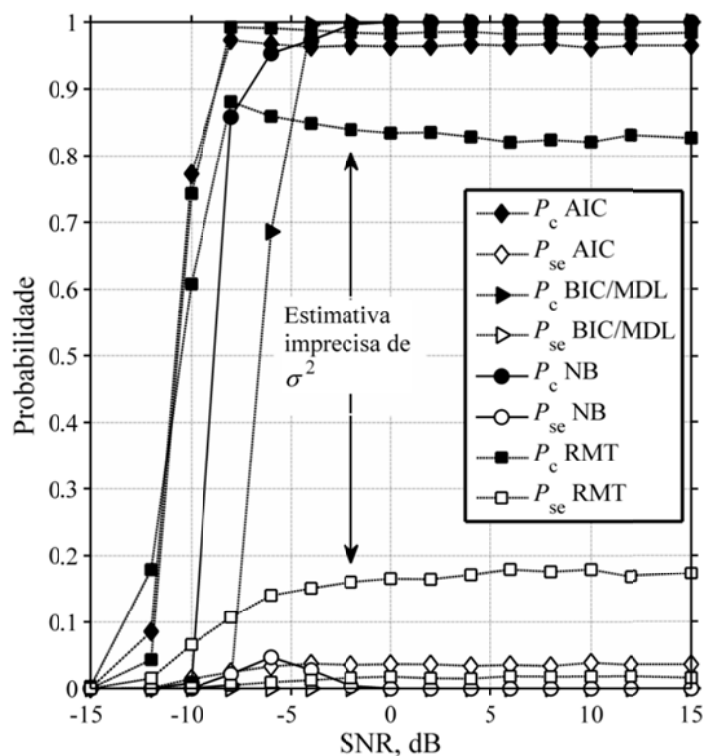


Figura 4.2: Desempenhos dos estimadores AIC, BIC/MDL, RMT e NB para SNR variável.

4.3 Desempenho dos estimadores AIC, BIC/MDL, RMT e NB para número de fontes p variável

Os desempenhos dos estimadores AIC, BIC/MDL, RMT e NB em função do número de fontes p variável são mostrados na Figura 4.3, considerando potência de transmissão unitária, $m = 30$ sensores, $n = 1000$ amostras por sensor, SNR = 0 dB, $\alpha = 0,01$ e $E = 5$. Observe na figura que o estimador AIC apresenta o pior desempenho em função da variação de p comparado aos demais estimadores e BIC/MDL, embora apresente boa estimacão para $p < 9$ seu desempenho diminui com o aumento de p . Note que o método NB proporciona $P_c \approx 1$ para $p \leq 9$, enquanto o método RMT proporciona $P_c \approx (1 - \alpha)$ para $p \leq 11$. Em outras palavras, o método NB atinge alta probabilidade de estimacão correta para um número de fontes máximo ligeiramente menor que o método RMT, mantendo-se fixos os demais parâmetros sistmicos. Por outro lado, o algoritmo RMT apresenta significativa reduo na probabilidade de estimacão correta quando se considera imprecisão na estimativa de σ^2 , a qual é utilizada no cômputo do limiar de decisão do algoritmo. Percebe-se também na figura que, para valores de p até por volta de 13, a probabilidade de sobrestimaco P_{se} do algoritmo RMT é praticamente igual a $1 - P_c$, indicando que, quando o algoritmo produz estimativas erradas, os valores estimados estão acima do valor correto. Para valores mais altos de p , P_c começa a cair e P_{se} continua baixa, indicando que alguns valores de p estimados com erro estão abaixo do valor correto. No caso do algoritmo NB, nota-se que $P_{se} \approx 0$ em toda faixa de valores de p , indicando que, quando o algoritmo produz estimativas erradas, os valores estimados estão abaixo do valor correto. Isto pode representar uma vantagem do algoritmo NB em relao ao RMT, pois pode ser melhor saber que uma estimativa errada está sempre abaixo do valor correto. É importante ressaltar, contudo, que este comportamento do algoritmo NB não necessariamente ocorrerá para qualquer configurao dos parâmetros sistmicos.

Ainda com relao  Figura 4.3, nota-se que o algoritmo NB proporcionou desempenho satisfatório para um número de fontes máximo por volta de $m/3$. Este fato estabelece uma útil relao entre o máximo número de fontes que se pode estimar com alta probabilidade de acerto e o número necessário de sensores.

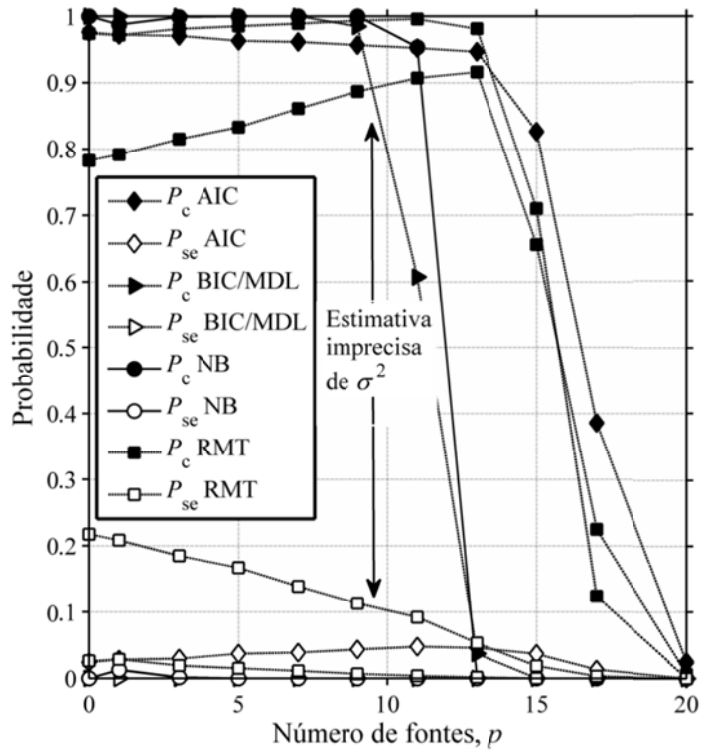


Figura 4.3: Desempenhos dos estimadores AIC, BIC/MDL, RMT e NB para p variável.

4.4 Desempenho dos estimadores AIC, BIC/MDL, RMT e NB para número de amostras n variável

Os desempenhos dos estimadores AIC, BIC/MDL, RMT e NB em função do número de amostras n variável são mostrados na Figura 4.4, considerando potência de transmissão unitária, $p = 5$, $m = 30$ sensores, $\text{SNR} = -3$ dB, $\alpha = 0,01$ e $E = 5$. Observe que o AIC consegue proporcionar altas probabilidades de detecção correta com um número de amostras significativamente inferior ao MDL/BIC e NB. No entanto, a probabilidade de detecção correta do estimador AIC nunca atinge o valor 1, posto que tal estimador não é consistente, apresentando uma probabilidade de sobrestimação irreduzível mesmo com o aumento do número de amostras.

Ainda é possível observar na Figura 4.4 que o estimador NB é consistente perante os resultados sob análise, ou seja, $P_c \rightarrow 1$ se $n \rightarrow \infty$, embora não se tenha a prova por consequência da dificuldade de tratamento matemático do modelo. Por outro lado, o estimador RMT apresenta o que se denomina em [3] de “consistência aproximada”. Esta aproximação pode ser analisada por vários ângulos: primeiro, note

que

$P_c \rightarrow 1 - \alpha$ se $n \rightarrow \infty$, o que representa uma certa polarização do estimador, polarização esta que pode ser reduzida à medida que se reduz α . Por outro lado, se há imprecisão no conhecimento sobre a variância do ruído, o estimador RMT se mostra inconsistente. Tem-se ainda a impressão de que o algoritmo RMT tem valores ótimos de número de amostras que dependem dos demais parâmetros sistêmicos. Esta observação está em consonância com a afirmação da Seção 2.5.1, segundo parágrafo após a equação (2.22), a qual sugere que a análise assintótica, que permitiu a determinação do limiar no algoritmo RMT, só é precisa para valores finitos de m e n se a relação m/n ou n/m não leva a um número muito elevado. Além disso, pode-se verificar que em [3] afirma-se que a consistência do algoritmo lá proposto não é satisfeita na totalidade das possibilidades de combinação dos parâmetros sistêmicos, o que corrobora com o comportamento mostrado na figura. Ainda com relação à Figura 4.4, novamente percebe-se o efeito complementar de P_c e P_{se} no algoritmo RMT para n acima de aproximadamente 500. Mais uma vez, percebe-se o valor nulo de P_{se} no algoritmo NB, agora independentemente do valor de n .

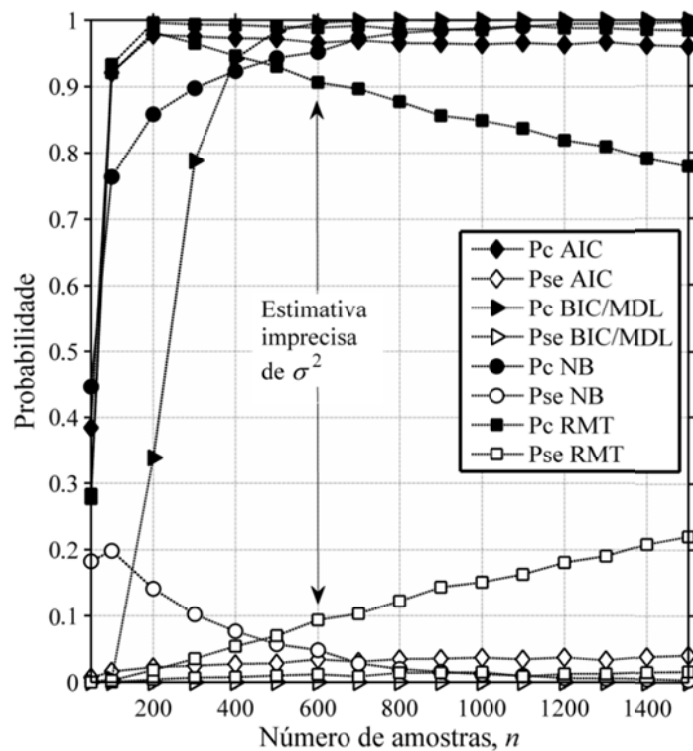


Figura 4.4: Desempenhos dos estimadores AIC, BIC/MDL, RMT e NB para n variável.

4.5 Desempenho dos estimadores AIC, BIC/MDL, RMT e NB para número de sensores m variável

Os desempenhos dos estimadores AIC, BIC/MDL, RMT e NB em função do número de sensores m variável é mostrado na Figura 4.5, considerando potência de transmissão unitária, $p = 5$, $n = 1000$ amostras por sensor, SNR = 0 dB, $\alpha = 0,01$ e $E = 5$. É possível observar nesta figura que o estimador AIC é o que apresenta uma menor probabilidade de detecção em quase toda a variação de m e o BIC/MDL apresenta ótima P_c para $m > 15$. Desconsiderando a imprecisão na estimativa do ruído RMT proporciona boa detecção $P_c \rightarrow 1 - \alpha$ e a $P_{se} \rightarrow 1 - P_c$. O estimador NB, também proporciona boa detecção em quase toda a faixa de m , porém como mencionado na Seção 3.2, Figura 3.7, para uma SNR baixa seu desempenho cai drasticamente. Ainda é possível observar que no método NB, pode haver um valor ótimo de m que proporcionará o melhor desempenho a uma dada configuração dos demais parâmetros.

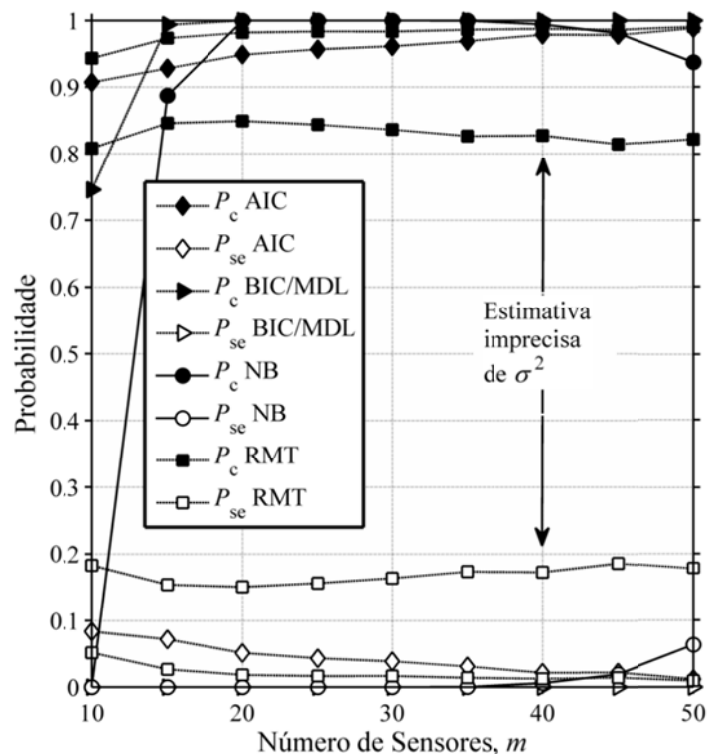


Figura 4.5: Desempenhos dos estimadores AIC, BIC/MDL, RMT e NB para m variável.

Após a investigação e a comparação do estimador NB com os demais estimadores, o próximo capítulo reúne as conclusões obtidas a partir dos resultados numéricos e aponta oportunidades para continuidades das pesquisas.

Capítulo 5

Conclusões e Oportunidades para Pesquisas

Futuras

Neste trabalho foi proposto um novo método empírico para se estimar por meio de múltiplos sensores, o número de fontes de sinais contaminados por ruído, em canal com desvanecimento, o qual utiliza a norma dos vetores dos autovalores da matriz de covariância do sinal recebido normalizados. Tal normalização faz com que seja possível a classificação dos autovalores.

Esta pesquisa se iniciou com a fundamentação dos estimadores baseados na teoria da informação (AIC, BIC e MDL) juntamente com simulações as quais permitiram verificar o desempenho para as probabilidades de detecção correta e de sobrestimação de cada técnica. Posteriormente, foi apresentado outro método baseado na teoria de matrizes aleatórias e proposto um novo algoritmo baseado em norma, os quais também foram fundamentados e simulados de forma a observar o comportamento de seus desempenhos. Com o propósito de ampliar as análises feitas para os métodos citados, comparam-se as técnicas fundamentadas em teoria da informação e teoria de matrizes aleatórias com o método NB proposto. Para os resultados obtidos entre a comparação dos estimadores fundamentados na teoria da informação observou-se que, a despeito de utilizarem abordagens não totalmente iguais em seus modelos matemáticos, os estimadores AIC, BIC e MDL possuem expressões finais bastante parecidas: todas contêm uma parcela referente à estimação de máxima verossimilhança do vetor de parâmetros desconhecidos e uma parcela de correção cuja função é regular tendências de sobrestimação da ordem do modelo em análise. Os métodos diferem na forma como realizam tal correção.

Foi verificado que, para as condições adotadas na estimação do número de fontes, os modelos referentes ao MDL e ao BIC são idênticos, produzindo, portanto, desempenhos idênticos.

Comparando os estimadores AIC e MDL/BIC, observou-se que, por ser consistente, o estimador MDL pode proporcionar probabilidade de detecção correta igual a 1, dependendo dos parâmetros sistêmicos. No entanto, percebeu-se que o estimador AIC pode suplantar o estimador MDL em determinadas situações, principalmente em regime de baixa SNR, maior número de fontes e pequeno número de amostras.

Pode-se também concluir que o estimador AIC pode ser preferido se a situação em que for aplicado permitir que a probabilidade de detecção correta seja um pouco menor que 1.

Com relação ao método empírico proposto, conclui-se que este pode produzir estimativas consistentes à medida que o número de amostras aumenta, uma vez que possui comportamento monotônico crescente da probabilidade de estimação correta, tanto com o aumento da SNR quanto com a redução no número de fontes. Verificou-se ainda que o algoritmo proposto consegue estimar um número de fontes máximo ligeiramente menor que o algoritmo baseado na teoria de matrizes aleatórias e operar satisfatoriamente sob uma SNR ligeiramente superior. No entanto, para um número pequeno de fontes e para valores elevados de SNR, o desempenho do algoritmo proposto se mostrou superior. Vale ainda lembrar que, ao contrário do algoritmo baseado na teoria de matrizes aleatórias, o algoritmo aqui proposto não pressupõe o conhecimento *a priori* de nenhum parâmetro e não necessita estimar nenhum outro, exceto os autovalores da matriz de covariância do sinal recebido, como o fazem também os algoritmos baseados na teoria da informação e na teoria de matrizes aleatórias.

Como continuidade das pesquisas relacionadas a este trabalho, algumas oportunidades podem ser citadas: i) análise matemática do algoritmo proposto em termos de probabilidade de estimação correta, probabilidade de sobrestimação e consistência (cogita-se, entretanto, que esta análise, se for possível, terá

complexidade bastante elevada); ii) definição da estimação do número de fontes como um problema de classificação a ser modelado e resolvido por otimização convexa; iii) utilização combinada do método NB com outros algoritmos de estimação do número de fontes como forma de melhorar o desempenho desses últimos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] NADLER, B. “*Nonparametric Detection of signals by Information Theoretic Criteria: Performance Analysis and an Improved Estimator*”, IEEE Trans. Signal Proc., vol. 58, 5, pp. 2746-2756, May. 2010.
- [2] WAX, M. and KAILATH, T., “*Detection of signals by information theoretic criteria*”, IEEE Trans. Signal Process, vol. 33, 2, pp. 387-392, Apr. 1985.
- [3] KRITCHMAN, E. S. and NADLER, B., “*Non-parametric Detection of the Number of Signals: Hypothesis Testing and Random Matrix Theory*”, IEEE Trans. Signal Proc, vol. 57, 10, pp. 3930-3941, Oct. 2009.
- [4] KRITCHMAN, S. and NADLER, B., “*Determining the number of components in a factor model from limited noisy data*”, Elsevier, Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems, pp. 19-32, June 2008.
- [5] SWAMY, R. K., MURTY, S. R. and YEGNANARAYANA, B., “*Determining number of speakers from multispeaker speech signals using excitation source information*”, IEEE Sig. Process, vol. 14, 7, pp. 481-484, July 2007.
- [6] CHIANI, M. and WIN, M. Z., “*Estimating the Number of Signals Observed by Multiple Sensors*”, International Workshop on Cognitive Information Processing, June 2010.
- [7] FISHLER, E., GROSMAN, M. and MESSER, H., “*Determining the Number of Discrete Alphabet Sources from Sensor Data*”, EURASIP Journal on Applied Signal Processing, pp. 4-12, 1, Jan. 2005.
- [8] FISHLER, E. and POOR, H. V., “*Estimation of the Number of Sources in Unbalanced Arrays via Information Theoretic Criteria*”, IEEE Signal Proc, vol. 53, 9, pp. 3543-3553, Sept. 2005.
- [9] GHASEMI, A. and SOUZA, E.S., *Spectrum Sensing in Cognitive Radio Networks: Requirements, Challenges and Design Trade-offs*, IEEE Communications Magazine, vol. 46, 4, pp. 32-39, Apr, 2008.
- [10] ARKIND, N. and NADLER, B., “*Parametric Joint Detection-Estimation of the Number of Sources in Array Processing*”, Sensor Array and Multichannel Signal Process. Workshop, IEEE, pp. 269-272, Oct, 2010.
- [11] BRUCKSTEIN, A., SHAN, T. J. and KAILATH, T., “*The resolution of overlapping echoes*”, IEEE Trans. Signal Proc., vol. 33, 6, pp. 1357-1367, Dec. 1985.
- [12] AKAIKE, H., *Information theory and extension of the maximum likelihood principle*, Proc. 2nd Int. Symp. Inform. Theory, suppl. Problems of Control and Inform. Theory, pp. 267-281, 1973.

- [13] AKAIKE, H. “A new look at the statistical model identification”, *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol.19, 6, pp. 716-723, Dec. 1974.
- [14] RISSANEN, J. *Modeling by shortest data description*, *Automatica*, vol.14, pp. 465-471, 1978.
- [15] SCHWARS, G. “Estimating the dimension of a model”, *The Annals of statistics*, vol. 6, 2, pp. 461-464, 1978
- [16] HELSTROM, C. W., *Elements of signal Detection & Estimation*, Prentice-Hall, Inc., 1995.
- [17] NETO, J.S. *Contribuições ao estudo sobre sensoriamento espectral baseado em autovalor para aplicações em sistemas de rádio cognitivo*. Dissertação de Mestrado Instituto Nacional de Telecomunicações. Santa Rita do Sapucaí. Minas Gerais. Brasil.
- [18] STOICA, P. and SELÉN, Y., “Model-order selection: a review of information criterion rules”, *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. 21, 4, pp. 36-47, July 2004.
- [19] GRÜNWARD, P. *A Tutorial Introduction to the Minimum Description Length Principle*, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Kruislaan, Amsterdam, Apr. 2005.
- [20] Faculty of Mathematics and Computer Science, Boaz Nadler. Available at: http://www.wisdom.weizmann.ac.il/~nadler/Wishart_Ratio_Trace/TW_ratio.html (last access: on Dec 2013)
- [21] URBANO, J., *Estatística: Uma Nova Abordagem*, Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2010.
- [22] BARTLETT, M. S., *A note on the multiplying factors for various χ^2 approximations*, *J. Roy. Stat. Soc., ser. B*, vol. 16, pp.296-298,1954.
- [23] LAWLEY, D.N., *Tests of significance of the latent roots of the covariance and correlation matrices*, *Biometrika*, vol. 43, pp.128-136, 1956.

APÊNDICE

% Cálculo de P_c e P_{se} dos estimadores AIC, MDL, RMT e NB em função dos parâmetros que se deseja variar.

```
function [t s] =  
Empirical_estimation_of_the_number_of_sources(q,n,beta,alpha,  
pha); beta=2; % Para cálculo do limiar exato do algoritmo  
RMT  
  
clc  
clear all  
close all  
  
m=30; % número de sensores  
n=1000; % número de amostras  
alpha=0.01; % probabilidade de sobreestimação do  
algoritmo RMT  
Ntests=100; % número de testes de Monte Carlo  
p=5; % número de fontes, válido se não é o parâmetro  
variável de teste  
SNR=-4; % válido se não é o parâmetro variável de teste  
% SNR2=0;  
E=5; % Expoente de encurvamento no algoritmo NB  
A=2; % A=1 para cálculo aproximado do limiar; A=2 para  
cálculo por inversão da CDF TW.  
  
sel = 'Nr Sensores';  
  
switch (sel)  
  
    case 'SNR'  
        Parametro = [-15 -12 -10 -8 -6 -4 -2 0 2 4 6 8 10  
12 15]'; % para SNR variável  
  
    case 'Nr Sensores'  
        Parametro=[10 15 20 25 30 35 40 45 50]'; % para m  
variável  
  
    case 'Nr Fontes'  
        Parametro=[0 1 3 5 7 9 11 13 15 17 20]'; % para p  
variável  
  
    case 'Nr Amostras'  
        Parametro=[5 50 100 200 300 400 400 500 600 700  
800]'; % para n variável
```

```

end

Npt=size(Parametro,1); % número de pontos no gráfico =
número de valores do parâmetro variável

Npt
for pt=1:Npt

switch (sel)
    case 'SNR'
        SNR = Parametro(pt);
    case 'Nr Sensores'
        m = Parametro(pt);
    case 'Nr Fontes'
        p = Parametro(pt);
    case 'Nr Amostras'
        n = Parametro(pt);
end

CcNB=0; % contador de acertos de estimação
CseNB=0; % contador de sobre-estimação

CcRMT=0; % contador de acertos de estimação
CseRMT=0; % contador de sobre-estimação

CcRMT2=0; % contador de acertos de estimação com var
de ruído imprecisa
CseRMT2=0; % contador de sobre-estimação com var de
ruído imprecisa

CcMDL=0; % contador de acertos de estimação
CseMDL=0; % contador de sobre-estimação

CcAIC=0; % contador de acertos de estimação
CseAIC=0; % contador de sobre-estimação

s2=1/(10^(SNR/10)); % variância de ruído térmico,
SNR=-5

    % Limiar aproximado do algoritmo RMT
%     if A==1
%         S=nthroot((-3/4)*log(16*pi*alpha))^2,3);
%         for k=1:m-1
%             MU = (1/n)*(sqrt(n-1/2)+sqrt(m-k-1/2))^2;
%             PSI = sqrt(MU/n)*((1/sqrt(n-1/2))+(1/sqrt(m-k-
1/2))))^(1/3);

```

```

%           t1(k) = s21*(MU + S*PSI)
%           end

           % Limiar por inversão da FDC Tracy Widom para o
algoritmo RMT
           if A==2
           for k=1:m-1; q=m-k;
           load TW_beta2.mat
           [mu_np sigma_np] = KN_mu_sigma(n,q,beta);    mu_np
= mu_np ./ n; sigma_np = sigma_np ./ n;
           U_cdf_complementary = 1-TW_s +1/beta/n/q *
(mu_np/sigma_np)^2 * TW_s_tag_tag;
           [val idx] = min(abs(U_cdf_complementary-alpha));
           t(k) = (s2*(mu_np + sigma_np * x(idx)));
           s = x(idx);
           end
           end

           for test=1:Ntests

           if p==0
               X=0;
           else

X=randn(p,n)*sqrt(1/(2*p))+1i*randn(p,n)*sqrt(1/(2*p));
           end
           V=randn(m,n)*sqrt(s2/2)+1i*randn(m,n)*sqrt(s2/2);
           if p==0
               H=0;
           else
H=randn(m,p)*sqrt(1/2)+1i*randn(m,p)*sqrt(1/2);
           end

           Y=H*X+V;
           R=(Y*Y')/n;
           lambda=sort(eig(R), 'descend');

% Algoritmo NB -----

           a=lambda-min(lambda);
           b=a/max(a);
           c=(1-(1-b).^E).^0.5;
           K=floor(m/2);
%           K=m;
           for u=1:K

```

```

        N(u)=sqrt(c(u)^2+((u-1)/(K-1))^2);
    end
    [minNorm, Inb]=min(N);
    NrNB=Inb-1;

% Algoritmo RMT -----

    for i=1:m-1
        if lambda(i)<t(i)
            Irmt=i;
            break
        end
    end
    NrRMT=Irmt-1;

% Algoritmo RMT com erro de estimaco da var de ruído ---
    Delta=0.1*s2*rand-0.05*s2;

    for i=1:m
        if lambda(i)<(t(i)+Delta*t(i)/s2)
            Irmt2=i;
            break
        end
    end

    NrRMT2=Irmt2-1;

% Algoritmo MDL -----

    for i=0:m-1
        MDL(i+1)=-n*log(prod(lambda(i+1:m)))/((1/(m-
i))*sum(lambda(i+1:m))^(m-i))+1/2*i*(2*m-i)*log(n);
    end
    [minMDL, Imdl]=min(MDL);
    NrMDL=Imdl-1;

% Algoritmo AIC -----

    for i=0:m-1
        AIC1(i+1)=-
2*n*log(prod(lambda(i+1:m)))/((1/(m-
i))*sum(lambda(i+1:m))^(m-i))+2*i*(2*m-i);
    end
    [minAIC1, Iaic1]=min(AIC1);
    NrAIC1=Iaic1-1;

```



```

%-----
%
    if NrNB==p
        CcNB=CcNB+1;
    end
    if NrNB>p
        CseNB=CseNB+1;
    end

    if NrRMT==p
        CcRMT=CcRMT+1;
    end
    if NrRMT>p
        CseRMT=CseRMT+1;
    end
%
    if NrRMT2==p
        CcRMT2=CcRMT2+1;
    end
    if NrRMT2>p
        CseRMT2=CseRMT2+1;
    end

    if NrMDL==p
        CcMDL=CcMDL+1;
    end
    if NrMDL>p
        CseMDL=CseMDL+1;
    end

    if NrAIC1==p
        CcAIC=CcAIC+1;
    end
    if NrAIC1>p
        CseAIC=CseAIC+1;
    end

    end

PcNB(pt)=CcNB/Ntests;
PseNB(pt)=CseNB/Ntests;

PcRMT(pt)=CcRMT/Ntests;
PseRMT(pt)=CseRMT/Ntests;

PcRMT2(pt)=CcRMT2/Ntests

```

```

PseRMT2(pt)=CseRMT2/Ntests
%
PcMDL(pt)=CcMDL/Ntests;
PseMDL(pt)=CseMDL/Ntests;

PcAIC1(pt)=CcAIC/Ntests;
PseAIC1(pt)=CseAIC/Ntests;
end

plot(Parametro,PcAIC1,'kx-');
hold on
plot(Parametro,PseAIC1,'kx--');
plot(Parametro,PcMDL,'bd-');
plot(Parametro,PseMDL,'bd--');
plot(Parametro,PcNB,'ko-');
plot(Parametro,PseNB,'ko--');
plot(Parametro,PcRMT,'ks-');
plot(Parametro,PseRMT,'ks--');
plot(Parametro,PcRMT2,'rs-');
plot(Parametro,PseRMT2,'rs--');

xlabel(sel);
ylabel('Probabilidade');
xlim([Parametro(1) Parametro(end)])
grid on;
legend('Pc AIC', 'Pse AIC', 'Pc MDL', 'Pse MDL', 'Pc NB',
'Pse NB', 'Pc RMT', 'Pse RMT')
set(legend, 'Location', 'East', 'LineWidth', 2);

widthpaper=16-4-2.5;
heightpaper=30.7-3.5-2.5;
xMargin=1;
yMargin=1;
xSize=widthpaper+13.5*xMargin;
ySize=heightpaper-8.5*yMargin;
set(gcf, 'Units', 'centimeters', 'Position', [5 5 xSize
ySize]/2)
set(gcf, 'PaperUnits', 'centimeters')
set(gcf, 'PaperSize', [widthpaper heightpaper])
set(gcf, 'PaperPosition', [xMargin yMargin xSize ySize])

end

```