

ESTIMAÇÃO DE NÚMERO DE
FONTES VIA NORMA $l_{0,55}$

GIOVANNI HENRIQUE FARIA FLORIANO

ABRIL/2016

**Estimação de número de fontes via
norma $\ell_{0,55}$**

GIOVANNI HENRIQUE FARIA
FLORIANO

Dissertação apresentada ao Instituto Nacional
de Telecomunicações, como parte dos
requisitos para obtenção do Título de Mestre
em Telecomunicações.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Dayan Adionel
Guimarães
COORIENTADOR: Prof. Dr. Rausley A. A.
de Souza

Floriano, Giovanni Henrique Faria

F635e

Estimação de número de fontes via norma L0,55. / Giovanni Henrique Faria Floriano. – Santa Rita do Sapucaí, 2016.
96p.

Orientador: Prof. Dr. Dayan Adionel Guimarães e Prof. Dr. Rausley Adriano Amaral de Souza.

Dissertação de Mestrado – Engenharia de Telecomunicações – Instituto Nacional de Telecomunicações – INATEL.

Inclui bibliografia e anexo.

1. Número de fontes de sinais 2. AIC – Akaike Information Criterion 3. MDL – Minimum Description Length 4. Matriz aleatória 5. Método baseado em norma 6. Engenharia de Telecomunicações. I. Guimarães, Dayan Adionel II. Souza, Rausley Adriano Amaral de III. Instituto Nacional de Telecomunicações – INATEL. IV. Título.

CDU 621.39

FOLHA DE APROVAÇÃO

Dissertação defendida e aprovada em 19 /04 /2016,
pela comissão julgadora:

Prof. Dr. Dayan Adionel Guimarães

INATEL

Prof. Dr. Rausley Adriano Amaral de Souza

INATEL

Prof. Dr. Tales Cleber Pimenta

UNIFEI

Prof. Dr. Felipe Emanuel Chaves

INATEL

Coordenador do Curso de Mestrado
Prof. Dr. José Marcos Câmara Brito

*“Everything should be made as simple as possible,
but no simpler.”*

Albert Einstein

À minha família.

AGRADECIMENTOS

Aos professores Dr. Dayan Adionel Guimarães (orientador) e Dr. Rausley Adriano Amaral de Souza (coorientador) pela generosa e eficiente orientação dispensada, tanto nas disciplinas que atuaram como meus professores quanto, e principalmente, durante o desenvolvimento da pesquisa cujo resultado é apresentado nessa dissertação.

À Direção e à Coordenação do Instituto Nacional de Telecomunicações de Santa Rita do Sapucaí-INATEL, pelo apoio e suporte oferecido durante todo o curso de mestrado.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS.....	vii
LISTA DE TABELAS	x
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS	xi
LISTA DE SÍMBOLOS	xii
RESUMO.....	xiv
ABSTRACT.....	xv
1 Introdução	1
1.1 Contextualização	1
1.2 Formulação do problema.....	4
1.3 Objetivos, Contribuições e Estrutura da Dissertação.....	6
2 Referencial Teórico.....	8
2.1 Fundamentos da Teoria da Informação.....	8
2.2 A medida da informação: Entropia	11
2.3 A divergência de Kullback-Leibler	15
2.4 O critério da máxima verossimilhança.....	16
2.5 O critério de máxima a posteriori.....	19
2.6 Aplicação de divergência de Kullback-Leibler (KL).....	21
2.7 A teoria das matrizes aleatórias (RMT)	23

3	Estimadores do Número de Fontes	26
3.1	O estimador baseado no critério da informação de Akaike	26
3.2	O estimador baseado no comprimento de mínima descrição.....	27
3.3	O estimador baseado na teoria das matrizes aleatórias	29
3.4	O estimador baseado em norma	30
4	Estimador Empírico Baseado em Norma Melhorado (iNB).....	35
5	Resultados Numéricos	42
5.1	Critérios adotados nas simulações	42
5.2	Simulações com variação do número de amostras (n).....	43
5.3	Simulações com variação da relação sinal/ruído (SNR).....	49
5.4	Simulações com variação do número de fontes (p)	55
5.5	Simulações com variação do número de sensores (m).....	61
6	Conclusões e Pesquisas Futuras	67
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	69
	APÊNDICE	71

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1: <i>Representação de um arranjo com transmissores e receptores com indicação dos ganhos do canal.....</i>	4
Figura 2.1: <i>Representação esquemática de um sistema geral de comunicação ...</i>	10
Figura 2.2: <i>Entropia (H) de uma fonte binária sem memória em função da probabilidade (p) de um dos símbolos.....</i>	13
Figura 3.1: <i>Gráfico dos autovalores e índices normalizados para $p = 0$, $m = 30$ e $n=5000$</i>	32
Figura 3.2: <i>Autovalores e índices normalizados segundo o algoritmo NB.....</i>	33
Figura 4.1: <i>Comportamento dos autovalores normalizados e dos correspondentes modificados, em função dos índices normalizados, para $p = 0$...</i>	36
Figura 4.2: <i>Norma $\ell_{0,83}$ para todos os $\{l_i\}$ e a norma Euclidiana (norma ℓ_2) para todos os $\lambda_i^{(N)}$, com $p = 0$.....</i>	37
Figura 4.3: <i>Comportamento dos autovalores normalizados e dos correspondentes modificados, em função dos índices normalizados, para $p = 10$..</i>	38
Figura 4.4: <i>Norma $\ell_{0,83}$ para todos os $\{l_i\}$ e a norma Euclidiana (norma ℓ_2) para todos os $\lambda_i^{(N)}$, com $p = 10$.....</i>	39
Figura 4.5: <i>Probabilidade detecção correta em função do parâmetro u da norma para vários conjuntos de parâmetros</i>	40
Figura 5.1: <i>Pc e Pse em função do número de amostras (n) para o Caso 01 ($p = 3$, $m = 30$, $SNR = - 10$ dB).....</i>	44
Figura 5.2: <i>Pc e Pse em função do número de amostras (n) para o Caso 02 ($p = 3$, $m = 30$, $SNR = - 2$ dB).....</i>	44
Figura 5.3: <i>Pc e Pse em função do número de amostras (n) para o Caso 03 ($p = 3$, $m = 70$, $SNR = - 10$ dB).....</i>	45
Figura 5.4: <i>Pc e Pse em função do número de amostras (n) para o Caso 04 ($p = 3$, $m = 70$, $SNR = - 2$ dB).....</i>	45

Figura 5.5: <i>P_c e P_{se} em função do número de amostras (n) para o Caso 05</i> (<i>p = 8, m = 30, SNR = - 10 dB</i>).....	46
Figura 5.6: <i>P_c e P_{se} em função do número de amostras (n) para o Caso 06</i> (<i>p = 8, m = 30, SNR = - 2 dB</i>).....	46
Figura 5.7: <i>P_c e P_{se} em função do número de amostras (n) para o Caso 07</i> (<i>p = 8, m = 70, SNR = - 10 dB</i>).....	47
Figura 5.8: <i>P_c e P_{se} em função do número de amostras (n) para o Caso 08</i> (<i>p = 8, m = 70, SNR = - 2 dB</i>).....	47
Figura 5.9: <i>P_c e P_{se} em função da relação sinal/ruído (SNR) para o Caso 01</i> (<i>p = 3, m = 30, n = 200</i>).....	50
Figura 5.10: <i>P_c e P_{se} em função da relação sinal/ruído (SNR) para o Caso 02</i> (<i>p = 3, m = 30, n = 1000</i>).....	50
Figura 5.11: <i>P_c e P_{se} em função da relação sinal/ruído (SNR) para o Caso 03</i> (<i>p = 3, m = 70, n = 200</i>).....	51
Figura 5.12: <i>P_c e P_{se} em função da relação sinal/ruído (SNR) para o Caso 04</i> (<i>p = 3, m = 70, n = 1000</i>).....	51
Figura 5.13: <i>P_c e P_{se} em função da relação sinal/ruído (SNR) para o Caso 05</i> (<i>p = 8, m = 30, n = 200</i>).....	52
Figura 5.14: <i>P_c e P_{se} em função da relação sinal/ruído (SNR) para o Caso 06</i> (<i>p = 8, m = 30, n = 1000</i>).....	52
Figura 5.15: <i>P_c e P_{se} em função da relação sinal/ruído (SNR) para o Caso 07</i> (<i>p = 8, m = 70, n = 200</i>).....	53
Figura 5.16: <i>P_c e P_{se} em função da relação sinal/ruído (SNR) para o Caso 08</i> (<i>p = 8, m = 70, n = 1000</i>).....	53
Figura 5.17: <i>P_c e P_{se} em função do número de fontes (p) para o Caso 01</i> (<i>m = 30, n = 200, SNR = -10 dB</i>).....	56
Figura 5.18: <i>P_c e P_{se} em função do número de fontes (p) para o Caso 02</i> (<i>m = 30, n = 200, SNR = -2 dB</i>).....	56

Figura 5.19: P_c e P_{se} em função do número de fontes (p) para o Caso 03 ($m = 30, n = 1000, SNR = -10$ dB).....	57
Figura 5.20: P_c e P_{se} em função do número de fontes (p) para o Caso 04 ($m = 30, n = 1000, SNR = -2$ dB).....	57
Figura 5.21: P_c e P_{se} em função do número de fontes (p) para o Caso 05 ($m = 70, n = 200, SNR = -10$ dB).....	58
Figura 5.22: P_c e P_{se} em função do número de fontes (p) para o Caso 06 ($m = 70, n = 200, SNR = -2$ dB).....	58
Figura 5.23: P_c e P_{se} em função do número de fontes (p) para o Caso 07 ($m = 70, n = 1000, SNR = -10$ dB).....	59
Figura 5.24: P_c e P_{se} em função do número de fontes (p) para o Caso 08 ($m = 70, n = 1000, SNR = -2$ dB).....	59
Figura 5.25: P_c e P_{se} em função do número de sensores (m) para o Caso 01 ($p = 3, n = 200, SNR = -10$ dB).....	62
Figura 5.26: P_c e P_{se} em função do número de sensores (m) para o Caso 02 ($p = 3, n = 200, SNR = -2$ dB).....	62
Figura 5.27: P_c e P_{se} em função do número de sensores (m) para o Caso 03 ($p = 3, n = 1000, SNR = -10$ dB).....	63
Figura 5.28: P_c e P_{se} em função do número de sensores (m) para o Caso 04 ($p = 3, n = 1000, SNR = -2$ dB).....	63
Figura 5.29: P_c e P_{se} em função do número de sensores (m) para o Caso 05 ($p = 8, n = 200, SNR = -10$ dB).....	64
Figura 5.30: P_c e P_{se} em função do número de sensores (m) para o Caso 06 ($p = 8, n = 200, SNR = -2$ dB).....	64
Figura 5.31: P_c e P_{se} em função do número de sensores (m) para o Caso 07 ($p = 8, n = 1000, SNR = -10$ dB).....	65
Figura 5.32: P_c e P_{se} em função do número de sensores (m) para o Caso 08 ($p = 8, n = 1000, SNR = -2$ dB).....	65

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Conjuntos de parâmetros utilizados na obtenção da Figura 4.5.....	40
Tabela 2: Conjuntos de parâmetros utilizados na obtenção das curvas de P_c e P_{se} em função do número de amostras do sinal recebido pelos sensores (n)	43
Tabela 3: Conjuntos de parâmetros utilizados na obtenção das curvas de P_c e P_{se} em função da relação sinal/ruído do sinal recebido pelos sensores (SNR).....	49
Tabela 4: Conjuntos de parâmetros utilizados na obtenção das curvas de P_c e P_{se} em função do número de fontes do sinal recebido pelos sensores (p)	55
Tabela 5: Conjuntos de parâmetros utilizados na obtenção das curvas de P_c e P_{se} em função do número de sensores (m)	61

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AIC	<i>Akaike information criterion</i>
AWGN	<i>Additive white Gaussian noise</i>
BIC	<i>Bayesian information criterion</i>
DoA	<i>Direction of arrival</i>
FDP	Função densidade probabilidade
iNB	<i>Improved Norm based</i>
KL	Critério de informação de Kullback-Leibler
LRT	<i>Likelihood ratio test</i>
MAP	<i>Máximo a posteriori</i>
MDL	<i>Minimum description length</i>
NB	<i>Norm based</i>
RC	Rádio cognitivo
RLRT	<i>Roy's largest root test</i>
RMT	<i>Random matrix theory</i>
SNR	<i>Signal-to-noise ratio</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

m	Número de sensores
n	Número de amostras coletadas por cada sensor
p	Número de fontes
\mathbf{Y}	Matriz de amostras do sinal recebido
\mathbf{X}	Matriz de amostras do sinal transmitido
\mathbf{H}	Matriz de canal
\mathbf{V}	Matriz de ruído Gaussiano
h_{ij}	Representação do ganho do canal entre transmissor j e sensor i
σ^2	Variância do ruído Gaussiano
\mathbf{I}_m	Matriz identidade de ordem m
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2 \mathbf{I}_m)$	Variável aleatória Gaussiana de média μ e variância σ^2
\mathbf{R}	Matriz de covariância do sinal recebido
$\hat{\mathbf{R}}$	Matriz de covariância estimada do sinal recebido
$(\cdot)^\dagger$	Conjugado transposto do argumento
$\mathbb{E} \cdot$	Valor esperado do argumento
$H \cdot$	Função entropia
$I \cdot$	Função informação mútua
$D_{KL} \cdot$	Divergência de Kullback-Leibler
$f(\cdot)$	Função densidade de probabilidade
$\hat{f}(\cdot)$	Função densidade de probabilidade estimada

$\boldsymbol{\theta}$	Vetor de parâmetros do sinal recebido
$\hat{\boldsymbol{\theta}}$	Vetor de parâmetros estimado do sinal recebido
Π	Produtório
Σ	Somatório
\mathcal{H}_k	Hipótese para ordem do modelo k
$P(\mathcal{H}_k)$	Probabilidade a priori \mathcal{H}_k
$P(\mathcal{H}_k \mathbf{x})$	Probabilidade a posteriori da hipótese \mathcal{H}_k
\mathcal{H}_0	Hipótese de nulidade
\mathcal{H}_1	Hipótese alternativa
λ_i	<i>i-ésimo</i> autovalor
\hat{p}	Número de fontes estimadas
P_c	Probabilidade de detecção correta
P_{se}	Probabilidade de sobrestimação
l_i	<i>i-ésimo</i> autovalor normalizado
$i^{(N)}$	<i>i-ésimo</i> índice normalizado
$\lambda_i^{(N)}$	<i>i-ésimo</i> autovalor normalizado e modificado no método NB
E	Expoente de encurvamento dos autovalores normalizados no método NB
$\ \cdot\ $	Norma euclidiana do argumento
Λ_i	Vetor cujos elementos são <i>i-ésimo</i> autovalor normalizado e modificado e <i>i-ésimo</i> índice normalizado
$\ell_u = \ \cdot\ _u$	Norma de parâmetro u do argumento
$\text{tr}[\cdot]$	Traço da matriz

RESUMO

Floriano, G. H. F. Estimação de número de fontes via norma $\ell_{0,55}$. Santa Rita do Sapucaí: Instituto Nacional de Telecomunicações, 2016.

Em 2014, foi proposto um método empírico para realizar a estimativa do número de fontes do sinal recebido por múltiplos sensores, denominado algoritmo baseado em norma (NB). Esse método é baseado na análise da norma Euclidiana de vetores cujos elementos são os autovalores, normalizados e escalonados não linearmente, da matriz de covariância do sinal recebido e os correspondentes índices também normalizados. Essas normas são então utilizadas para discriminar os maiores autovalores dos demais, permitindo assim a estimativa do número de fontes. Nesta dissertação propomos o algoritmo baseado em norma melhorado (iNB) o qual utiliza a norma $\ell_{0,55}$ para discriminar os maiores autovalores. Diferentemente do algoritmo NB, o iNB não utiliza o escalonamento não linear e, também, não necessita da definição de uma constante empírica para realizar a discriminação dos autovalores. Para avaliar a eficácia dessa proposta (iNB) comparamos seus resultados com os resultados obtidos utilizando estimadores baseados no critério de informação de Akaike (AIC), no método do comprimento de mínima descrição (MDL) e na teoria de matriz aleatória (RMT). Essas comparações mostram que o algoritmo iNB pode superar a performance de um ou mais desses estimadores em várias situações e que o iNB sempre supera o algoritmo NB.

Palavras-chave: Estimação do número de fontes, critério de informação de Akaike (AIC), método do comprimento de mínima descrição (MDL), teoria da matriz aleatória (RMT), método baseado em norma (NB).

ABSTRACT

Floriano, G. H. F. Estimating the number of sources via $\ell_{0,55}$ -Norm. Santa Rita do Sapucaí: Instituto Nacional de Telecomunicações, 2016.

In 2014, an empirical method was proposed to estimate the number of signal sources being impinged by multiple sensors, named norm-based algorithm (NB). This method is based on analysis of the Euclidean norm of vectors whose elements are the eigenvalues, standardized and scaled nonlinearly, from the received signal covariance matrix and the also standardized corresponding indexes. These norms are then used to discriminate the largest eigenvalues among all of them, allowing the estimation of the number of sources. In this dissertation we propose the improved norm-based algorithm (iNB) which uses the $\ell_{0,55}$ -norm to discriminate the largest eigenvalues. Unlike the NB algorithm, iNB does not use the nonlinear scaling, and also does not require the definition of an empirical constant to perform the discrimination of the eigenvalues. To evaluate the effectiveness of this proposal (iNB) their results were compared with the results obtained using estimators based on Akaike information criterion (AIC), the method length minimum description (MLD) and random matrix theory (RMT). These comparisons show that iNB algorithm can overcome the performance of one or more of these estimators in various situations and that iNB always exceeds the NB Algorithm.

Keywords: Estimation of the number of sources, Akaike information criterion (AIC), method of minimum description length (MDL), theory of random matrix (RMT), method norm-based (NB).

Capítulo 1

Introdução

1.1 Contextualização

A estimativa do número de fontes de sinais que incidem em um arranjo com vários sensores é um problema fundamental na comunicação e no processamento digital de sinais, tendo recebido considerável atenção de muitos pesquisadores nas últimas décadas. Essa estimativa encontra aplicações em diversas áreas, entre as quais temos a medicina, a estatística e as telecomunicações [1]-[8].

Na área de telecomunicações, contexto principal dessa dissertação, a estimativa do número de fontes de sinais corresponde a estimar o número de transmissores cujos sinais incidem, em uma determinada faixa de frequências, em um arranjo de antenas (sensores) ou em um conjunto de receptores com antenas simples compondo um arranjo virtual de antenas. Em sistemas de telecomunicações há várias aplicações para essa estimativa, dentre as quais podemos citar:

- no sensoriamento espectral em sistemas de rádio cognitivo (RC) [9], onde as antenas dos rádios cognitivos compõem o arranjo virtual de antenas, a detecção do número de transmissores ativos na rede secundária é útil para computar a estatística de teste que verificará o estado de ocupação do espectro ou como dado adicional de entrada de um processo cognitivo mais amplo;

- vários algoritmos que estimam a variância de ruído térmico presente na entrada de um receptor necessitam conhecer o número de sinais recebidos para realizar essa estimativa [3];
- este também é o caso de vários algoritmos de estimação de direção de chegada de sinais em arranjos de antenas (DoA, *direction of arrival*), onde o conhecimento do número de transmissores possibilita que a estimativa produzida alcance maior precisão [10];
- em sistemas de radar, a estimação do número de fontes pode auxiliar no conhecimento do número de ecos de um sinal refletido por um alvo, permitindo que etapas posteriores de processamento reduzam a influência de tais ecos na caracterização do alvo [2][11].

O desenvolvimento de métodos para a estimação do número de fontes, num primeiro momento, teve sua fundamentação na teoria da informação. Em 1985, Mati Wax e Thomas Kailath publicam um artigo [2] no qual discutem a aplicação dos critérios de seleção de modelo na detecção do número de fontes. Nesse artigo foi proposta uma nova abordagem na aplicação do critério de informação de Akaike (AIC, *Akaike information criterion*) [12][13] e do critério de mínima descrição (MDL, *minimum description length*) [15][15], na qual não há necessidade da determinação subjetiva de limiares para a determinação do número de fontes. Essa determinação passa a ser feita através da minimização do critério AIC ou do critério de MDL. Os métodos baseados nesses critérios apresentam, como melhor característica, uma alta probabilidade de detecção correta em regimes de baixa relação sinal-ruído no caso do AIC, e a boa consistência em regimes onde o sinal recebido apresenta um grande número de amostras no caso do MDL.

Em 2009 foi proposta, para a detecção do número de fontes, outra abordagem baseada na teoria de matrizes aleatórias (RMT, *random matrix theory*) [3] a qual utiliza a distribuição dos autovalores da matriz de covariância do sinal recebido e do ruído associado. O método baseado em RMT procura obter o que há de melhor nos métodos baseados em teoria da informação AIC e MDL (alta probabilidade de detecção correta e boa consistência). Contudo, o RMT necessita de uma estimativa da variância do sinal de ruído para definir um limiar de decisão no teste de hipóteses.

Na prática a determinação dessa variância pode representar um obstáculo a aplicação do método e a sua precisão obviamente interfere no seu desempenho.

Tantos nos métodos fundamentados na teoria da informação (AIC e MDL) quanto no método fundamentado na teoria de matrizes aleatórias (RMT), a estimativa do número de fontes é realizada a partir da classificação dos autovalores da matriz de covariância do sinal incidente nos sensores. Essa classificação objetiva selecionar dentro do conjunto de autovalores um subconjunto cujo número de elementos corresponda ao número de sinais recebidos e representa o maior desafio desses métodos.

Em 2014 foi proposto em [16] um método empírico para a detecção do número de fontes, denominado algoritmo baseado em norma (NB), a partir de outra abordagem para a classificação dos autovalores da matriz de covariância. Nessa abordagem é realizada uma análise da norma Euclidiana de um vetor que contém os autovalores, normalizados e escalonados não linearmente, da matriz de covariância do sinal recebido e de um vetor que contém os correspondentes índices desses autovalores, também normalizados. Essas normas são utilizadas para discriminar os maiores autovalores dos demais e o número dos autovalores selecionados corresponde a estimativa do número de fontes de sinal. Assim como os métodos AIC, MDL e RMT, o NB necessita dos autovalores da matriz de covariância, mas não requer o conhecimento *a priori* de nenhum parâmetro e nem a estimativa de nenhum outro. Contudo, o NB necessita da definição de uma constante empírica para realizar o escalonamento não linear.

Nessa dissertação propomos um novo algoritmo, denominado NB melhorado (iNB), que visa aumentar o desempenho do estimador baseado em norma (NB). O iNB utiliza a norma $\ell_{0,55}$ para a classificação dos autovalores e apresenta menor complexidade que o NB, uma vez que não utiliza o escalonamento não linear e não necessita da definição de uma constante empírica. O iNB, além de consistência, apresenta desempenho superior ao dos estimadores AIC, MDL e RMT em várias situações e sempre superior ao do alcançado pelo NB.

1.2 Formulação do problema

Seja um arranjo composto por m sensores que podem ser antenas ou podem ser receptores, cada um deles com uma antena, compondo um arranjo virtual de antenas. Cada um desses sensores coleta n amostras do sinal recebido de p transmissores (fontes), amostras essas que são armazenadas na matriz $\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Já as amostras do sinal emitido pelos p transmissores são organizadas na matriz $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{p \times n}$. Para representar o canal usaremos a matriz $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{m \times p}$, onde cada um dos seus elementos $\{h_{ij}\}$ representa o ganho do canal entre o j -ésimo transmissor (fonte) e o i -ésimo sensor (antena ou receptor), com $j = 1, 2, \dots, p$ e $i = 1, 2, \dots, m$. A Figura 1.1 ilustra o que acaba de ser descrito.

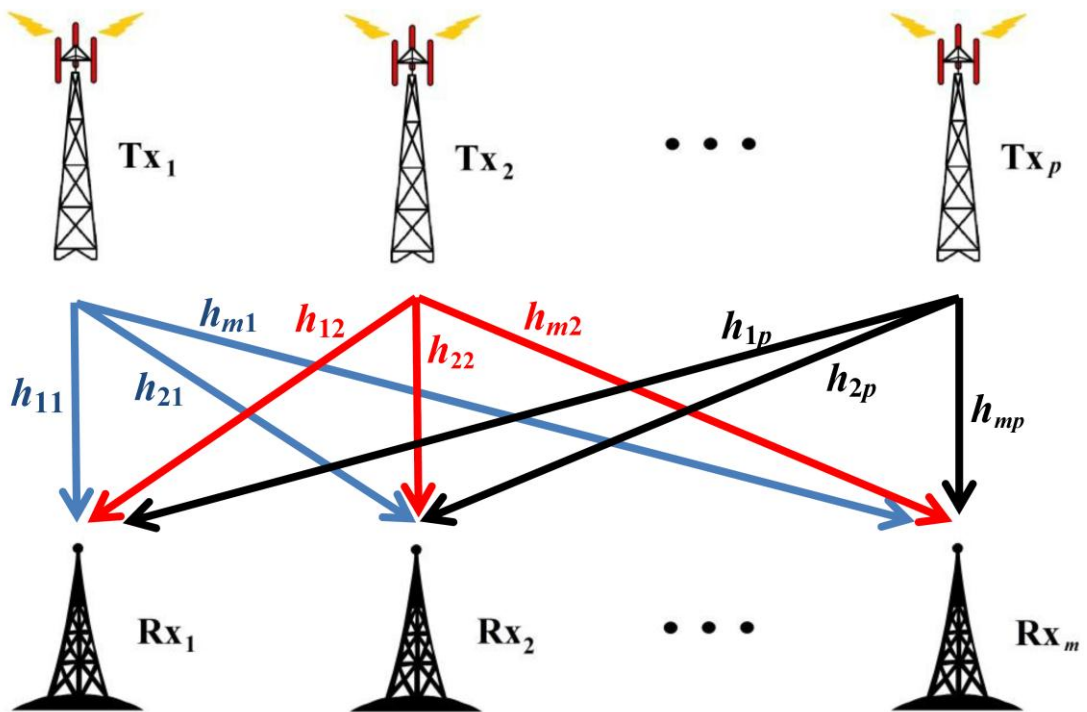


Figura 1.1: Representação de um arranjo com transmissores e receptores com indicação dos ganhos do canal.

Seja ainda a matriz $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ cujos elementos são amostras do ruído aditivo Gaussiano, com distribuição $\mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathbf{I}_m)$, onde \mathbf{I}_m é a matriz identidade de ordem m . As amostras do ruído são independentes das amostras do sinal.

A relação entre as matrizes das amostras do sinal recebido (\mathbf{Y}), do sinal emitido (\mathbf{X}), do ruído aditivo (\mathbf{V}) e a matriz de ganho de canal (\mathbf{H}) é dada por

$$\mathbf{Y} = \mathbf{HX} + \mathbf{V} . \quad (1.1)$$

A partir da matriz das amostras do sinal recebido (\mathbf{Y}) pode-se determinar a sua correspondente matriz covariância \mathbf{R} pela estimativa de máxima verossimilhança dada pela média amostral

$$\mathbf{R} = \frac{1}{n} \mathbf{YY}^\dagger \quad (1.2)$$

onde \dagger indica o conjugado transposto.

De acordo com [2], utilizando o operador esperança estatística $\mathbb{E} \cdot$, podemos escrever \mathbf{R} como

$$\mathbf{R} = \mathbb{E}[\mathbf{YY}^\dagger]. \quad (1.3)$$

Substituindo (1.1) em (1.3) obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbb{E} \left[\begin{array}{cc} \mathbf{HX} + \mathbf{V} & \mathbf{HX} + \mathbf{V}^\dagger \end{array} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\begin{array}{cc} \mathbf{HX} + \mathbf{V} & \mathbf{X}^\dagger \mathbf{H}^\dagger + \mathbf{V}^\dagger \end{array} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbf{HXX}^\dagger \mathbf{H}^\dagger + \mathbf{HXV}^\dagger + \mathbf{VX}^\dagger \mathbf{H}^\dagger + \mathbf{VV}^\dagger \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbf{HXX}^\dagger \mathbf{H}^\dagger \right] + \mathbb{E} \left[\mathbf{HXV}^\dagger \right] + \mathbb{E} \left[\mathbf{VX}^\dagger \mathbf{H}^\dagger \right] + \mathbb{E} \left[\mathbf{VV}^\dagger \right]. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Dentro do intervalo de coleta das amostras do sinal recebido podemos considerar que o ganho do canal (\mathbf{H}) é constante (desvanecimento lento) e que o ruído aditivo Gaussiano (\mathbf{V}) é independente do sinal (\mathbf{X}), e assim escrever

$$\mathbf{R} = \mathbf{H} \mathbb{E} \left[\mathbf{XX}^\dagger \right] \mathbf{H}^\dagger + \mathbf{H} \mathbb{E} \left[\mathbf{X} \right] \mathbb{E} \left[\mathbf{V}^\dagger \right] + \mathbb{E} \left[\mathbf{V} \right] \mathbb{E} \left[\mathbf{X}^\dagger \right] \mathbf{H}^\dagger + \sigma^2 \mathbf{I}. \quad (1.5)$$

Denotando por $\mathbf{R}_x = \mathbb{E}[\mathbf{X}\mathbf{X}^\dagger]$ a matriz de covariância do sinal transmitido e como o ruído tem média nula ($\mathbb{E} \mathbf{V} = 0$), podemos então concluir que a matriz de covariância pode ser dada por

$$\mathbf{R} = \mathbf{H}\mathbf{R}_x\mathbf{H}^\dagger + \sigma^2\mathbf{I}. \quad (1.6)$$

Se a matriz do canal \mathbf{H} é posto completo (*full rank*), ou seja, tem todas as suas colunas linearmente independentes, então o posto (*rank*) da matriz $\mathbf{H}\mathbf{R}_x\mathbf{H}^\dagger$ será p , o que implica que os $m - p$ menores autovalores de $\mathbf{H}\mathbf{R}_x\mathbf{H}^\dagger$ serão iguais a zero. Como os autovalores de \mathbf{R} são iguais aos autovalores de $\mathbf{H}\mathbf{R}_x\mathbf{H}^\dagger$ somados os autovalores de $\sigma^2\mathbf{I}$, temos que os $m - p$ menores autovalores de \mathbf{R} serão iguais a σ^2 . Assim, determinando-se a multiplicidade ($m - p$) dos menores autovalores da matriz de covariância \mathbf{R} , automaticamente estará determinado o número de fontes (p) do sinal recebido.

No entanto, na prática não podemos determinar a matriz de covariância \mathbf{R} . A alternativa é então obter sua estimativa $\hat{\mathbf{R}}$ utilizando um conjunto finito de n amostras do sinal recebido, conforme indicado na equação (1.2). Essa estimativa da matriz de covariância $\hat{\mathbf{R}}$ possui autovalores diferentes entre si, com probabilidade igual a 1. Nesse caso, por observação direta, fica inviabilizada a classificação desses autovalores em dois grupos: um contendo os p maiores autovalores e o outro com os $m - p$ menores autovalores. Conseqüentemente, em todos os métodos que estimam o número de fontes através dos autovalores da matriz $\hat{\mathbf{R}}$, o grande desafio está justamente em como classificar esses autovalores nos dois grupos citados anteriormente e, assim, encontrar a estimativa confiável para o número de fontes do sinal recebido.

1.3 Objetivos, Contribuições e Estrutura da Dissertação

Este trabalho tem como principal objetivo apresentar o método empírico de estimação do número fontes, que denominamos iNB (*improved norm-based*),

baseado na classificação dos autovalores da matriz de covariância do sinal recebido em um arranjo de sensores. O iNB é uma melhoria do método baseado em norma (NB) [16].

Para realizar sua estimativa do número de fontes, o método iNB utiliza apenas os autovalores normalizados da matriz de covariância do sinal recebido e os correspondentes índices normalizados, não requerendo outro parâmetro adicional. Isso confere ao iNB uma simplicidade maior que outros baseados também em autovalores. O iNB também apresenta performance sempre superior a do NB e, em muitos casos, superior a dos estimadores AIC, MDL e RMT. Assim sendo, a maior contribuição dessa pesquisa é oferecer esse novo estimador do número de fontes, que alia simplicidade e eficiência.

Essa dissertação, além desse capítulo, apresenta no Capítulo 2 a fundamentação teórica dos métodos AIC e MDL que são baseados na Teoria da Informação, e do método RMT que é baseado na Teoria das Matrizes Aleatórias. No Capítulo 3 serão apresentados e discutidos os estimadores baseados no critério de informação de Akaike (AIC), no método do comprimento de mínima descrição (MDL), na teoria de matriz aleatória (RMT) e, ainda, o estimador baseado em norma (NB). No Capítulo 4 será apresentado o estimador baseado em norma melhorado (iNB). No Capítulo 5 temos os resultados das simulações realizadas para comparar o desempenho do iNB com o do AIC, do MDL, do RMT e do NB. Finalmente, no Capítulo 6, são apresentadas as conclusões e as propostas para trabalhos futuros.

As seguintes publicações foram geradas como resultado das pesquisas realizadas durante a elaboração dessa dissertação.

- D.A. Guimarães, G.H.F. Floriano and R.A.A. de Souza, **An Efficient and Simple Algorithm for Estimating the Number of Sources via $\ell_{0.55}$ -Norm**. International Telecommunications Symposium, ITS2014, São Paulo, Brazil, Aug. 2014. **Publicado.**
- D.A. GUIMARÃES, G.H.F. FLORIANO and L.S. CHAVES, **A Tutorial on CVX System for Modeling and Solving Convex Optimization Problems**. Revista IEEE América Latina (IEEE Latin America Transactions). Vol. 3, Issue 5, May 2015, pp. 1228-1257. **Publicado.**

Capítulo 2

Referencial Teórico

Neste capítulo são apresentados os principais conceitos que fundamentam os métodos de estimação do número de fontes a partir da matriz de covariância do sinal recebido por múltiplos sensores. São conceitos oriundos da Teoria da Informação e da Teoria de Matrizes Aleatórias, os quais serão discutidos numa profundidade que entendemos ser a suficiente para o bom entendimento dos métodos de estimação, mas que certamente não abrange toda a amplitude dessas teorias.

2.1 Fundamentos da Teoria da Informação

A Teoria da Informação, que também pode ser chamada de Teoria da Comunicação, é a área do conhecimento humano que estuda o tratamento matemático da informação e a modelagem dos processos de comunicação. Especificamente no ramo das telecomunicações a aplicação da Teoria da Informação possibilita, entre outras coisas, obter resultados que permitem melhorar a eficiência do processo de comunicação em estudo e, também, estabelecer limites para essa eficiência. O estudo moderno dessa teoria tem como marco inicial a publicação em 1948 do artigo “*A Mathematical Theory of Communications*” de Claude Shannon [17].

Nesse artigo Shannon define como problema fundamental da comunicação o de reproduzir em um ponto, de forma exata ou aproximada, a mensagem selecionada em

outro ponto. Também afirma que essas mensagens frequentemente têm significado, isto é, elas se referem a, ou estão correlacionadas de acordo com, algum sistema com certas entidades físicas ou conceituais. Contudo, estes aspectos semânticos da comunicação são irrelevantes para o problema de engenharia. Na engenharia, o importante é considerar que a mensagem a ser comunicada é selecionada de um conjunto de possíveis mensagens. Assim o sistema de comunicação deve ser concebido para operar para cada seleção possível e não apenas para aquela que vai ser escolhida, uma vez que essa é desconhecida no momento da sua concepção [17].

Se esse conjunto tem um número finito de mensagens e se cada uma delas apresenta uma probabilidade de ser selecionada, então a incerteza quanto à informação a ser recebida diminui quando a mensagem é recebida. A quantificação da redução da incerteza está diretamente ligada à probabilidade de ocorrência da mensagem, ou seja, o recebimento de uma mensagem pouco provável provoca uma maior redução da incerteza e, portanto, contém mais informação que uma mensagem com alta probabilidade de seleção. A partir disso pode-se definir a quantidade de informação de uma mensagem com base na sua incerteza ou dificuldade de seleção, conforme será discutido no próximo item.

Para Shannon um sistema genérico de comunicação, esquematizado conforme mostra a Figura 2.1, é constituído por cinco componentes principais, a saber:

- 1ª) A **fonte** de informação, onde é produzida a mensagem ou sequência de mensagens a serem comunicadas ao receptor;
- 2ª) O **transmissor** ou codificador, que opera de alguma forma sobre essa mensagem, transformando-a num sinal adequado à transmissão através do canal;
- 3ª) O **canal**, que representa o meio físico utilizado para transmitir o sinal e onde é adicionado ao mesmo um ruído que irá alterá-lo;
- 4ª) O **receptor**, que realiza a operação inversa a da realizada pelo transmissor, reconstruindo a mensagem a partir do sinal recebido;
- 5ª) O **destino**, que é a pessoa ou coisa a quem a mensagem se destina.

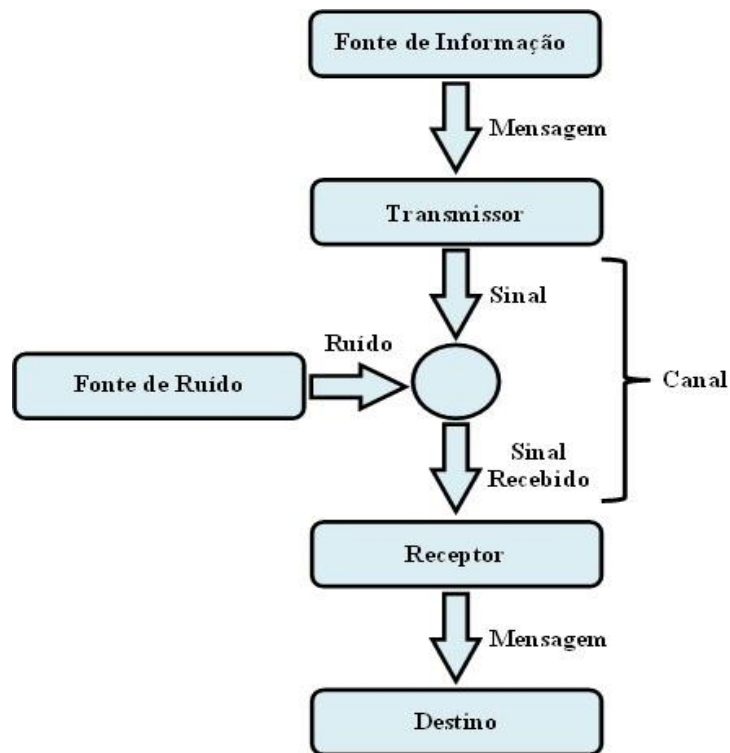


Figura 2.1: Representação esquemática de um sistema geral de comunicação.

Nesse sistema genérico, a fonte de informação produz as mensagens. O conjunto das palavras-código que possibilita representar todas as mensagens possíveis geradas por essa fonte constitui um código. O transmissor ou codificador é o agente capaz de converter (mapear) a mensagem gerada pela fonte num sinal composto por componentes do código e na forma adequada à transmissão através do canal. O sinal fornecido pelo transmissor receberá no canal a adição de ruídos, chegando ao receptor. O receptor é o agente capaz de decodificar esse sinal, ou seja, desfazer o mapeamento realizado pelo transmissor, entregando então a mensagem ao destino.

Shannon também classificou os sistemas de comunicação em três categorias: discretos, contínuos e mistos. Por discreto entende-se aquele onde tanto a mensagem quanto o sinal podem ser representados por uma sequência de símbolos discretos. Um sistema de comunicação é considerado contínuo quando a mensagem e o sinal são ambos representados por funções contínuas. Já um sistema é classificado como misto se tanto variáveis discretas quanto contínuas são empregadas na sua representação. Shannon partiu do estudo dos sistemas discretos e usou esse caso como base para o estudo dos outros dois casos [17].

2.2 A medida da informação: Entropia

Conforme foi mencionado no item anterior, Shannon definiu que a quantidade de informação contida numa mensagem está diretamente relacionada à sua incerteza ou dificuldade de previsão. Assim, considerando essa mensagem gerada por uma fonte discreta sem memória, que pode ser modelada por uma variável aleatória X , a quantidade de informação nela contida depende das probabilidades dos símbolos utilizados na sua composição: $\{P(X = x_1) = p_1, \dots, P(X = x_N) = p_N\}$. Dessa forma, quanto maior é a incerteza contida numa mensagem, maior é a quantidade de informação que ela transmite. Para quantificar essa incerteza Shannon propôs uma função das probabilidades dos símbolos da fonte, que indicou por H , ou seja, $H(X) = H(p_1, \dots, p_N)$, a qual atende as seguintes condições:

- I. H é uma função contínua das probabilidades dos símbolos (p_i).
- II. Se a fonte apresenta símbolos equiprováveis, isto é, $p_i = 1/N$ ($i = 1, \dots, N$) então H é uma função monotônica crescente de N . Isso significa que quanto maior é a quantidade de escolhas equiprováveis, maior é a incerteza.
- III. Se X e Y são fontes independentes, a incerteza conjunta dessas fontes será igual à soma das incertezas individuais, ou seja, $H(X, Y) = H(X) + H(Y)$.
- IV. Se uma escolha pode ser dividida em duas escolhas sucessivas, o H original deve ser igual à soma ponderada dos valores individuais de H . Assim, por exemplo, considere que os símbolos gerados por uma fonte sejam divididos em dois grupos A e B. Assim, a probabilidade da fonte gerar um símbolo do grupo A será $p_A = p_1 + \dots + p_k$ e a probabilidade do símbolo gerado ser do grupo B será $p_B = p_{k+1} + \dots + p_N$, com $N \geq 3$ e $1 \leq k < N$ [18]. Assim, atendendo a lei de Bayes, temos que

$$H(p_1, \dots, p_N) = H(p_A, p_B) + p_A H\left(\frac{p_1}{p_A}, \dots, \frac{p_k}{p_A}\right) + p_B H\left(\frac{p_{k+1}}{p_B}, \dots, \frac{p_N}{p_B}\right) \quad (2.1)$$

Pode-se provar que a única função que atende as condições anteriores assume a forma [17]

$$H(p_1, \dots, p_N) = -K \sum_{i=1}^N p_i \log p_i, \quad (2.2)$$

onde K é uma constante arbitrária positiva. Assumindo o valor unitário para essa constante temos

$$H(p_1, \dots, p_N) = -\sum_{i=1}^N p_i \log p_i = \sum_{i=1}^N p_i \log \frac{1}{p_i}. \quad (2.3)$$

Por analogia a uma função formalmente idêntica utilizada na física estatística, a função H também foi designada na teoria da informação como **entropia**. A entropia normalmente é expressa em *bits/símbolo*, quando utilizamos (2.3) com logaritmo de base 2, ou em *nats/símbolo*, quando utilizamos (2.3) com logaritmo de base e (logaritmo natural).

Qualquer que seja a fonte (X) tem-se que

$$0 \leq H(X) \leq \log N. \quad (2.4)$$

Se todas as probabilidades forem nulas com exceção de apenas uma que assume o valor unitário, isto é, $p_i = 0$ e $p_k = 1$ ($i=1, \dots, N ; i \neq k$), temos a entropia mínima $\min(H(X)) = 0$, o que faz sentido já que nesse caso temos certeza acerca da mensagem emitida pela fonte e então a entropia (incerteza) associada a essa mensagem desaparece. Por outro lado se todos os símbolos emitidos pela fonte são equiprováveis, ou seja, se $p_i = 1/N$ ($i=1, \dots, N$), a incerteza acerca da mensagem será máxima, portanto a entropia nessa situação é máxima e dada por

$$\max(H(X)) = -\sum_{i=1}^N p_i \log p_i = -\sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \log \frac{1}{N} = -N \frac{1}{N} \log \frac{1}{N} = \log \left(\frac{1}{N}\right)^{-1} = \log N.$$

Para ilustrar o que acaba de ser exposto, seja uma fonte binária sem memória que produz um símbolo qualquer com probabilidade p e o outro símbolo com probabilidade $1-p$. A entropia dessa fonte, em *bits/símbolo*, é dada por

$$H(X) = H(p, 1-p) = -p \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p), \quad (2.5)$$

onde o valor da entropia varia em função de p de acordo com a curva apresentada na Figura 2.2 .

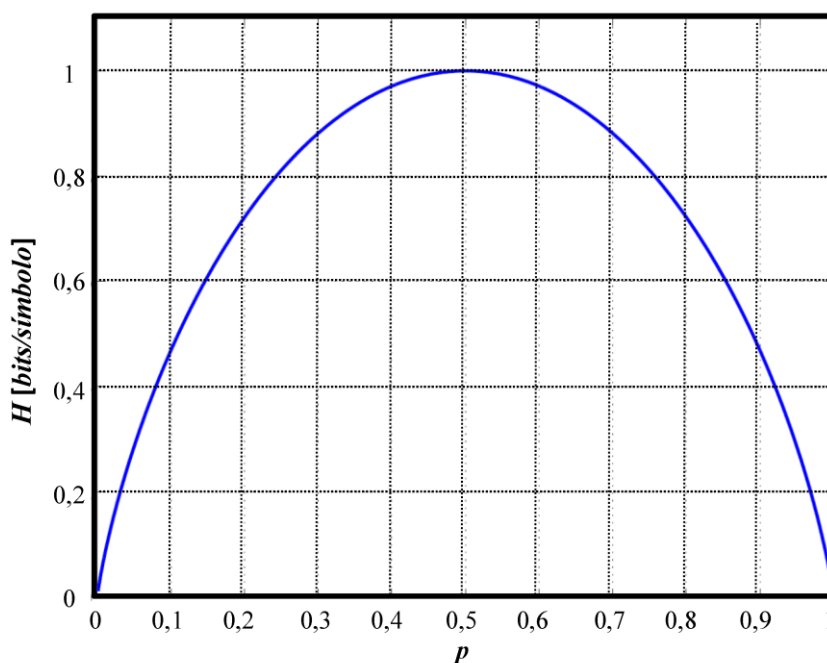


Figura 2.2: Entropia (H) de uma fonte binária sem memória em função da probabilidade (p) de um dos símbolos.

Consideremos agora o caso em que temos duas variáveis aleatórias: a variável X com N possibilidades e a variável Y com M possibilidades, e seja $p(x, y)$ a probabilidade de ocorrência conjunta, primeiro de x e y em seguida. A entropia conjunta dessas variáveis corresponde à entropia da variável aleatória constituída pelo par (X, Y) e é dada por

$$H(X, Y) = -\sum_x \sum_y p(x, y) \log p(x, y). \quad (2.6)$$

Como $H(X) = -\sum_{x,y} p(x, y) \log \sum_y p(x, y)$ e $H(Y) = -\sum_{x,y} p(x, y) \log \sum_x p(x, y)$

pode-se demonstrar que [17]

$$0 \leq H(X, Y) \leq H(X) + H(Y), \quad (2.7)$$

ou seja, a entropia conjunta será sempre menor ou igual a soma das entropias individuais. A igualdade só ocorre quando as variáveis X e Y são independentes, isto é, $p(x, y) = p(x)p(y)$ para todo para (x, y) .

Ainda para as variáveis aleatórias X e Y pode-se calcular a entropia de X condicionada a um valor específico de Y ($Y = y$) da seguinte maneira

$$H(X | Y = y) = - \sum_x p(x | y) \log p(x | y). \quad (2.8)$$

Já a entropia de X condicionada a todos os valores possíveis de Y é obtida por

$$\begin{aligned} H(X | Y) &= \sum_y p(y) H(X | Y = y) \\ &= - \sum_y p(y) \sum_x p(x | y) \log p(x | y) \\ &= - \sum_y \sum_x p(x, y) \log p(x | y). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Pode-se então estabelecer a relação que é conhecida como *lei de Bayes para entropias* que é dada por [18]

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y | X) = H(Y) + H(X | Y). \quad (2.10)$$

Como já vimos, se X e Y são variáveis aleatórias independentes, temos que $H(X, Y) = H(X) + H(Y)$ e nesse caso

$$H(X | Y) = H(X) \text{ e } H(Y | X) = H(Y), \quad (2.11)$$

isto é, a entropia condicional é igual a entropia não condicional.

Manipulando a *lei de Bayes* para entropias, dada em (2.10), podemos escrever a diferença entre a entropia de uma das variáveis aleatórias com a sua entropia

condicionada à outra variável, diferença essa que é denominada *Informação Mútua* e denotada por $I(X;Y)$, conforme indicado a seguir

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X). \quad (2.12)$$

Em (2.10) temos $H(X,Y) = H(Y) + H(X|Y) \Rightarrow H(X|Y) = H(X,Y) - H(Y)$ que permite reescrever (2.12) como

$$I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y). \quad (2.13)$$

Essa última expressão indica que a informação mútua é uma medida da dependência entre as variáveis aleatórias X e Y . No caso em que essas variáveis são independentes, não há dependência entre elas e de acordo com (2.7) $H(X,Y) = H(X) + H(Y)$, que em (2.13) nos leva a um valor nulo informação mútua, ou seja, $I(X;Y) = 0$.

2.3 A divergência de Kullback-Leibler

Sejam duas funções de distribuição de probabilidade $f_1(x)$ e $f_2(x)$ definidas sobre um mesmo alfabeto \mathcal{X} . A *Divergência de Kullback-Leibler* (D_{KL}) é um indicador da dissemelhança entre essas duas funções e é dada por

$$D_{\text{KL}}[f_1, f_2] = \sum_{x \in \mathcal{X}} f_1(x) \ln \left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right), \quad (2.14)$$

que pode ser entendida como a diferença entre a entropia de $f_1(x)$ com a entropia cruzada de $f_1(x)$ e $f_2(x)$, pois

$$D_{\text{KL}}[f_1, f_2] = \sum_{x \in \mathcal{X}} f_1(x) \ln f_1(x) - \sum_{x \in \mathcal{X}} f_1(x) \ln f_2(x). \quad (2.15)$$

Essa divergência é não simétrica, pois geralmente $D_{\text{KL}}[f_1, f_2] \neq D_{\text{KL}}[f_2, f_1]$, portanto não pode ser considerada uma medida de distância entre as funções de probabilidade. Pode-se demonstrar que [18], para qualquer par de funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$ definidas sobre o alfabeto \mathcal{X} , a divergência de Kullback-Leibler é sempre não

negativa e com igualdade se e somente se $f_1(x) = f_2(x)$ para qualquer $x \in \mathcal{X}$, ou seja,

$$D_{\text{KL}}[f_1, f_2] \geq 0. \quad (2.16)$$

A partir de (2.12) e (2.15) pode-se mostrar que a informação mútua entre duas variáveis aleatórias X e Y é igual à divergência de Kullback-Leibler entre a sua função de probabilidade conjunta $f_1(x, y)$ e outra função probabilidade $f_2(x, y)$ na qual essas variáveis aleatórias são independentes: $f_2(x, y) = f_2(x)f_2(y)$, isto é

$$I(X; Y) = D_{\text{KL}}[f_1, f_2] = \sum_x \sum_y f_1(x, y) \ln \left(\frac{f_1(x, y)}{f_2(x, y)} \right), \quad (2.17)$$

A *desigualdade da informação* estabelece a não negatividade da informação mútua para quaisquer variáveis aleatórias X e Y , ou seja

$$I(X; Y) \geq 0, \quad (2.18)$$

na qual a igualdade só acontece se as variáveis aleatórias X e Y são independentes.

2.4 O critério da máxima verossimilhança

Proposto em 1912 por Ronald Aylmer Fisher, o critério da máxima verossimilhança (*maximum likelihood*) tornou-se uma importante ferramenta da inferência estatística, sendo muito utilizado na estimativa dos parâmetros de um modelo estatístico. Faremos aqui uma breve explanação desse critério. Para tanto, seja uma variável aleatória X que tem uma distribuição dependente de um único parâmetro $\theta \in \Theta$, onde Θ representa o espaço paramétrico [19]. Para um valor fixo x da variável, a função de verossimilhança $f(x; \theta)$ associa a densidade $p(x|\theta)$ a cada um dos possíveis valores de θ , ou seja,

$$f(x; \theta) = p(x | \theta). \quad (2.19)$$

Considerando que $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ é um vetor de observações de dimensão N , com função de densidade de probabilidade conjunta $p(\mathbf{x} | \theta)$, a função de verossimilhança de θ é $f(\mathbf{x}; \theta) = p(\mathbf{x} | \theta)$. Sendo X_1, \dots, X_N variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, essa função será dada por

$$f(\mathbf{x}; \theta) = \prod_{i=1}^N p(x_i | \theta), \quad (2.20)$$

onde θ pode ser um escalar, um vetor ou uma matriz de parâmetros.

O estimador de máxima verossimilhança de θ , que indicaremos por $\hat{\theta}$, é o valor do espaço paramétrico que maximiza a função de verossimilhança (2.20), ou seja,

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} f(\mathbf{x}; \theta). \quad (2.21)$$

Caso θ seja um escalar, o estimador de máxima verossimilhança $\hat{\theta}$ pode ser obtido através da solução, algébrica ou computacional, da equação de verossimilhança dada por

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}; \theta)}{\partial \theta} = 0. \quad (2.22)$$

Para garantir que a solução de (2.22) seja realmente um ponto de máximo devemos ter, no ponto do estimador, a segunda derivada da função negativa, ou seja

$$\left. \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}; \theta)}{\partial \theta^2} \right|_{\theta = \hat{\theta}} < 0. \quad (2.23)$$

No caso em que θ é um vetor ou uma matriz de parâmetros, devemos resolver a equação de verossimilhança (2.22) para cada um dos seus elementos, isto é

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_{ik}} = 0; \forall i, k. \quad (2.24)$$

Podemos verificar as condições de segunda ordem a partir da matriz Hessiana ($\mathbf{H}[f]$) da função de verossimilhança, cujos elementos são dados por

$$h_{f_{ik}} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_k}. \quad (2.25)$$

Para garantir que as soluções encontradas através de (2.24) sejam os correspondentes pontos de máximo, a condição é que a matriz

$$\mathbf{H}[f] \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}}, \quad (2.26)$$

seja uma matriz negativa definida.

Para diminuir o esforço de cálculo (algébrico ou computacional) exigido na determinação do estimador de máxima verossimilhança, é comum trabalhar na escala logarítmica. Como o logaritmo natural é estritamente crescente, o valor de θ que maximiza a função log verossimilhança ($\ln f(x; \theta)$) é o mesmo que maximiza a função de verossimilhança ($f(x; \theta)$). Reescrevendo então a equação (2.21) para a função log verossimilhança, temos

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \ln f(x; \theta). \quad (2.27)$$

No caso de interesse desse trabalho, seja o vetor observado \mathbf{x} uma variável aleatória de dimensão m associada a um sinal recebido em um instante de tempo discreto. Seja também $\boldsymbol{\theta}$ um vetor de parâmetros desconhecidos, associado a esse sinal [2] [16] [19], $\boldsymbol{\gamma}$ é um vetor desconhecido, $\mu(\boldsymbol{\gamma})$ uma função determinística de $\boldsymbol{\gamma}$ e $\boldsymbol{\eta}$ o vetor que representa o ruído aditivo gaussiano branco de média zero e matriz de covariância igual a $\sigma^2 \mathbf{I}$. Assim podemos escrever \mathbf{x} como

$$\mathbf{x} = \mu(\boldsymbol{\gamma}) + \boldsymbol{\eta}, \quad (2.28)$$

e sua função verossimilhança como

$$f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} (\sigma^2)^{m/2}} e^{-\frac{\|\mathbf{x} - \mu(\boldsymbol{\gamma})\|^2}{2\sigma^2}}, \quad (2.29)$$

onde

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma} \\ \sigma^2 \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

Assim, de acordo com (2.27) o vetor estimado por máxima verossimilhança $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ para o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$ é dado por

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} \ln f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}). \quad (2.31)$$

A dimensão do vetor estimado $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, denominada *ordem do modelo*, está associada ao número de fontes emissoras que compõe o sinal recebido pelo arranjo de sensores, cuja determinação é o interesse desse trabalho [19].

2.5 O critério de máxima a posteriori

Considere o conjunto de hipóteses mutuamente excludentes \mathcal{H}_k $_{k=1}^K$, onde k representa a ordem do modelo em análise e K é um conhecido limite superior dessa ordem [16] [19]. Seja $f_k(\mathbf{x} | \mathcal{H}_k)$ a função densidade de probabilidade (FDP) do vetor aleatório \mathbf{x} condicionada à hipótese \mathcal{H}_k e $P(\mathcal{H}_k)$ a probabilidade a priori dessa hipótese.

Se $f_k(\mathbf{x} | \mathcal{H}_k)$ e $P(\mathcal{H}_k)$ são conhecidas podemos escrever a probabilidade de $P(\mathcal{H}_k)$ condicionada ao sinal \mathbf{x} como

$$f_k \mathcal{H}_k | \mathbf{x} = \frac{f_k \mathbf{x} | \mathcal{H}_k \cdot P_k \mathcal{H}_k}{P \mathbf{x}} . \quad (2.32)$$

Pelo critério de máxima a posteriori (MAP) a ordem do modelo k é aquela que maximiza (2.32). Como o denominador $P \mathbf{x}$ não depende de k , podemos escrever que o MAP é dado por

$$\max_{k \in 1, K} f_k \mathcal{H}_k | \mathbf{x} = \max_{k \in 1, K} f_k \mathbf{x} | \mathcal{H}_k \cdot P_k \mathcal{H}_k . \quad (2.33)$$

Como geralmente as hipóteses $\{\mathcal{H}_k\}_{k=1}^K$ são a priori equiprováveis [19], o critério MAP pode ser reduzido a

$$\max_{k \in 1, K} f_k \mathcal{H}_k | \mathbf{x} = \max_{k \in 1, K} f_k \mathbf{x} | \mathcal{H}_k . \quad (2.34)$$

É importante observar que estimar a hipótese é equivalente estimar o vetor de parâmetros do modelo. Outro ponto importante que deve ser ressaltado é a possibilidade de se atribuir a essa estimativa uma *probabilidade de detecção correta* P_c , obtida sobre todo o conjunto de todas as hipóteses possíveis [19], isto é,

$$P_c = P \text{ escolher } \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_1 = \text{correta} \cup \dots \cup \text{escolher } \mathcal{H}_K \cap \mathcal{H}_K = \text{correta} . \quad (2.35)$$

Pode-se demonstrar que o critério MAP maximiza P_c e, portanto, é um critério ótimo para a estimativa de ordem do modelo [19]. Porém, sua aplicação direta não é possível uma vez que a função densidade de probabilidade do vetor observado sobre as hipóteses $f_k \mathbf{x} | \mathcal{H}_k$ não é conhecida. Uma possibilidade, para contornar essa dificuldade da aplicação do critério MAP na detecção da ordem do modelo, é a adoção de uma FDP a priori para o vetor de parâmetros desconhecido $\boldsymbol{\theta}$ e integrar $f_k \mathbf{x}, \boldsymbol{\theta} | \mathcal{H}_k$ em relação a essa FDP para obter a FDP associada a cada hipótese $f_k \mathbf{x} | \mathcal{H}_k$ [16].

2.6 Aplicação da divergência de Kullback-Leibler (KL)

A divergência de Kullback-Leibler (KL) pode ser aplicada no desenvolvimento de métodos para a estimação da ordem do modelo. Os métodos assim obtidos são conhecidos como métodos baseados na teoria da informação [19]. Para tanto, seja \mathbf{x} o vetor de amostras aleatórias do sinal recebido, $\boldsymbol{\theta}$ o vetor de parâmetros, $f_{\mathbf{x},\boldsymbol{\theta}}$ a FDP verdadeira do vetor \mathbf{x} e $\hat{f}_{\mathbf{x},\boldsymbol{\theta}}$ a FDP estimada para esse vetor. Assim, de acordo com (2.14) temos que a divergência de Kullback-Leibler entre essas FDP's é dada por

$$D_{\text{KL}}[f_{\mathbf{x},\boldsymbol{\theta}}, \hat{f}_{\mathbf{x},\boldsymbol{\theta}}] = \int f_{\mathbf{x},\boldsymbol{\theta}} \ln \frac{f_{\mathbf{x},\boldsymbol{\theta}}}{\hat{f}_{\mathbf{x},\boldsymbol{\theta}}} d\mathbf{x}, \quad (2.36)$$

Essa divergência pode ser encarada como uma medida da perda de informação provocada pela utilização da FDP estimada em substituição a FDP verdadeira. Podemos reescrever (2.36), utilizando o valor esperado $E_f[\cdot]$ em relação à FDP verdadeira $f_{\mathbf{x},\boldsymbol{\theta}}$, da seguinte forma

$$\begin{aligned} D_{\text{KL}}[f_{\mathbf{x},\boldsymbol{\theta}}, \hat{f}_{\mathbf{x},\boldsymbol{\theta}}] &= E_f \left[\ln \frac{f_{\mathbf{x},\boldsymbol{\theta}}}{\hat{f}_{\mathbf{x},\boldsymbol{\theta}}} \right] \\ &= E_f \left[\ln f_{\mathbf{x},\boldsymbol{\theta}} \right] - E_f \left[\ln \hat{f}_{\mathbf{x},\boldsymbol{\theta}} \right], \end{aligned} \quad (2.37)$$

e podemos provar que $D_{\text{KL}}[f_{\mathbf{x},\boldsymbol{\theta}}, \hat{f}_{\mathbf{x},\boldsymbol{\theta}}]$ é sempre não negativa, sendo nula apenas no caso de $f_{\mathbf{x},\boldsymbol{\theta}} = \hat{f}_{\mathbf{x},\boldsymbol{\theta}}$ [19].

A divergência de KL não pode ser aplicada diretamente para estimação da ordem do modelo já que $f_{\mathbf{x},\boldsymbol{\theta}}$ não é conhecida. Essa aplicação pode ser realizada através da utilização de uma estimativa para a divergência de KL, que indicaremos por $\hat{D}_{\text{KL}}[f_{\mathbf{x},\boldsymbol{\theta}}, \hat{f}_{\mathbf{x},\boldsymbol{\theta}}]$ em substituição da real divergência $D_{\text{KL}}[f_{\mathbf{x},\boldsymbol{\theta}}, \hat{f}_{\mathbf{x},\boldsymbol{\theta}}]$, escolhendo-se uma FDP estimada $\hat{f}_{\mathbf{x},\boldsymbol{\theta}}$ adequada ao modelo em análise. Assim, a estimativa da ordem do modelo será obtida pela minimização de $\hat{D}_{\text{KL}}[f_{\mathbf{x},\boldsymbol{\theta}}, \hat{f}_{\mathbf{x},\boldsymbol{\theta}}]$ que, conforme podemos observar através de (2.37), corresponde a maximizar $E_f \left[\ln \hat{f}_{\mathbf{x},\boldsymbol{\theta}} \right]$, denominada informação relativa de Kullback-Leibler e indicada por

$$I_{\text{KL}}(f, \hat{f}) = E_f[\ln \hat{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})]. \quad (2.38)$$

Uma possível escolha para $\hat{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ é a função densidade obtida com parâmetros estimados $f(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ que, uma vez substituída em (2.38), fornece

$$I_{\text{KL}}(f, f(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}})) = E_f[\ln f(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}})]. \quad (2.39)$$

Como a FDP verdadeira $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ não é conhecida, não é possível calcular I_{KL} já que o valor esperado de $\ln f(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ é tomado sobre essa FDP. A opção de utilizar o estimador não polarizado trivial $\ln f(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ para o valor esperado não é razoável já que a ordem do modelo obtida através de sua maximização pode falhar completamente em alguns casos [19].

A melhor opção é aproximar $\ln f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ pela expansão em série de Taylor em torno de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Utilizando essa aproximação em (2.38), conforme detalhado em [19], obtemos como estimativa para ordem do modelo o valor de k que minimiza a expressão

$$-2\ln f(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) + k. \quad (2.40)$$

De acordo com Akaike [12] a ordem do modelo obtida pela minimização de (2.40) normalmente é superestimada, já que uma redução de $-2\ln f(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ é pouco compensada pelo aumento de k . Ou seja, o termo k em (2.40) penaliza a superestimação, e por isso é conhecido por termo de correção, e é responsável por tornar não polarizada a estimativa da divergência de KL.

Conforme discutido na seção 2.4, podemos obter uma estimativa máxima verossimilhança para o vetor de parâmetros desconhecidos $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ e então obter uma estimativa da FDP do sinal por $\hat{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = f(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ [16]. Como na estimação da ordem do modelo para a estimação do número de fontes, $\hat{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, e consequentemente $\ln \hat{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, é função dos autovalores $\{\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m\}$ da matriz de covariância do sinal recebido. No caso do ruído Gaussiano, sinais das fontes com distribuição Gaussiana e matriz de canal com posto máximo (*full rank*), tal função de log-verossimilhança é dada por [2]

$$\ln f(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = n \ln \frac{\prod_{i=k+1}^m \lambda_i}{\left(\frac{1}{m-k} \sum_{i=k+1}^m \lambda_i \right)^{m-k}}. \quad (2.41)$$

Assim, a partir de (2.40) e (2.41) a estimativa para o número de fontes será o valor de k que minimiza a expressão

$$-2n \ln \frac{\prod_{i=k+1}^m \lambda_i}{\left(\frac{1}{m-k} \sum_{i=k+1}^m \lambda_i \right)^{m-k}} + \text{ termo de correção}. \quad (2.42)$$

Nessa expressão (2.42) o número de parâmetros livres é $k(2m-k)+1$ e o *termo de correção* é função desse número [2]. Os métodos que utilizam (2.42) para estimar o número de fontes, conhecidos como métodos baseados na Teoria da Informação, diferem entre si pela maneira que estabelecem o termo de correção, ou seja, como penalizam a sobrestimação da ordem do modelo.

2.7 A teoria das matrizes aleatórias (RMT)

A teoria das matrizes aleatórias (RMT) ganhou visibilidade na década de 1950 quando o físico Eugene Paul Wigner a utilizou no estudo do espalhamento de ressonâncias de partículas com núcleos pesados em reações nucleares lentas. Desde então essa teoria progressivamente vem ampliando seu campo de aplicação. Atualmente a RMT é utilizada, entre outros, em estudos que envolvem funções L e a hipótese de Riemann, permutações aleatórias, teoria das cordas, sistemas caóticos, ótica, finanças, movimento Browniano, gravidade quântica. Nesse trabalho estamos interessados na sua aplicação na teoria da informação, especificamente, no problema da estimativa do número de fontes dos sinais incidentes num arranjo de sensores. Faremos a seguir uma breve apresentação dos principais conceitos envolvidos nessa aplicação. Para tanto, consideremos o problema da escolha entre as duas hipóteses seguintes [3]

\mathcal{H}_0 : nenhum sinal recebido ,

\mathcal{H}_1 : apenas um sinal recebido com variância do ruído conhecida.

De acordo com (1.6), podemos modelar essas hipóteses através das expressões

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0 : \mathbf{R} &= \sigma^2 \mathbf{I} \\ \mathcal{H}_1 : \mathbf{R} &= \mathbf{H}\mathbf{R}_x\mathbf{H}^\dagger + \sigma^2 \mathbf{I} = \text{diag}(\theta, 0, \dots, 0) + \sigma^2 \mathbf{I},\end{aligned}\tag{2.43}$$

sendo que em \mathcal{H}_1 a matriz de covariância do sinal assume a forma de matriz diagonal [16].

Considere que a variância de ruído é conhecida *a priori*, $\sigma = 1$, e o sinal tem distribuição Gaussiana com variância θ também conhecida *a priori*. Então, para qualquer número de sensores (m) e de amostras (n) haverá para cada hipótese apenas uma FDP para os autovalores da matriz de covariância \mathbf{R} e assim a seleção das hipóteses pode ser realizada de forma ótima aplicando o teste da razão das funções de verossimilhança (*likelihood ratio test-LRT*) também conhecido por Lema de Neyman-Pearson. Através desse teste, com $n \rightarrow \infty$ e m fixo, podemos efetuar a distinção entre \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 (2.43) apenas pela observação do máximo autovalor da matriz de covariância do sinal recebido, assim como é preconizado pelo teste de máxima raiz de Roy (RLRT, *Roy's largest root test*) [3] [16].

De forma semelhante, considerando conhecida *a priori* da variância do ruído e do sinal recebido, podemos aplicar esse teste para distinguir entre as duas hipóteses seguintes

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0 &: \text{no mínimo } k - 1 \text{ sinais presentes,} \\ \mathcal{H}_1 &: \text{pelo menos } k \text{ sinais presentes.}\end{aligned}\tag{2.44}$$

A distinção entre as hipóteses \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 em (2.44) deve ser baseada somente na observação do k -ésimo autovalor (λ_k) da matriz de covariância do sinal recebido. Essa observação de λ_k corresponde a um teste de significância, no qual cada autovalor da matriz de covariância do sinal é comparado com um limiar determinado

em função do nível de confiança esperado sobre o resultado do teste, determinação essa ancorada nos elementos da RMT. Para tanto, considere $\hat{\mathbf{R}}$ a estimativa da matriz de covariância do sinal recebido (1.2) considerando apenas a presença do ruído. Para o limite conjunto $m, n \rightarrow \infty$, com $n/m \rightarrow c \geq 0$, a distribuição do máximo autovalor da matriz aleatória $\hat{\mathbf{R}}$ converge para a distribuição de Tracy-Widom $F_\beta(s)$, isto é

$$\Pr \left\{ \frac{\lambda_1 / \sigma^2 - \mu_{n,m}}{\xi_{n,m}} < s \right\} \rightarrow F_\beta(s), \quad (2.45)$$

onde utiliza-se $\beta = 1$ caso as amostras de ruído sejam reais e $\beta = 2$ caso elas sejam complexas. Já o parâmetro de centralização $\mu_{n,m}$ e o parâmetro de escala $\xi_{n,m}$ dependem apenas dos valores de n e m [3].

Conhecida a variância do ruído σ^2 , através do teste de máxima raiz de Roy (RLRT), a hipótese \mathcal{H}_0 de ausência de sinal é rejeitada se

$$\lambda_1 > \sigma^2 \mu_{n,m} + s(\alpha) \xi_{n,m}, \quad (2.46)$$

onde α é a probabilidade assintótica de falso alarme, que representa o nível de confiança esperado do resultado do teste, e $s(\alpha)$ é o limiar obtido através da inversão da expressão da distribuição de Tracy-Widom dada a seguir

$$F_\beta(s(\alpha)) = 1 - \alpha. \quad (2.47)$$

Uma vez que não existe uma expressão fechada para essa distribuição, $s(\alpha)$ pode ser calculada pela inversão numérica de (2.47), utilizando o pacote de rotinas em Matlab[®] disponíveis para *download* em [21].

Finalmente, é importante registrar todo o desenvolvimento que acabamos de apresentar está baseado no comportamento assintótico da distribuição da matriz de covariância do sinal recebido, ou seja, quando $m, n \rightarrow \infty$, com $n/m \rightarrow c \geq 0$. Contudo, também podemos obter bons resultados nos casos nos quais m e n apresentam valores finitos, desde que $\min(m, n) \gg 1$ e que a razão m/n ou n/m não seja elevada [3].

Capítulo 3

Estimadores do Número de Fontes

Nesse capítulo apresentamos uma breve discussão sobre quatro estimadores do número de fontes do sinal recebido por múltiplos sensores. Os dois primeiros são fundamentados na teoria da informação e bem conhecidos: o AIC e o MDL. O terceiro, que apesar de ser mais recente que os dois primeiros também já é bem difundido, é fundamentado na teoria de matrizes aleatórias: o RMT. O quarto é o estimador baseado em norma dos autovalores da matriz de covariância: o NB, que foi apresentado em 2014 por [16]. É justamente no estimador NB que está fundamentado o estimador proposto nessa dissertação: o iNB, o qual será apresentado no próximo capítulo. Faremos aqui apenas algumas observações gerais sobre o desempenho desses estimadores. Uma avaliação mais completa e fundamentada desse desempenho será apresentada no Capítulo 5.

3.1 O estimador baseado no Critério de informação de Akaike

Para estimar a ordem do modelo, em 1973 Akaike propôs o Critério de Informação Akaike (AIC, *Akaike information criterion*) [12][13]. Esse critério é amplamente aceito e utilizado principalmente pela sua simplicidade.

Conforme apresentado na seção 2.6, o AIC baseia-se na minimização da divergência de Kullback-Leibler (KL), utilizando como termo de correção (penalização) em (2.42) o dobro do número de parâmetros livres.

Então, a estimativa pelo AIC do número de fontes (\hat{p}) será o valor de k que minimiza, para $k = 0, 1, \dots, m - 1$, a expressão $AIC(k)$ dada por

$$\text{AIC}(k) = -2n \ln \frac{\prod_{i=k+1}^m \lambda_i}{\left(\frac{1}{m-k} \sum_{i=k+1}^m \lambda_i \right)^{m-k}} + 2k(2m - k). \quad (3.1)$$

É importante destacar que o estimador AIC tem como característica intrínseca o fato de não ser *consistente*, isto é, nunca alcança uma probabilidade de detecção correta unitária ($P_c = 1$), apresentando sempre uma probabilidade não nula de sobrestimação (P_{se}). Para altos valores da relação SNR do sinal recebido temos que a probabilidade de sobrestimação tende a ser o complementar da probabilidade de detecção correta, ou seja, $P_{se} \rightarrow (1 - P_c)$, isso porque quando o estimador AIC erra, esse erro vem de uma estimação do número de fontes maior que o real ($\hat{p} > p$). Já para baixos valores de SNR geralmente ocorre o oposto, ou seja, na maioria das vezes o erro ocorrido é de subestimação [16].

3.2 O estimador baseado no comprimento de mínima descrição

Em 1978 Schwarz apresentou seu critério de informação para a avaliação de modelos. Para prová-lo, Schwarz utilizou um argumento Bayesiano e, por isso, seu critério ficou mais conhecido como Critério de informação Bayesiano (BIC, *Bayesian information criterion*) [16]. Assim como o AIC, o BIC se fundamenta na minimização da divergência de KL. Para tanto o BIC utiliza uma FDP *a priori* do parâmetro a ser estimado, $f(\boldsymbol{\theta})$. Isso é o mesmo que ocorre no critério MAP com as probabilidades *a priori* das hipóteses, conforme apresentado na seção 2.5 do capítulo anterior. A FDP $f(\boldsymbol{\theta})$ é utilizada uma vez que no BIC é adotada uma aproximação um pouco diferente da adotada no AIC na aproximação da FDP desconhecida do modelo em torno do vetor de parâmetros estimados [16]. No desenvolvimento matemático do BIC o teorema de Bayes é empregado para relacionar as probabilidades *a priori* e *a posteriori*, de forma similar ao MAP.

Esse desenvolvimento leva a uma expressão similar a (2.42), com termo de correção formado a partir do número de parâmetros livres e de um fator $\ln n$. Assim, a estimativa do número de fontes (\hat{p}) será, para $k = 0, 1, \dots, m - 1$, o valor de k que minimiza a expressão $BIC(k)$ dada por

$$BIC(k) = -2n \ln \frac{\prod_{i=k+1}^m \lambda_i}{\left(\frac{1}{m-k} \sum_{i=k+1}^m \lambda_i \right)^{m-k}} + k(2m - k) \ln n. \quad (3.2)$$

Já o estimador baseado no critério do comprimento de mínima descrição (MDL, *minimum description length*) foi desenvolvido em 1978 de forma paralela e independente por Schwarz [14] e Rissanen [15]. Schwarz realizou esse desenvolvimento através de uma abordagem Bayesiana, análoga à utilizada por ele no desenvolvimento do BIC. Já o desenvolvimento feito por Rissanen se fundamentou na compressão da informação, uma vez que ele considerou que cada modelo em seleção corresponde a uma forma de codificação de fonte dos dados observados. Nesse prisma, o melhor modelo é aquele que mais comprime tais dados, ou seja, é aquele que minimiza o comprimento médio do código e, por isso, ficou conhecido como critério do comprimento de mínima descrição (MDL).

Tanto Schwarz como Rissanen obtiveram um mesmo estimador MDL, apesar de utilizarem abordagens diferentes no desenvolvimento matemático. Outro ponto importante é que se esse desenvolvimento for realizado considerando um número fixo de parâmetros estimados então o estimador MDL é equivalente ao BIC [20]. Como isso é o que ocorre no contexto da estimativa do número de fontes, na avaliação de desempenho no Capítulo 5 só utilizaremos o MDL.

Assim, a estimativa do número de fontes (\hat{p}) será, para $k = 0, 1, \dots, m - 1$, o valor de k que minimiza a expressão $MDL(k)$ dada por

$$\text{MDL}(k) = -2n \ln \frac{\prod_{i=k+1}^m \lambda_i}{\left(\frac{1}{m-k} \sum_{i=k+1}^m \lambda_i \right)^{m-k}} + k(2m-k) \ln n. \quad (3.3)$$

Diferentemente do AIC, o estimador MDL é *consistente*, isto é, a probabilidade de detecção correta pode ser igual unitária ($P_c = 1$) dependendo das condições. Outra característica interessante do MDL é que a probabilidade de sobrestimação é sempre igual a zero ($P_{se} = 0$). Quando ocorre erro no MDL ele é de subestimação, ou seja, o número de fontes estimado é menor que o número correto.

3.3 O estimador baseado na teoria de matrizes aleatórias

Em 2009, Kritchman e Nadler apresentam um algoritmo, baseado na teoria de matrizes aleatórias (RMT), para um estimador do número de fontes de sinal. Esse algoritmo realiza uma sequência de testes de hipóteses, sendo que a cada teste é verificada a significância do k -ésimo autovalor da matriz de covariância do sinal recebido pelos m sensores [3], conforme foi apresentado na seção 2.7 do capítulo anterior.

Nesse teste, para $k = 1, 2, \dots, \min(m, n) - 1$, a hipótese \mathcal{H}_0 de (2.44) é rejeitada se

$$\lambda_k > \hat{\sigma}^2(k) C_{n,m,k}(\alpha), \quad (3.4)$$

onde $\hat{\sigma}^2(k)$ é a estimativa da variância de ruído a cada passo e $C_{n,m,k}(\alpha)$ é o parâmetro que depende do nível de confiança α ($\alpha \ll 1$) determinado pelo usuário. Esse parâmetro pode ser obtido por

$$C_{n,m,k}(\alpha) = \mu_{n,m-k} + s(\alpha) \xi_{n,m-k} \quad (3.5)$$

com $s(\alpha)$ obtido conforme (2.47) [3].

No teste de hipóteses (2.44), se somente $k - 1$ sinais estão presentes e o k -ésimo autovalor é devido ao ruído, então

$$\Pr \text{ rejeitar } \mathcal{H}_0 | \mathcal{H}_0 = \Pr \lambda_k > \sigma^2 C_{n,m,k}(\alpha) | \mathcal{H}_0 \approx \alpha. \quad (3.6)$$

Assim α corresponde ao valor aproximado da probabilidade de sobrestimação assintótica ($n \rightarrow \infty$) da estimação do número de fontes pelo método RMT, e o número de fontes estimado é obtido por

$$\hat{p} = \arg \min_k \lambda_k < \hat{\sigma}^2(k) C_{n,m,k}(\alpha) - 1. \quad (3.7)$$

Observa-se que a utilização da expressão anterior depende de uma estimativa da variância do ruído, $\hat{\sigma}^2(k)$. Kritchman e Nadler também apresentam em [3] um método para a estimação da variância $\hat{\sigma}^2(k)$.

3.4 O estimador baseado em norma

Em 2014 foi proposto em [16] um estimador empírico do número de fontes do sinal que incide num arranjo de sensores. Esse estimador foi desenvolvido baseado nas normas dos vetores associados aos autovalores da matriz de covariância desse sinal ($\hat{\mathbf{R}}$) e, por isso, foi denominado por estimador baseado em norma (NB - *Norm-based*). Sua concepção partiu da observação das curvas determinadas pelos autovalores da matriz de covariância, observação essa que permitiu constatar a ocorrência de pontos de inflexão justamente na transição entre os primeiros p autovalores e os $m - p$ restantes, exceto no caso onde temos $p = 0$ [16].

No algoritmo proposto para o estimador NB, primeiramente os autovalores da matriz de covariância são colocados em ordem decrescente de valor, obtendo a sequência $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. A partir dessa ordenação esses autovalores são normalizados de modo a assumirem valores no intervalo $[0,1]$, de acordo com a expressão

$$l_i = \frac{\lambda_i - \lambda_m}{\lambda_1 - \lambda_m} \quad i = 1, \dots, m \quad . \quad (3.8)$$

Os valores dos índices desses autovalores também são normalizados da seguinte forma

$$i^N = \frac{i-1}{m-1} \quad i = 1, \dots, m \quad . \quad (3.9)$$

Os autovalores normalizados $\{l_i\}$ são adicionalmente modificados por uma operação não linear, expressa por

$$\lambda_i^N = \sqrt{1 - (1 - l_i)^E} \quad i = 1, \dots, m \quad . \quad (3.10)$$

O papel desta operação não linear é arquear a curva dos autovalores. O controle desse arqueamento é realizado através do expoente E . Para ilustrar, consideremos o caso no qual o número de sensores é $m = 30$, o número de fontes é $p = 0$ e o número de amostras é $n = 5000$. A Figura 3.1 apresenta os autovalores normalizados $\{l_i\}$ desse caso e os seus respectivos autovalores normalizados e escalados λ_i^N , calculados a partir da expressão (3.10) para os expoentes $E = 2$, $E = 4$ e $E = 6$, todos em função dos índices normalizados $\{i^N\}$ conforme (3.9).

Uma vez que $p = 0$, os autovalores tendem a ser iguais. Assim, quando n cresce, a curva de $\{l_i\}$ tende a tornar-se uma linha reta. O efeito da modificação realizada por (3.10) é uma obter uma flexão desta curva de acordo com o valor atribuído para o expoente E . Para $E = 2$ e com um grande número de amostras (n), a curva que representa λ_i^N tende a um arco de circunferência de raio unitário. Para $E > 2$ as curvas de λ_i^N flexionam mais e se distribuem acima do arco de raio unitário. Se considerarmos o vetor $\mathbf{\Lambda}_i = [\lambda_i^N \ i^N]^T$, através da Figura 3.1 podemos constatar que para $E > 2$ temos $\|\mathbf{\Lambda}_1\| < \|\mathbf{\Lambda}_i\|$ ($i \neq 1$), onde $\|\mathbf{\Lambda}_i\|$ representa a norma Euclidiana de $\mathbf{\Lambda}_i$.

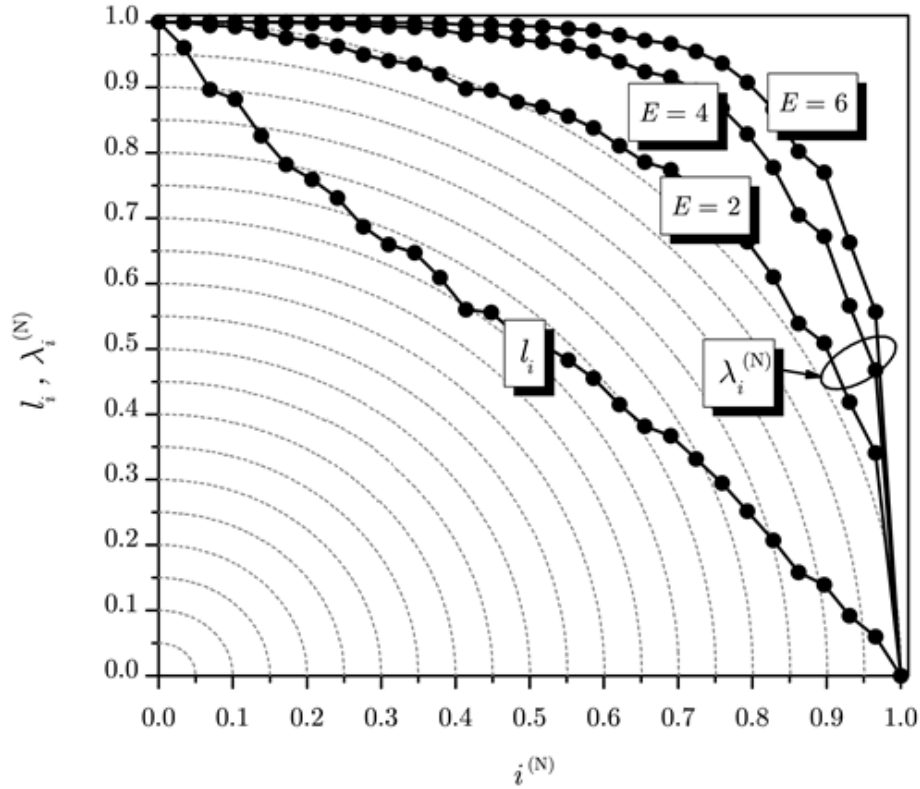


Figura 3.1: Gráfico dos autovalores e índices normalizados para $p = 0$, $m = 30$ e $n = 5000$.

Conforme indicado em [16], a escolha do expoente de flexão E utilizado em (3.10) pode ser realizada a partir de simulações, buscando o valor que maximiza a probabilidade de detecção correta (P_c), que é a probabilidade de estimar corretamente o número de fontes, para um conjunto específico de parâmetros do sistema. Em um cenário de maior relevância prática, E pode ser encontrado como o valor que maximiza o valor médio de P_c ao longo de vários conjuntos de parâmetros. Isso foi feito em [16] através de simulações que combinaram os seguintes conjuntos de parâmetros:

- $m \in \{10, 15, 20, 50\}$;
- $n \in \{50, 100, 1000\}$;
- $\text{SNR} \in \{-5 \text{ dB}, 0 \text{ dB}, 8 \text{ dB}, 10 \text{ dB}\}$;
- $p \in \{2, 5, 10, 15\}$.

A partir dos resultados dessas simulações o expoente ótimo encontrado foi $E = 5$.

Já para $p > 0$, os $m - p$ menores autovalores de $\hat{\mathbf{R}}$ tendem a ser a variância do ruído e isso torna evidente o ponto de inflexão da curva na transição da região dos p maiores autovalores e dos $m - p$ menores autovalores. Isto tende a tornar $\|\mathbf{\Lambda}_{p+1}\| < \|\mathbf{\Lambda}_i\|$ ($i \neq p + 1$), o que permite então utilizar a norma $\|\mathbf{\Lambda}_i\|$ para estimar o número de fontes. Esse é o fundamento principal do algoritmo NB.

No entanto, nos casos em que o número de fontes é pequeno, a localização dessa inflexão pode ocorrer mais para a esquerda e isso acarretará numa maior probabilidade de termos $\|\mathbf{\Lambda}_{p+1}\| > \|\mathbf{\Lambda}_i\|$ para $i > p + 1$. Para contornar esse problema devemos tomar do conjunto de vetores $\mathbf{\Lambda}_i$ apenas um subconjunto com K vetores para realizar a pesquisa que determina a menor norma euclidiana. A Figura 3.2 ilustra essa heurística para um subconjunto com $K = 15$ para $p = 0$ e $p = 5$, assumindo $m = 30$, $n = 5000$ e $E = 5$.

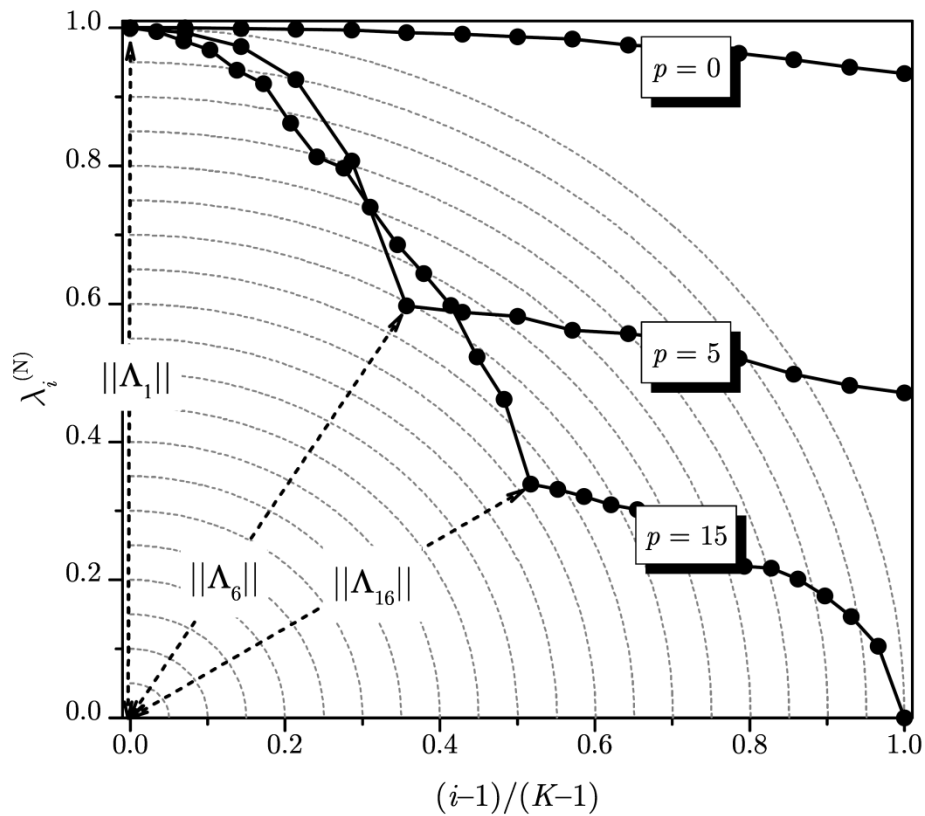


Figura 3.2: Autovalores e índices normalizados segundo o algoritmo NB.

Observe que a utilização de um subconjunto com $K < m$, é equivalente a empurrar o ponto de inflexão das curvas para a direita, reduzindo o possibilidade de sobrestimar do número de fontes. Se o número de fontes aumenta, todo o conjunto com $K = m$ do vetor é utilizado. Na Figura 3.2 temos também um exemplo disso para o caso $p = 15$.

A necessidade de determinar o melhor valor de K é o principal inconveniente do algoritmo NB, uma vez que é influenciada pelo número máximo de fontes esperado, uma informação que é não é conhecida à priori na maioria das aplicações.

A seguir apresentamos o algoritmo original do estimador NB [16].

Algoritmo 1 – Algoritmo NB

for $i = 1 \dots m$ **do**

Calcule $l_i = \frac{\lambda_i - \lambda_m}{\lambda_1 - \lambda_m}$

Calcule $i^N = \frac{i - 1}{m - 1}$

Calcule $\lambda_i^N = \sqrt{1 - (1 - l_i)^E}$

end for

Do $K = m / 2$

for $j = 1 \dots K$ **do**

Calcule $\Lambda_j = \left[\lambda_i^N \quad \frac{j - 1}{K - 1} \right]^T$

end for

Calcule $\hat{p} = \arg \min_j \|\Lambda_j\|_2 - 1$

Capítulo 4

Estimador Empírico Baseado em Norma Melhorado (iNB)

Neste capítulo propomos um novo estimador empírico do número de fontes dos sinais recebidos por múltiplos sensores. Esse novo estimador é uma melhoria do estimador baseado em norma (NB) discutido na seção 3.4 e, por esta razão, vamos chama-lo de Estimador Baseado em Norma Melhorado (iNB - *improved Norm-based*).

Conforme discutido na seção 3.4, o maior inconveniente apresentado pelo estimador NB é a necessidade de determinar a quantidade K de vetores do conjunto Λ_i que serão utilizados. No entanto, uma análise mais atenta da expressão (3.10) nos permite interpretar o escalonamento não linear dos autovalores como uma alteração ou distorção na distância espacial dos autovalores normalizados em relação a origem, tanto é que a norma euclidiana é calculada na sequência. Intuitivamente, podemos dizer que isso é bastante razoável. Contudo, podemos analisar essa questão sobre outra perspectiva, qual seja, a de manter inalterada a distância espacial dos autovalores normalizados e alterar apenas a métrica dessa distância. Esta outra perspectiva para o problema em questão está diretamente relacionada com a interpretação da norma genérica ℓ_u de um vetor. Recordando, a norma ℓ_u de um vetor \mathbf{x} d -dimensional, a qual é geralmente indicada por $\|\mathbf{x}\|_u$, é definido por:

$$\|\mathbf{x}\|_u = |x_1|^u + |x_2|^u + \dots + |x_d|^u \text{ }^{1/u}. \quad (4.1)$$

A fim de ilustrar como funciona o raciocínio advindo dessa nova perspectiva, apresentamos na Figura 4.1, para o caso no qual temos ausência de fontes ($p = 0$), o comportamento assintótico idealizado dos autovalores da matriz de covariância λ_i

normalizado conforme (3.8) e os correspondentes modificados $\lambda_i^{(N)}$ conforme (3.10), com $E = 5$, ambos em função dos índices também normalizados $i^{(N)}$ segundo (3.9).

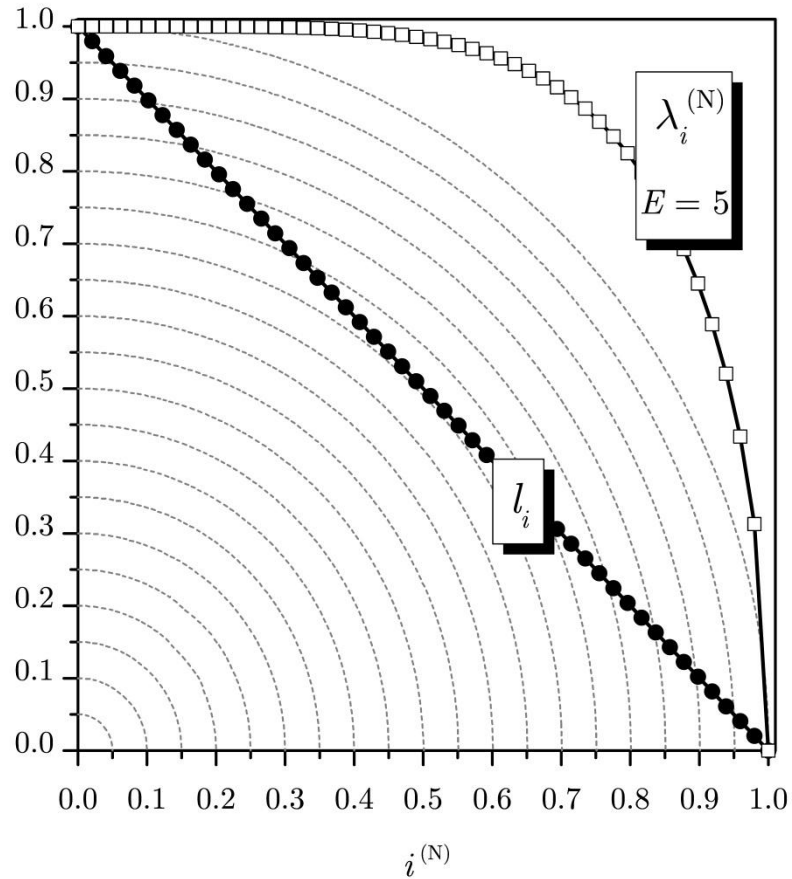


Figura 4.1: Comportamento assintótico idealizado dos autovalores normalizados e dos correspondentes modificados, em função dos índices normalizados, para $p = 0$.

A Figura 4.2 apresenta a curva obtida pelas normas $\ell_{0,83}$ de todos os autovalores normalizados $\{l_i\}$ e a curva obtida pela norma Euclidiana (norma ℓ_2) de todos os autovalores modificados $\lambda_i^{(N)}$, ambas em função dos índices (i) e considerando $p = 0$. Através dela é possível ver o efeito provocado pelo escalonamento não linear (3.10) sobre a norma euclidiana dos autovalores normalizados $\lambda_i^{(N)}$, e compará-lo com o efeito da medição da norma de cada $\{l_i\}$

através da norma $\ell_{0,83}$ (o valor de 0,83 foi escolhido para manter as duas normas dentro de uma mesma faixa).

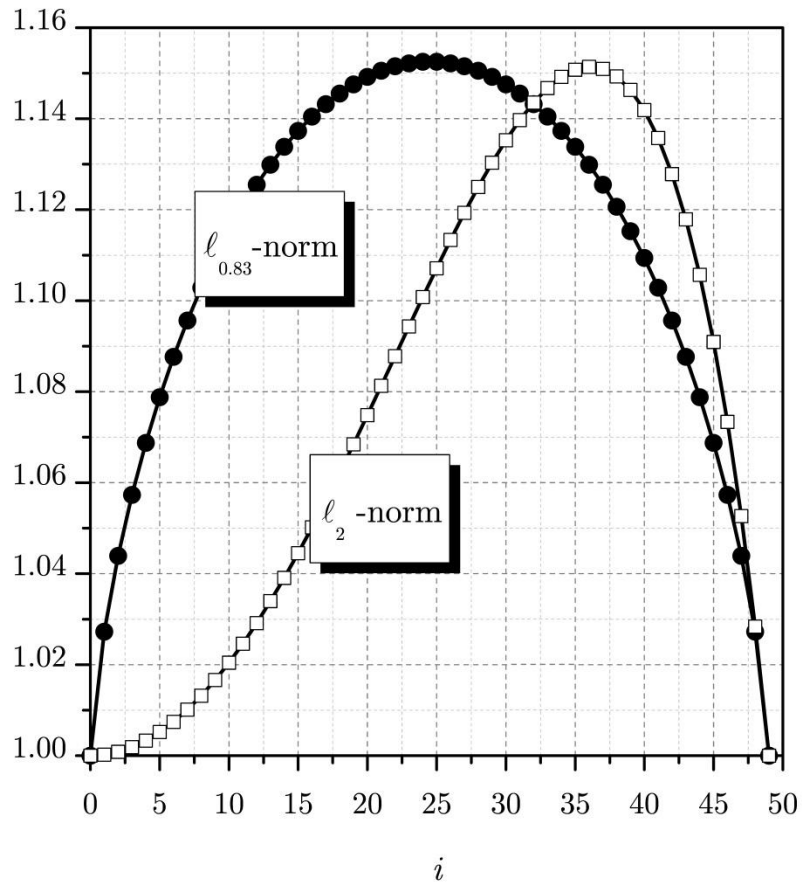


Figura 4.2: Norma $\ell_{0,83}$ para os $\{l_i\}$ e a norma Euclidiana (norma ℓ_2) para todos os $\lambda_i^{(N)}$ para $p = 0$.

Podemos comprovar pela Figura 4.2 que em ambos os casos, norma ℓ_2 e norma $\ell_{0,83}$, temos um tipo de distorção na distância espacial dos autovalores normalizados. No entanto, pode-se também comprovar que tais distorções têm comportamentos distintos, e é isso que justifica a diferença de desempenho entre o NB e o algoritmo iNB, como será mostrado no próximo capítulo.

O iNB opera com $\{l_i\}$ e utiliza a norma ℓ_u com um valor de u que otimiza seu desempenho, enquanto que o NB opera com $\lambda_i^{(N)}$ e utiliza a norma euclidiana (norma ℓ_2) e um valor de E que otimiza seu desempenho.

Além disso, o algoritmo de NB também exige a escolha empírica do parâmetro K , o que não existe no algoritmo iNB. No iNB, todos os m autovalores normalizados são considerados na busca pela norma mínima. As Figuras 4.3 e 4.4 mostram os mesmos parâmetros mostrados nas Figuras 4.1 e 4.2, mas agora para $p = 10$. Estas figuras ilustram o efeito da utilização da norma $\ell_{0,83}$ em uma situação em que é evidente a falha do algoritmo NB.

Observe na Figura 4.3 que o ponto de inflexão é visível nos autovalores normalizados $\{l_i\}$, o que é não perceptível na curva dos autovalores normalizados e escalonados $\lambda_i^{(N)}$. Se utilizarmos a norma euclidiana mínima dos autovalores normalizados $\{l_i\}$ para estimar o número de fontes, obteremos uma estimativa para o número de fonte (\hat{p}) em torno de 13, o que é incorreto.

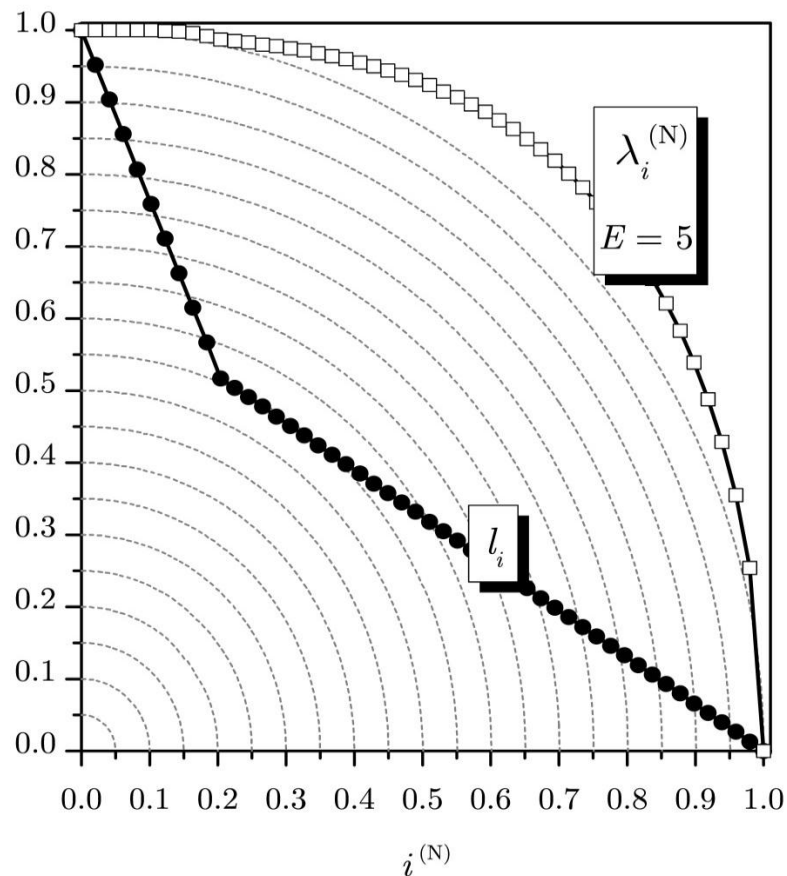


Figura 4.3: Comportamento assintótico idealizado dos autovalores normalizados e dos autovalores modificados em função dos índices normalizados para $p = 10$.

Na Figura 4.4 pode-se observar que a norma mínima $\ell_{0,83}$ de fato indica como estimativa $\hat{p} = 10$, o que está correto. Por outro lado, a norma euclidiana mínima que é adotada pelo algoritmo NB na estimativa do número de fonte, indica um valor diferente de 10 ($\hat{p} \neq 10$), ou seja, o algoritmo NB falharia na estimativa do número de fontes numa situação semelhante à ilustrada nessas figuras.

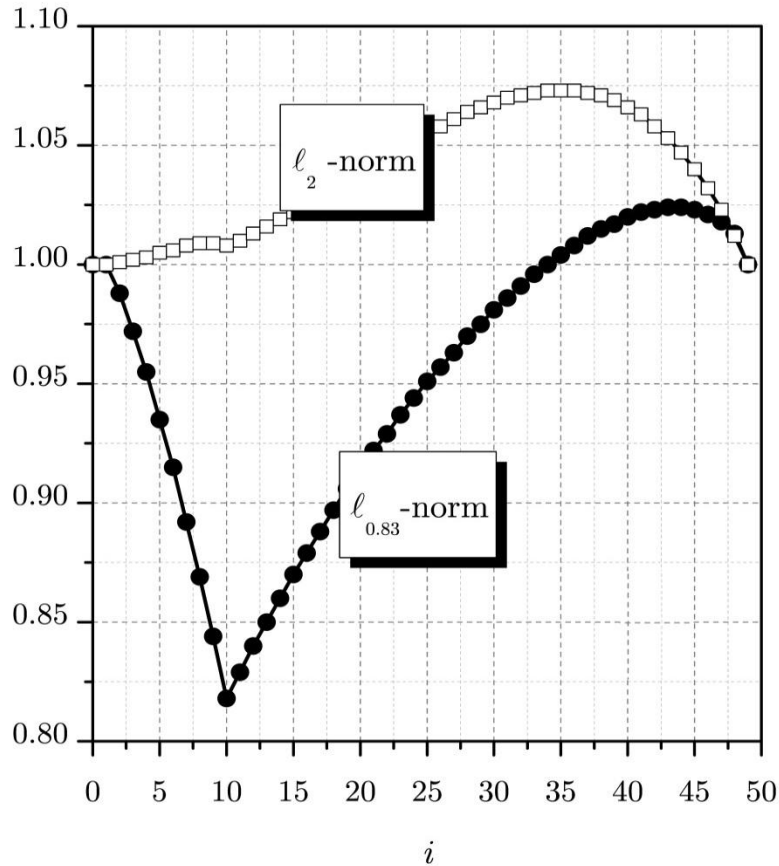


Figura 4.4: Norma $\ell_{0,83}$ para os $\{l_i\}$ e a norma Euclidiana (norma ℓ_2) para todos os $\lambda_i^{(N)}$ no caso de $p = 10$.

Para determinar o melhor valor para o parâmetro u da norma usada para discriminar os autovalores no iNB, foram realizadas diversas simulações nas quais foi calculada a probabilidade de detecção correta (P_c) em função de u para várias combinações dos parâmetros m , n , p e SNR. A Tabela 4.1 lista 8 dessas combinações, enquanto que a Figura 4.5 apresenta as correspondentes curvas de probabilidade de detecção correta (P_c) como uma função do valor de u da norma, para valores de u pertencentes ao intervalo $[0,1 ; 3]$ com passo de 0,05. Nessa figura

também apresentamos a curva da probabilidade de detecção correta média (P_c média) de todos os oito casos.

Tabela 1: Conjuntos de parâmetros utilizados na obtenção das curvas da Figura 4.5.

Curva	m	n	p	SNR [db]
1	10	50	2	0
2	40	250	10	2
3	20	100	5	0
4	30	250	8	0
5	10	50	2	0
6	15	50	5	10
7	15	50	5	8
8	40	400	20	5

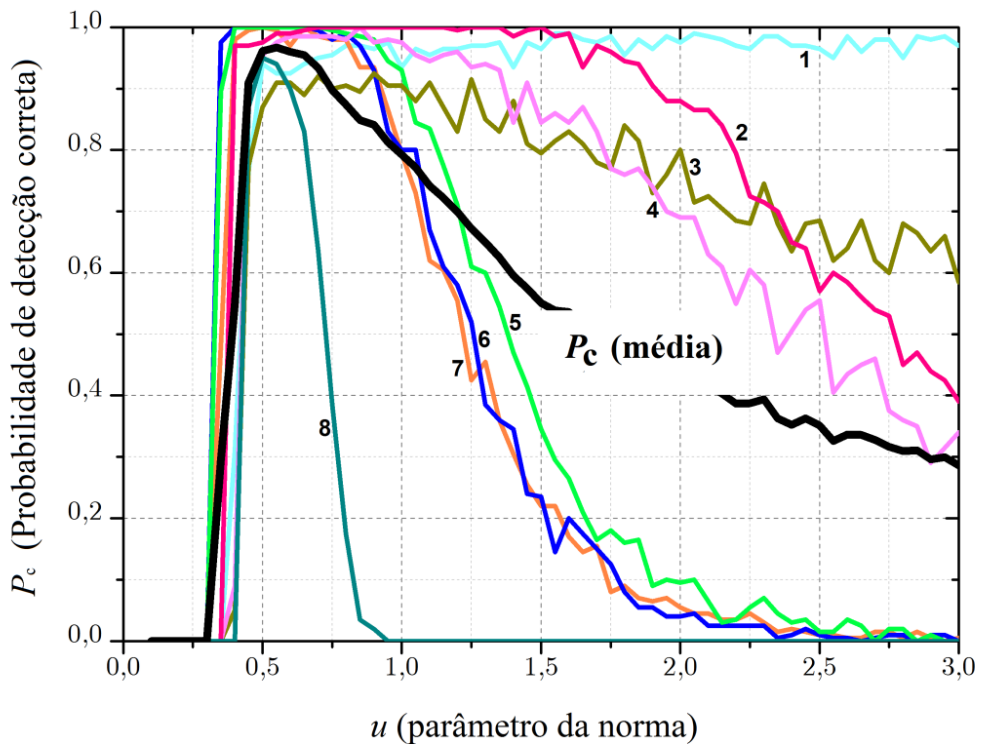


Figura 4.5: Probabilidade de detecção correta em função do parâmetro u da norma para vários conjuntos de parâmetros.

A partir da análise Figura 4.5, especificamente da curva de probabilidade de detecção correta média (P_c média), verifica-se que o valor do parâmetro u que maximiza essa probabilidade é o 0,55. Observe que o processo utilizado para determinar o valor do parâmetro u no algoritmo iNB é semelhante ao processo utilizado para se encontrar o expoente de encurvamento E no algoritmo NB original, conforme está descrito em [16].

O algoritmo do estimador proposto iNB, utilizando a norma $\ell_{0,55}$ é apresentado a seguir. Observe que o parâmetro K do algoritmo NB não é utilizado aqui e que o iNB é menos complexo do que o NB.

Algoritmo 2 – Algoritmo proposto iNB

for $i = 1 \dots m$ **do**

$$\text{Calcule } l_i = \frac{\lambda_i - \lambda_m}{\lambda_1 - \lambda_m}$$

$$\text{Calcule } i^N = \frac{i-1}{m-1}$$

$$\text{Calcule } \Lambda_i = \left[l_i \ i^{(N)} \right]^T$$

end for

$$\text{Calcule } \hat{p} = \arg \min_i \|\Lambda_i\|_{0,55} - 1$$

Capítulo 5

Resultados Numéricos

5.1 Critérios adotados nas simulações

Apresentamos nesse capítulo uma comparação entre o desempenho do estimador proposto iNB e o desempenho dos estimadores NB, AIC, MDL e RMT. Essa comparação está baseada em gráficos que apresentam as curvas da probabilidade de detecção correta (P_c) e da probabilidade de sobrestimação (P_{se}) do número de fontes calculadas através da simulação de diversas situações. Todas essas simulações foram realizadas no ambiente do Matlab[®] e o código fonte utilizado é apresentado no Apêndice dessa dissertação

Em cada simulação foram gerados 5000 eventos de Monte Carlo e, para cada um desses eventos, uma nova matriz $\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{V}$ foi calculada. As entradas em \mathbf{X} são valores complexos independentes e identicamente distribuídos (i.i.d.) de uma variável gaussiana, simulando um sinal com distribuição Gaussiana e não correlacionado, coerente com a maioria dos sinais encontrados em sistemas de comunicações sem fio. As entradas em \mathbf{H} também são valores complexos e i.i.d. de uma variável Gaussiana, simulando um canal de desvanecimento plano de Rayleigh que é constante durante cada intervalo de detecção e cuja alteração ocorre de forma independente a partir de um intervalo para o próximo. Já as entradas em \mathbf{V} também são valores complexos e i.i.d. de uma variável Gaussiana, representando o ruído térmico aditivo presente nas entradas do receptor. A potência total de transmissão foi assumida como unitária e a SNR do sinal recebido foi calculada através de

$$\frac{\text{tr}[\mathbf{H}^H \mathbf{H}]}{mp\sigma^2}. \quad (5.1)$$

Para a variância do ruído no estimador RMT foram consideradas duas situações: a primeira com variância do sinal conhecida, que foi identificada nos gráficos por RMT; a segunda com variância de ruído modelada como uma variável

aleatória uniformemente distribuída no intervalo $[\sigma^2 - 0,05\sigma^2, \sigma^2 + 0,05\sigma^2]$, que foi identificada nos gráficos como RMT2.

A potência variável das fontes de sinal foi modelada através de uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo $[0,4 ; 1]$. Além disso, para o estimador baseado no RMT, a probabilidade de falso alarme assintótica (superestimação) foi ajustada em $\alpha = 0,1\%$.

5.2 Simulações com variação do número de amostras (n)

No primeiro grupo de simulações consideramos casos onde o número de amostras do sinal recebido (n) assume valores do conjunto:

$$\{50, 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 1200, 1400, 1600, 1800, 2000, 2250, 2500, 2750, 3000, 3500, 4000\}.$$

Já os valores utilizados, em cada caso, para os parâmetros m , p e SNR estão indicados na Tabela 2 dada a seguir.

Tabela 2: Conjuntos de parâmetros utilizados na obtenção das curvas de P_c e P_{se} em função do número de amostras do sinal recebido pelos sensores (n).

Caso	P	m	SNR [db]
1	3	30	-10
2	3	30	-2
3	3	70	-10
4	3	70	-2
5	8	30	-10
6	8	30	-2
7	8	70	-10
8	8	70	-2

As Figuras 5.1 a 5.8 apresentam os resultados para P_c e P_{se} em função n para esses oito casos.

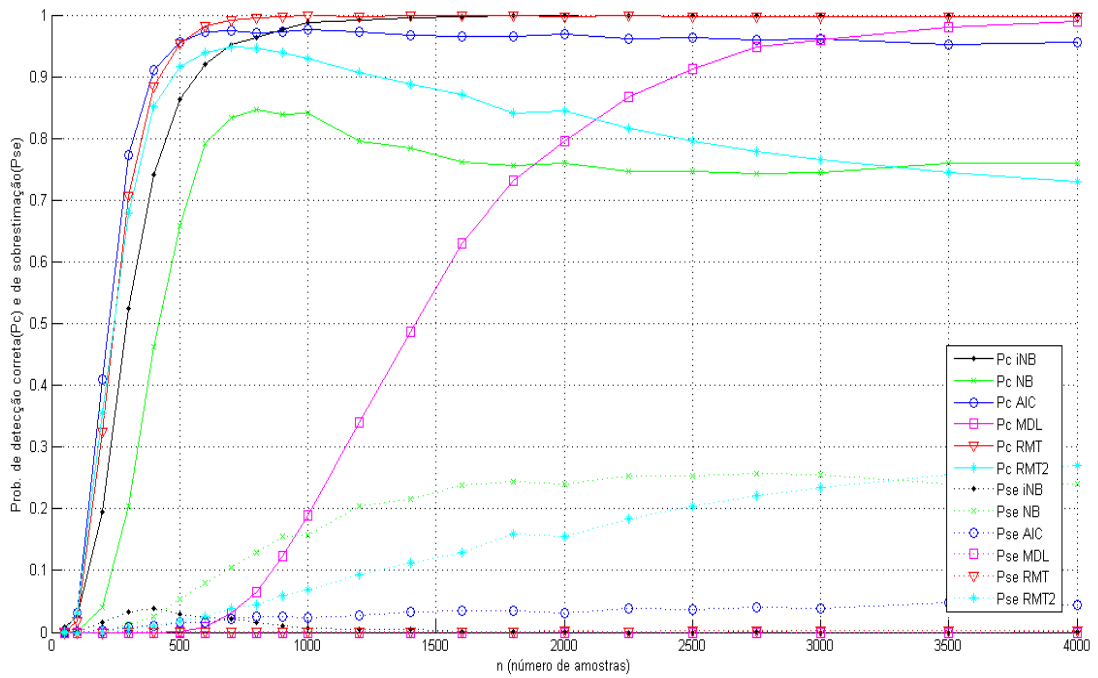


Figura 5.1: P_c e P_{se} em função do número de amostras (n) para o Caso 01 ($p = 3$, $m = 30$, $SNR = -10$ dB).

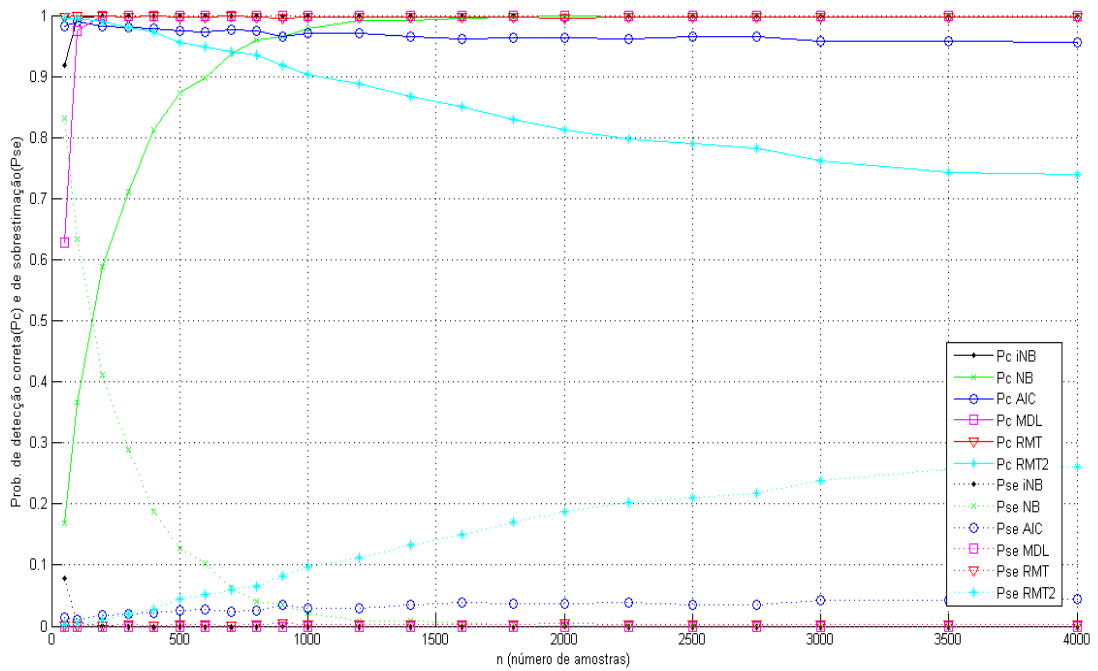


Figura 5.2: P_c e P_{se} em função do número de amostras (n) para o Caso 02 ($p = 3$, $m = 30$, $SNR = -2$ dB).

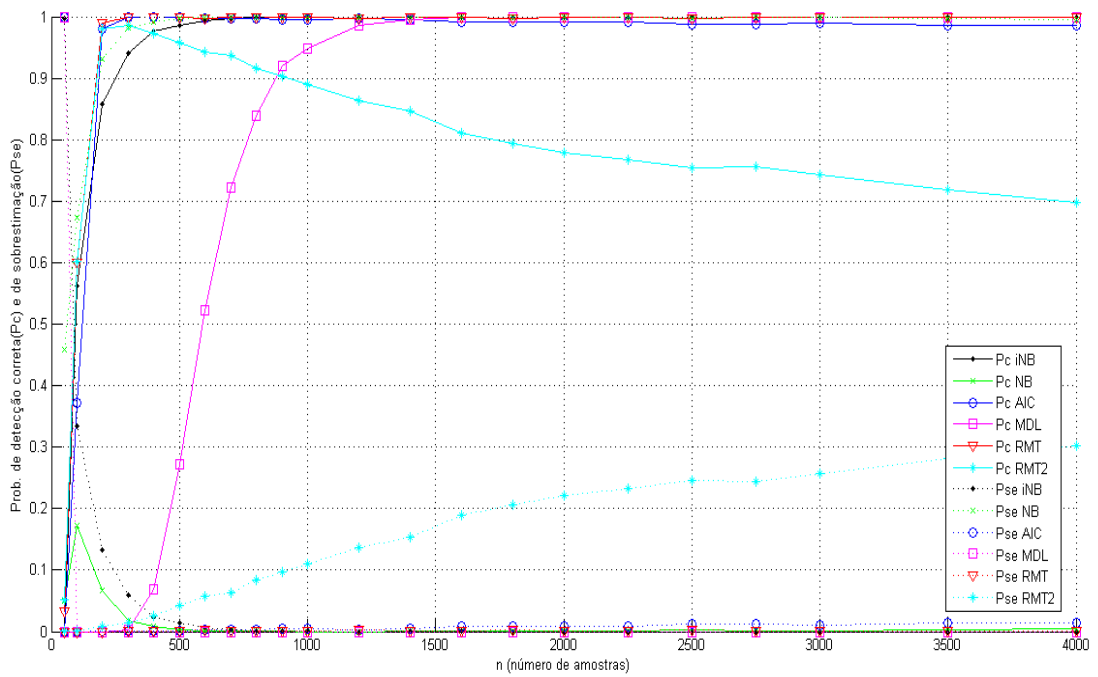


Figura 5.3: P_c e P_{se} em função do número de amostras (n) para o Caso 03 ($p = 3$, $m = 70$, $SNR = -10$ dB).

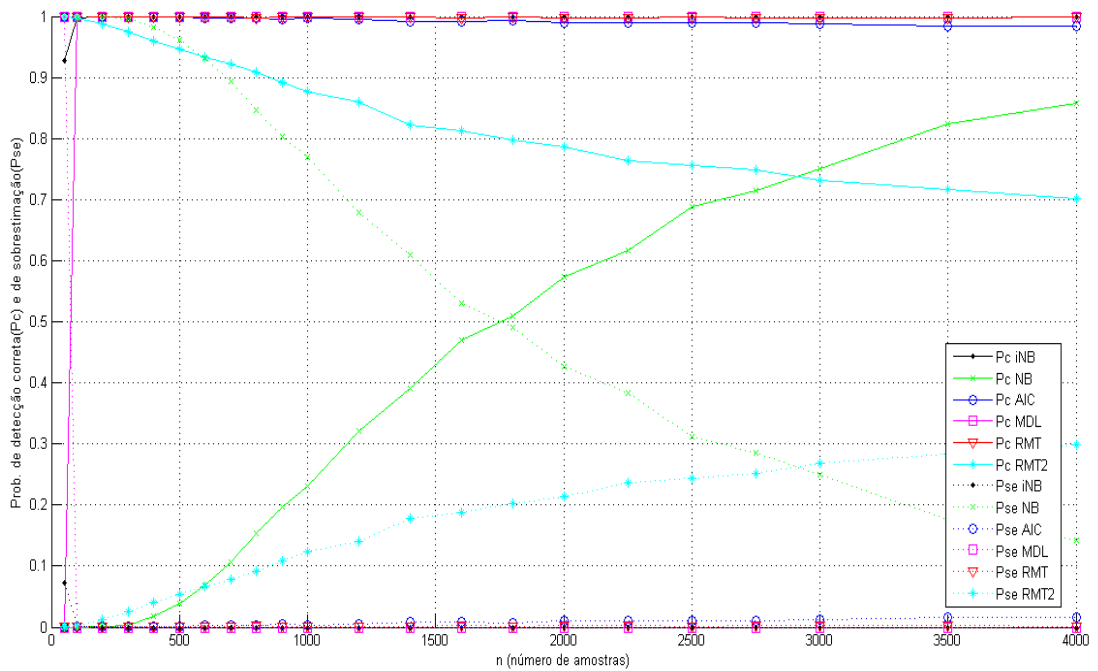


Figura 5.4: P_c e P_{se} em função do número de amostras (n) para o Caso 04 ($p = 3$, $m = 70$, $SNR = -2$ dB).

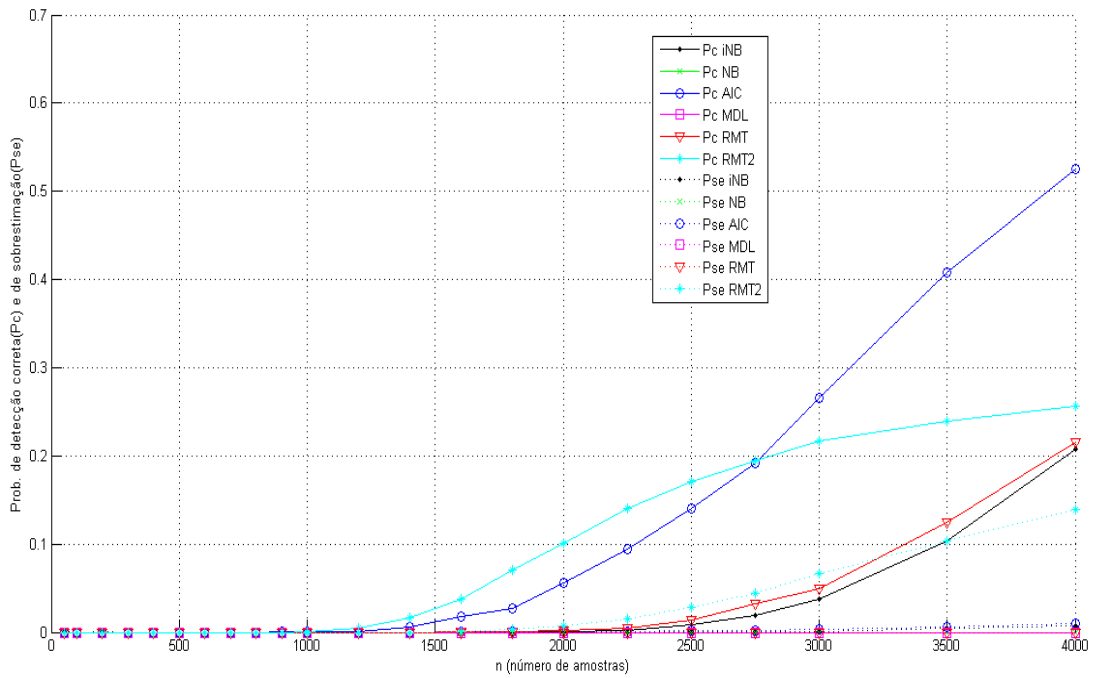


Figura 5.5: P_c e P_{se} em função do número de amostras (n) para o Caso 05 ($p = 8$, $m = 30$, $SNR = -10$ dB).

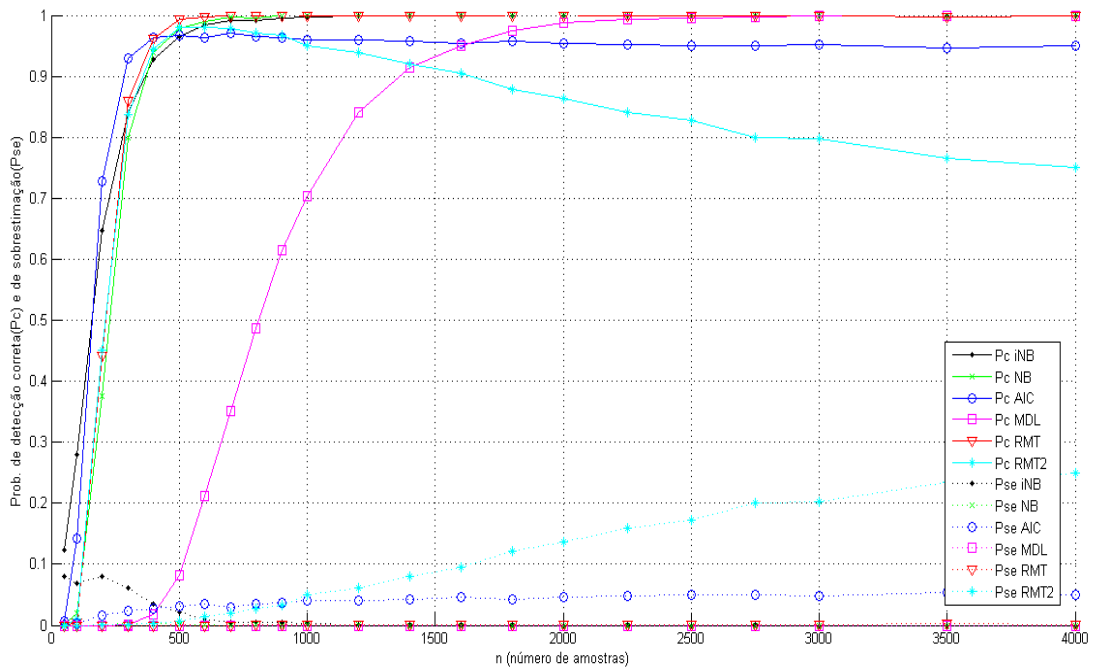


Figura 5.6: P_c e P_{se} em função do número de amostras (n) para o Caso 06 ($p = 8$, $m = 30$, $SNR = -2$ dB).

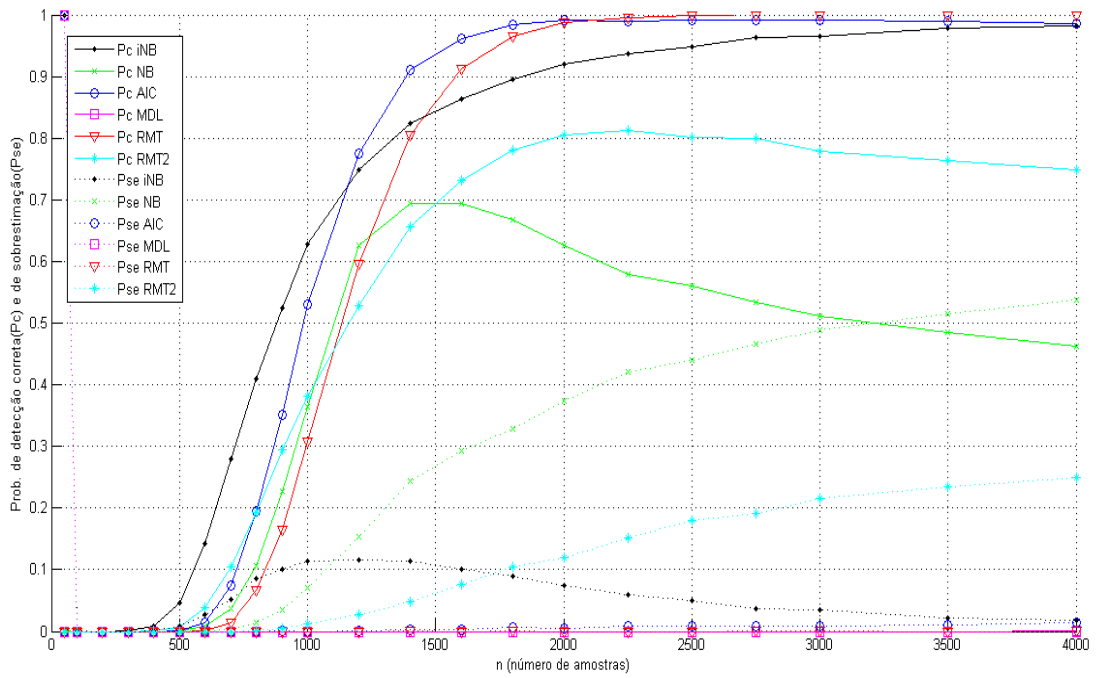


Figura 5.7: P_c e P_{se} em função do número de amostras (n) para o Caso 07 ($p = 8$, $m = 70$, $SNR = -10$ dB).

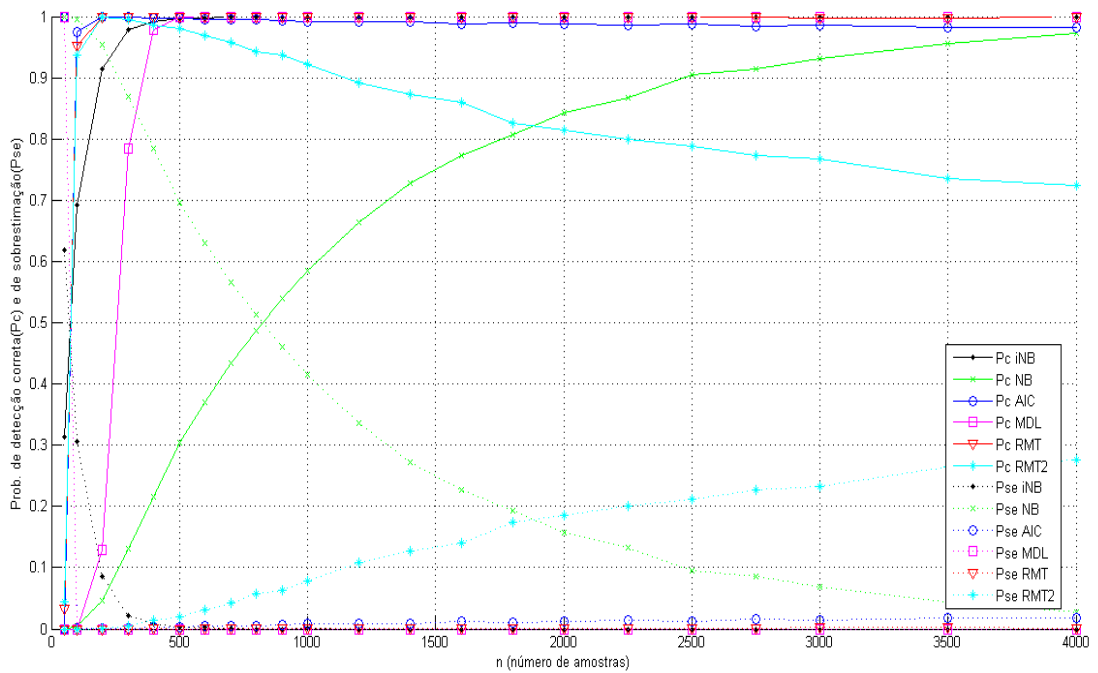


Figura 5.8: P_c e P_{se} em função do número de amostras (n) para o Caso 08 ($p = 8$, $m = 70$, $SNR = -2$ dB).

Podemos constatar através da análise dos gráficos apresentados nas Figuras 5.1 a 5.8 que o estimador AIC apresentou na maioria dos casos um desempenho melhor na região de baixo número de amostras ($n < 500$) e também ficou evidente sua esperada não consistência, ou seja, não atingiu a probabilidade total de detecção correta ($P_c = 1$) em nenhum dos casos simulados.

Os estimadores RMT, com variância de ruído conhecida, e o MDL, como esperado, apresentaram consistência na região correspondente a elevado número de amostras ($n \rightarrow \infty$). De modo geral o desempenho do RMT foi bem melhor que o do MDL, com excessão para o Caso 05 ($p = 8, m = 30, SNR = -10$), no qual até onde foi simulado ($n \leq 4000$ amostras), nenhum dos estimadores apresentou um bom desempenho. O estimador baseado no RMT com variação aleatória do ruído, o RMT2, apresentou forte inconsistência e desempenho inferior ao RMT em todos os casos analisados.

Já o estimador proposto nesse trabalho, o iNB, apresentou de modo geral um desempenho melhor ou igual ao do estimador MDL. Em relação ao NB o desempenho do iNB foi muito melhor para todos os valores de n simulados. O iNB apresentou também na maioria dos casos um desempenho bem próximo ao do RMT (com variância do ruído conhecida) e ao do estimador AIC. O iNB também parece ser um estimador consistente, embora não sejamos capazes de demonstrar formalmente essa característica devido à sua natureza empírica.

Conforme também esperado, pode-se verificar que o desempenho de todos os estimadores nos casos com maior relação sinal/ruído ($SNR = -2$ [dB] – Casos 02, 04, 06 e 08) foi muito melhor que os correspondentes de relação menor ($SNR = -10$ [dB] – Casos 01, 03, 05 e 07). Também podemos verificar um melhor desempenho nos casos com maior número de sensores ($m = 70$ – Casos 03, 04, 07 e 08) em relação aos correspondentes de menor número ($m = 30$ – Casos 01, 02, 05 e 06). Já em relação ao número de fontes o desempenho foi melhor nos casos de menor número ($p = 3$ – Casos 01, 02, 03 e 04) do que nos casos correspondentes de maior número ($p = 8$ – Casos 05, 06, 07 e 08).

5.3 Simulações com variação da relação sinal/ruído (SNR)

No segundo grupo de simulações consideramos casos onde a relação sinal/ruído nos sensores ($SNR [dB]$) assume valores do conjunto:

$$\{-10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

Já os valores utilizados, em cada caso, para os parâmetros m , p e n estão indicados na Tabela 3 dada a seguir.

Tabela 3: Conjuntos de parâmetros utilizados na obtenção das curvas de P_c e P_{se} em função da relação sinal ruído do sinal recebido pelos sensores (SNR).

Caso	p	m	n
1	3	30	200
2	3	30	1000
3	3	70	200
4	3	70	1000
5	8	30	200
6	8	30	1000
7	8	70	200
8	8	70	1000

As Figuras 5.9 a 5.16 apresentam os resultados para P_c e P_{se} em função de SNR para esses oito casos.

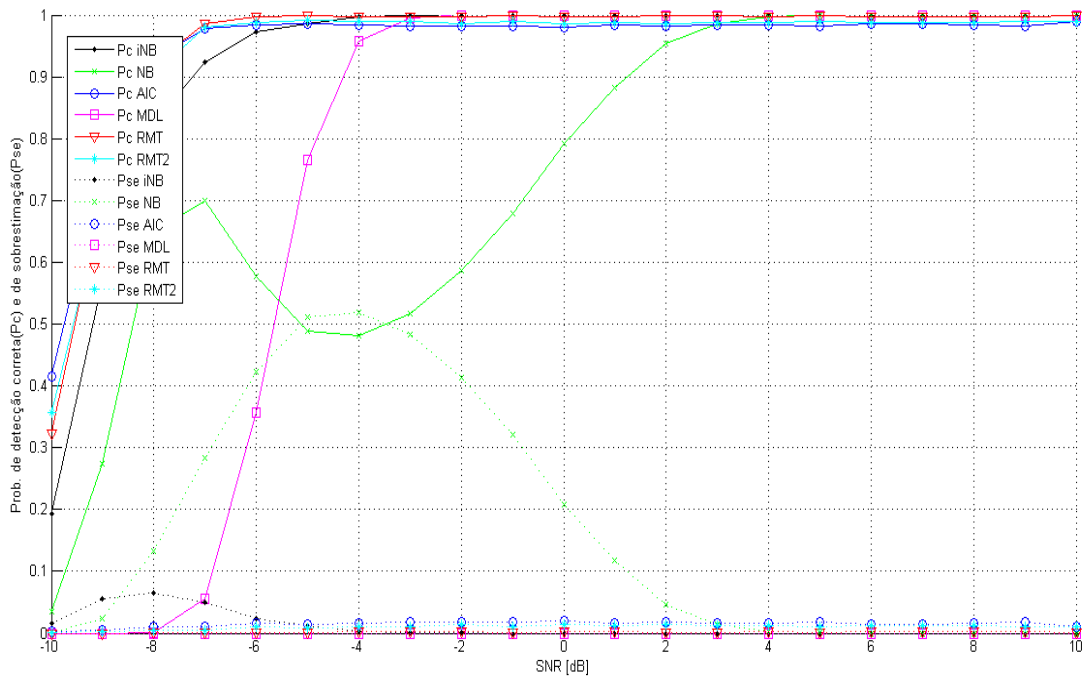


Figura 5.9: P_c e P_{se} em função da relação sinal/ruído (SNR) para o Caso 01 ($p = 3$, $m = 30$, $n = 200$).

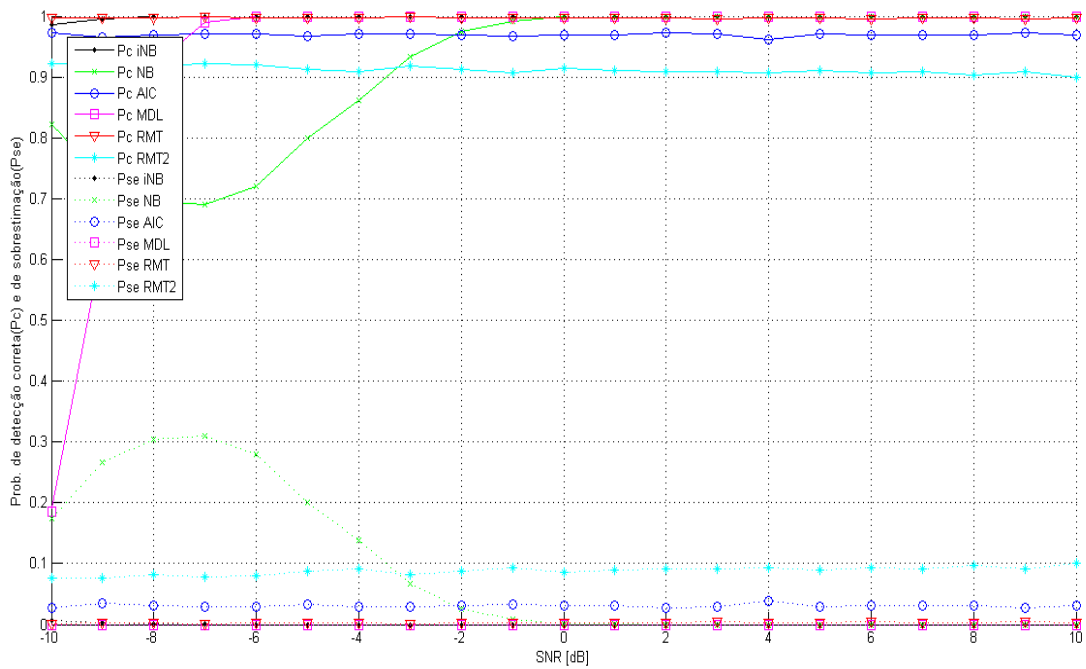


Figura 5.10: P_c e P_{se} em função de SNR da relação sinal/ruído (SNR) para o Caso 02 ($p = 3$, $m = 30$, $n = 1000$).

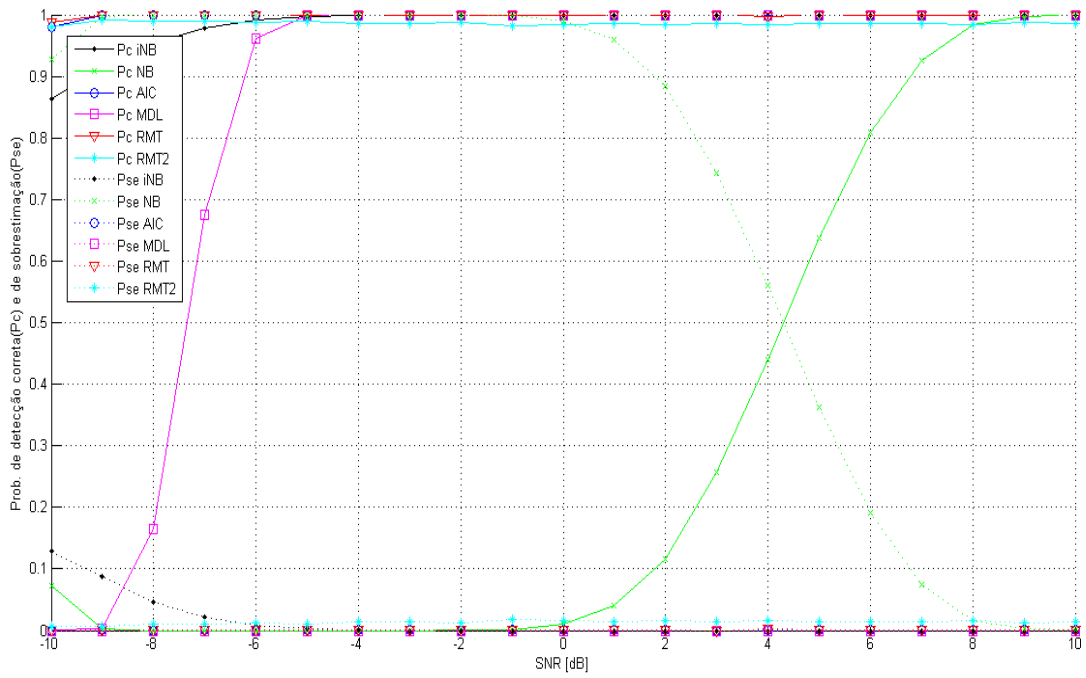


Figura 5.11: P_c e P_{se} em função da relação sinal/ruído (SNR) para o Caso 03 ($p = 3$, $m = 70$, $n = 200$).

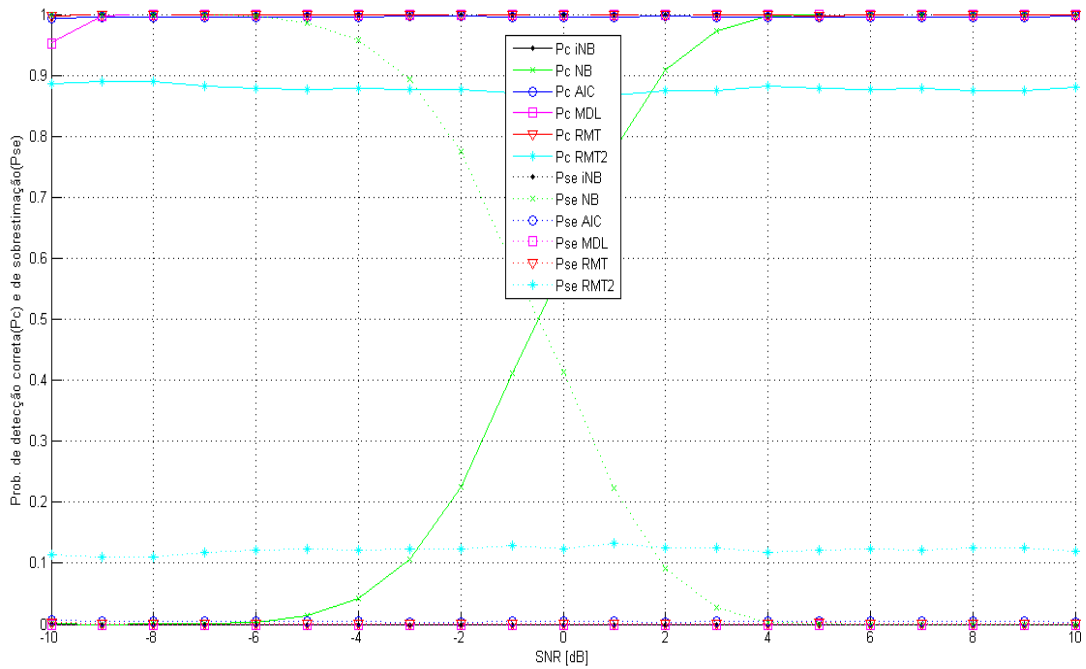


Figura 5.12: P_c e P_{se} em função da relação sinal/ruído (SNR) para o Caso 04 ($p = 3$, $m = 70$, $n = 1000$).

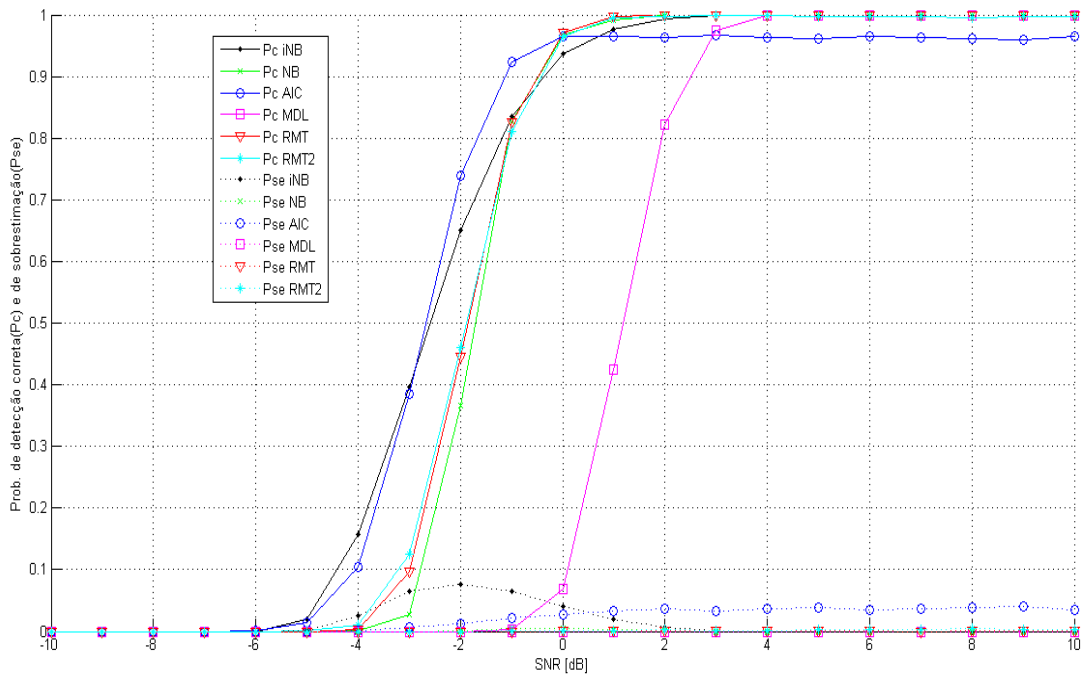


Figura 5.13: P_c e P_{se} em função da relação sinal/ruído (SNR) para o Caso 05 ($p = 8$, $m = 30$, $n = 200$).

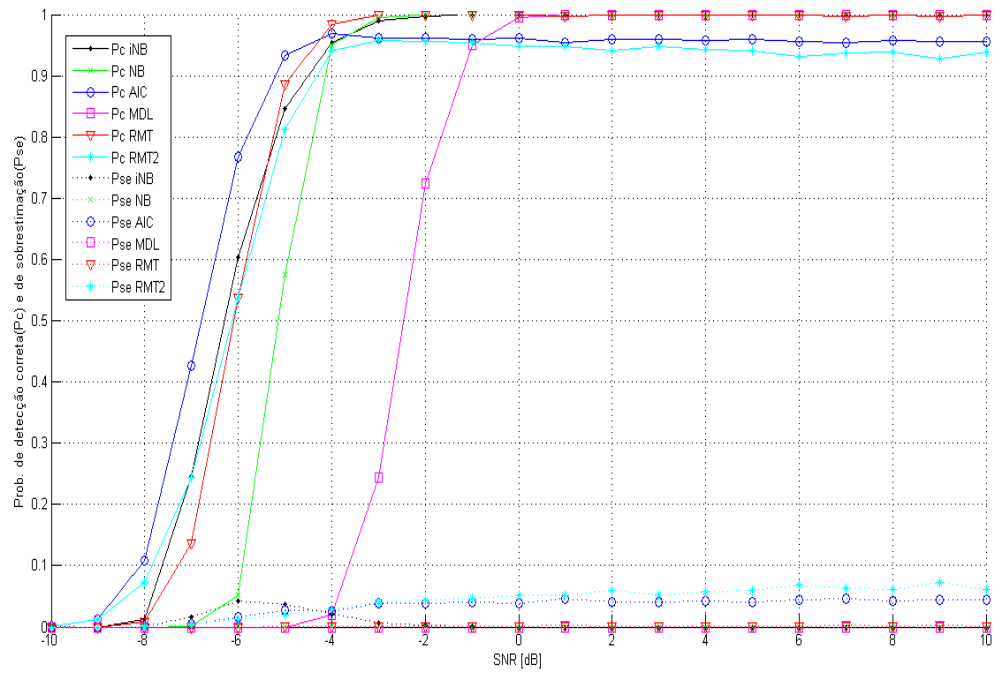


Figura 5.14: P_c e P_{se} em função da relação sinal/ruído (SNR) para o Caso 06 ($p = 8$, $m = 30$, $n = 1000$).

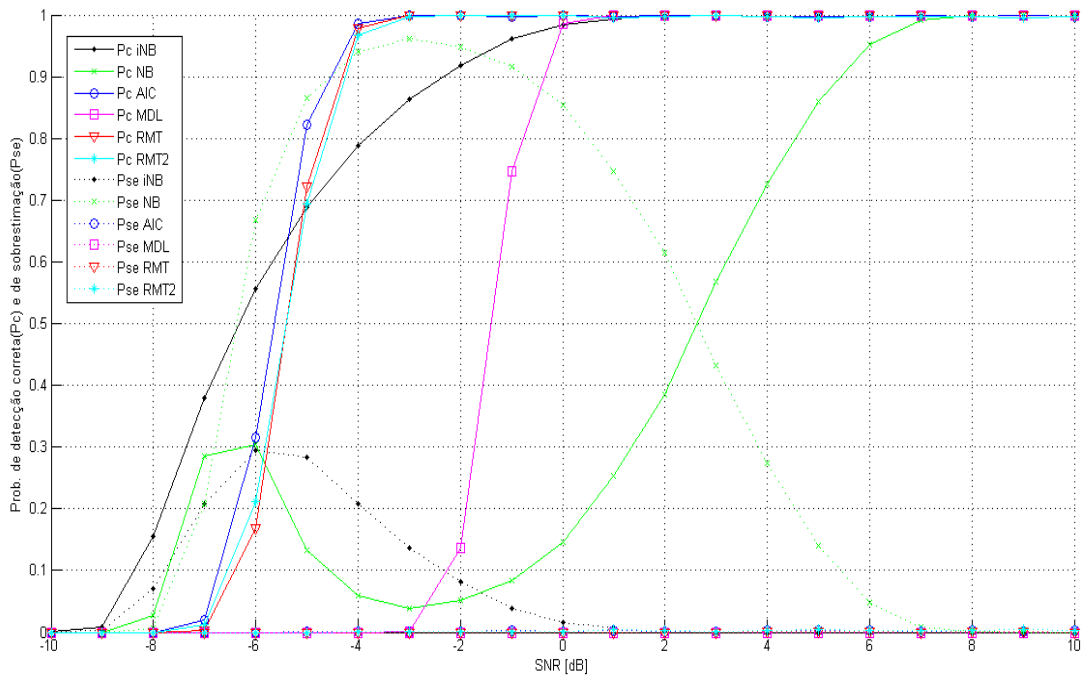


Figura 5.15: P_c e P_{se} em função da relação sinal/ruído (SNR) para o Caso 07 ($p = 8$, $m = 70$, $n = 200$).

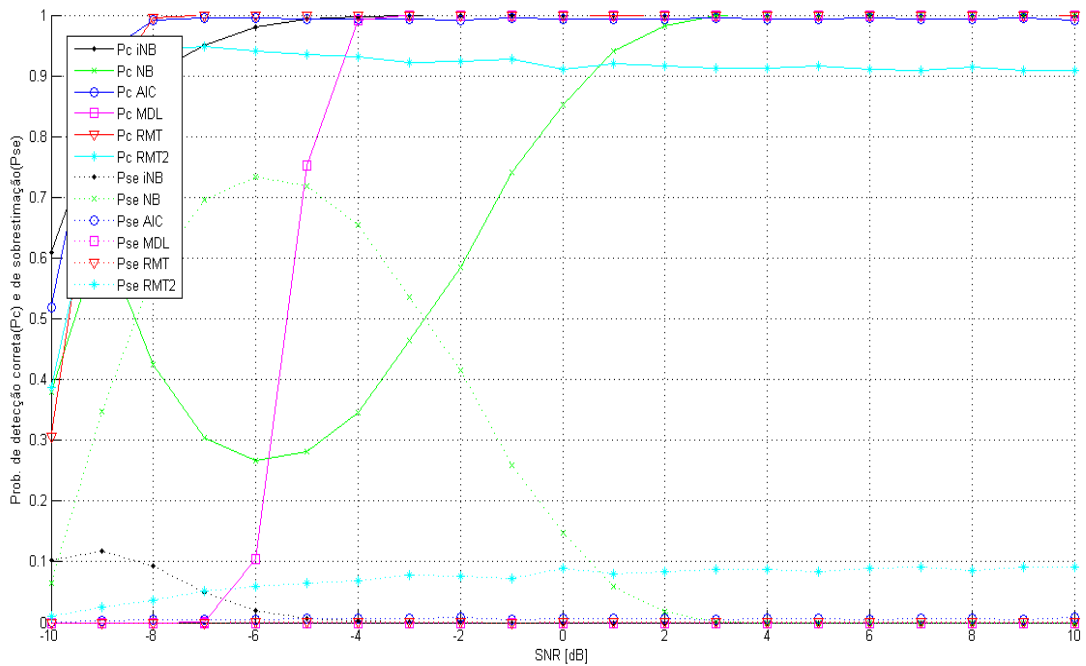


Figura 5.16: P_c e P_{se} em função da relação sinal/ruído (SNR) para o Caso 08 ($p = 8$, $m = 70$, $n = 1000$).

A análise da probabilidade de detecção correta (P_c) e da probabilidade de sobrestimação (P_{se}) em função da relação sinal/ruído (SNR) apresentadas nas Figuras 5.9 a 5.16 permite-nos afirmar que o estimador proposto iNB apresentou um desempenho muito acima do apresentado pelo estimador no qual está fundamentado, o NB. A probabilidade de detecção correta (P_c) do iNB apresentou um compartimento sempre não decrescente com o aumento da SNR em todos os casos simulados. O mesmo já não ocorreu para o NB que, na região de baixa SNR, apresentou em alguns casos forte decréscimo dessa probabilidade, com esperado aumento da probabilidade de sobrestimação (P_{se}), como claramente se pode observar nos Caso 07 e 08 (Figuras 5.15 e 5.16).

Outra vez ficou evidenciada nessas simulações a aparente consistência do estimador iNB com $P_c \rightarrow 1$ e $P_{se} \rightarrow 0$ quando $SNR \rightarrow \infty$.

Também nessas simulações o iNB apresentou um desempenho bem próximo, e em alguns casos melhor, que o obtido pelos estimadores AIC e RMT com variância conhecida.

Em relação ao MDL, o desempenho do iNB foi superior, principalmente na região onde a relação sinal-ruído (SNR) é baixa. Já o RMT2 (RMT com variância aleatória) apresentou um desempenho (P_c) geralmente inferior e uma probabilidade de sobrestimação (P_{se}) bastante significativa nas simulações realizadas com maior número de sensores, conforme podemos observar nos Casos 02, 04, 06 e 08 (Figuras 5.10, 5.12, 5.14 e 5.16).

5.4 Simulações com variação do número de fontes (p)

No terceiro grupo de simulações consideramos casos onde o número de fontes de sinal (p) assume os valores do conjunto:

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}.$$

Já os valores utilizados, em cada caso, para os parâmetros m , p e n estão indicados na Tabela 4 dada a seguir.

Tabela 4: Conjuntos de parâmetros utilizados na obtenção das curvas de P_C e P_{se} em função do número de fontes do sinal recebido pelos sensores(p).

Caso	m	n	SNR [db]
1	30	200	-10
2	30	200	-2
3	30	1000	-10
4	30	1000	-2
5	70	200	-10
6	70	200	-2
7	70	1000	-10
8	70	1000	-2

As Figuras 5.17 a 5.24 apresentam os resultados para P_C e P_{se} em função de p para esses oito casos.

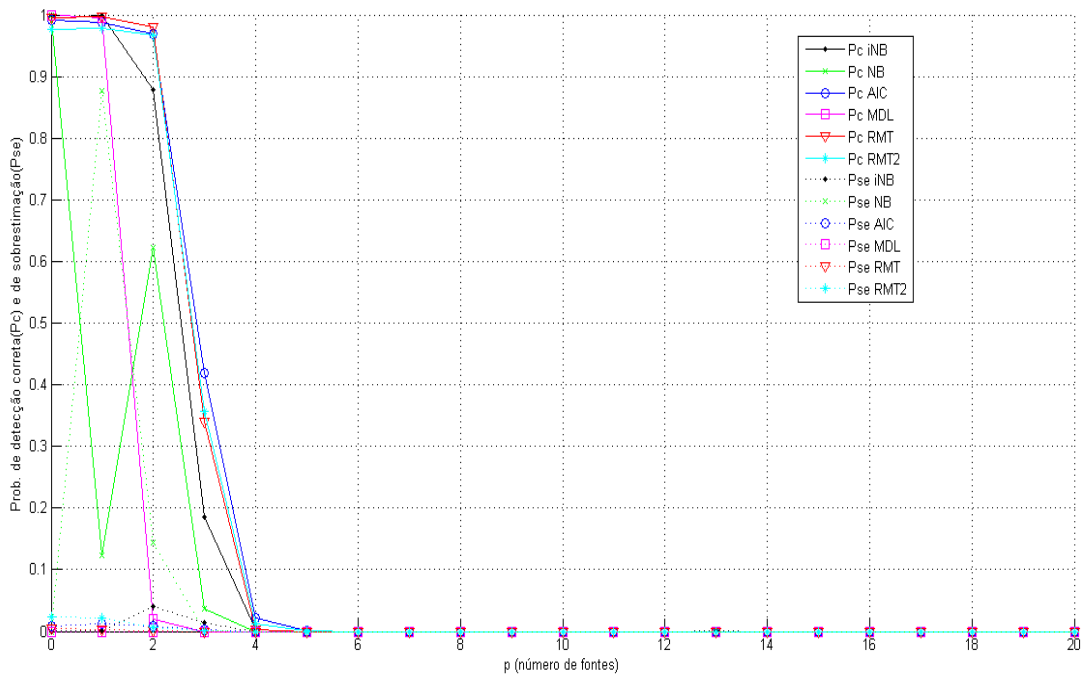


Figura 5.17: P_c e P_{se} em função do número de fontes (p) para o Caso 01 ($m=30$, $n=200$, $SNR=-10$ dB).

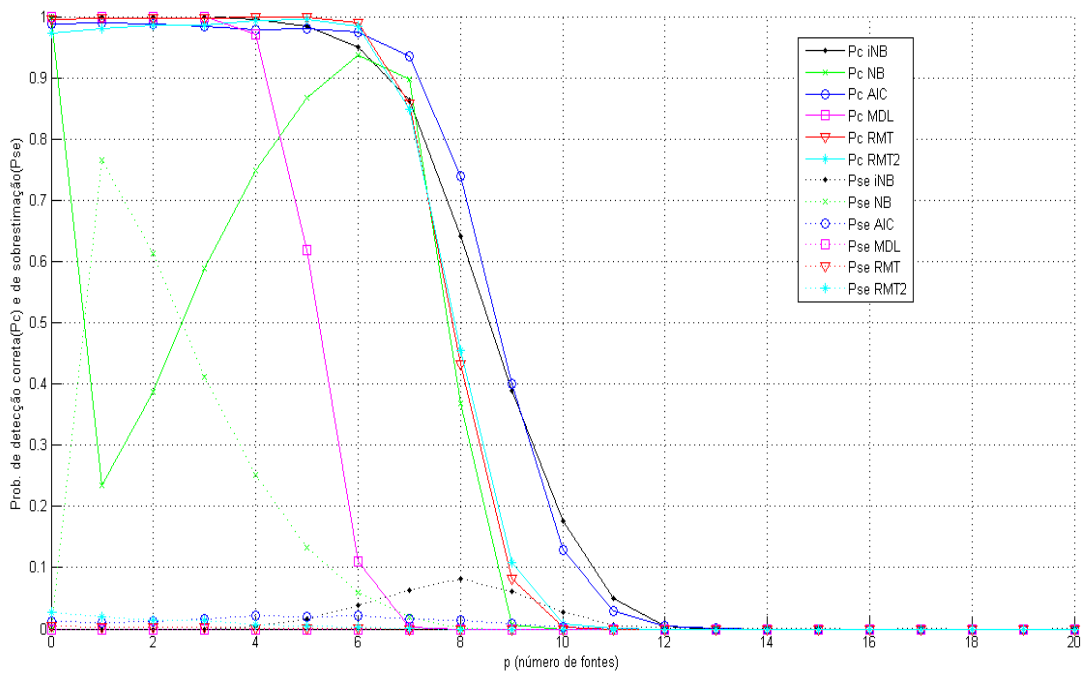


Figura 5.18: P_c e P_{se} em função do número de fontes (p) para o Caso 02 ($m=30$, $n=200$, $SNR=-2$ dB).

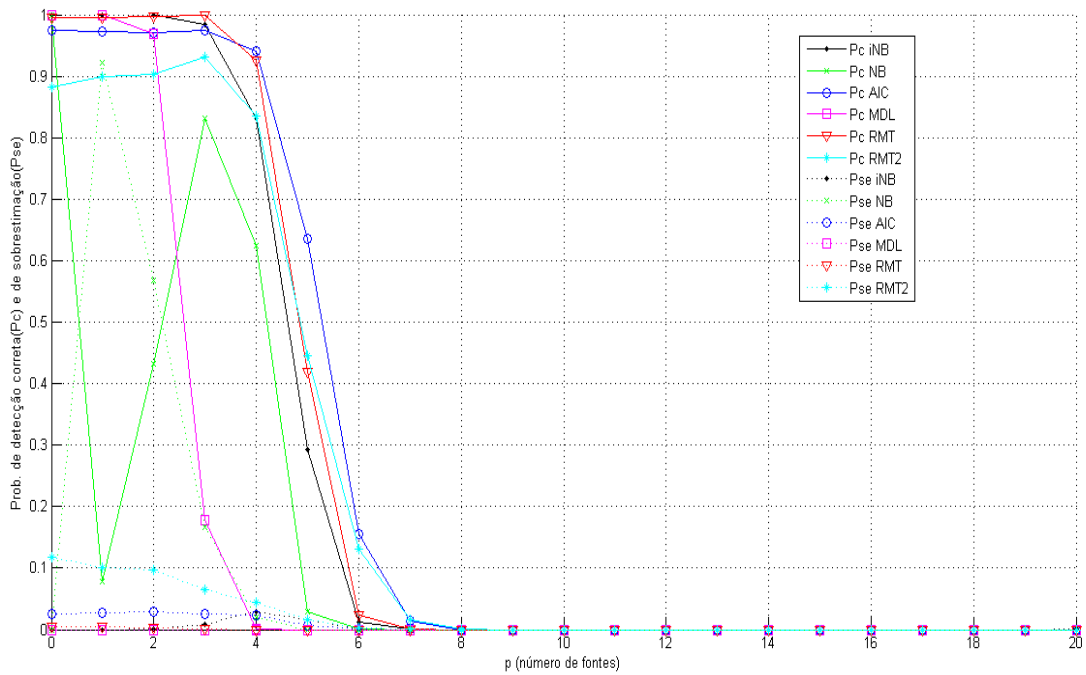


Figura 5.19: P_c e P_{se} em função do número de fontes (p) para o Caso 03 ($m = 30$, $n = 1000$, $SNR = -10$ dB).

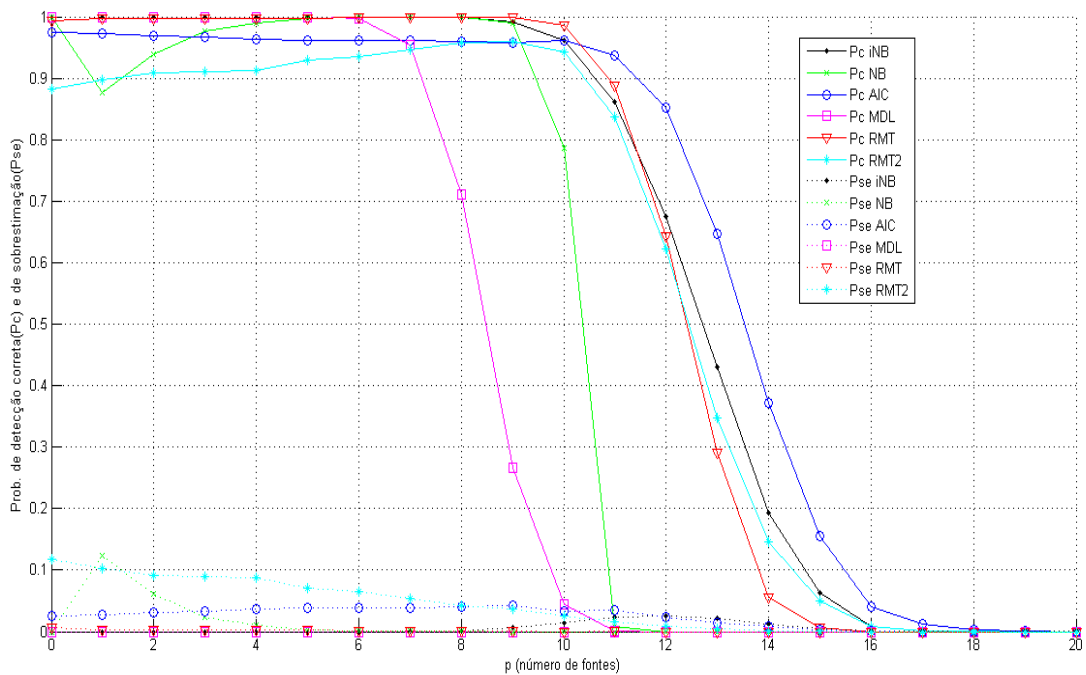


Figura 5.20: P_c e P_{se} em função do número de fontes (p) para o Caso 04 ($m = 30$, $n = 1000$, $SNR = -2$ dB).

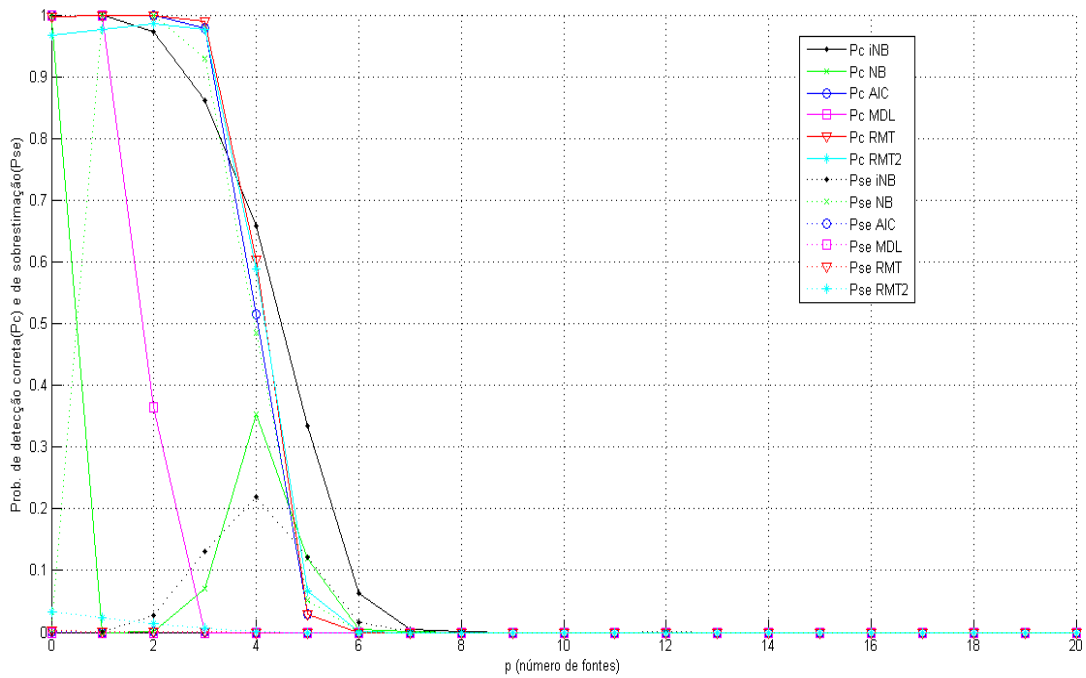


Figura 5.21: P_c e P_{se} em função do número de fontes (p) para o Caso 05 ($m = 70$, $n = 200$, $SNR = -10$ dB).

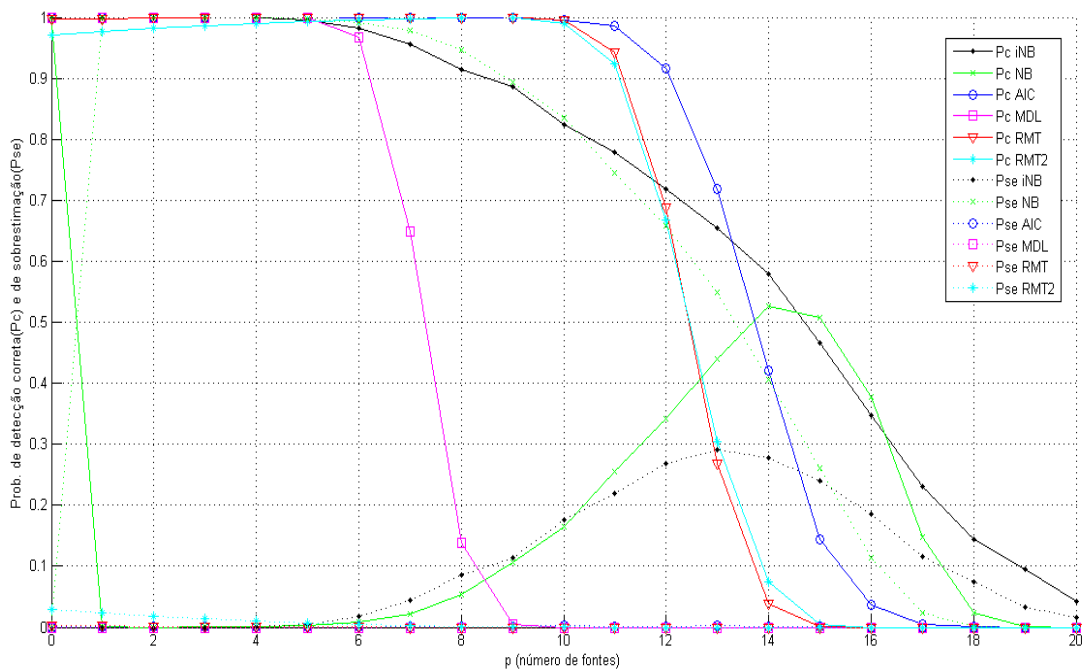


Figura 5.22: P_c e P_{se} em função do número de fontes (p) para o Caso 06 ($m = 70$, $n = 200$, $SNR = -2$ dB).

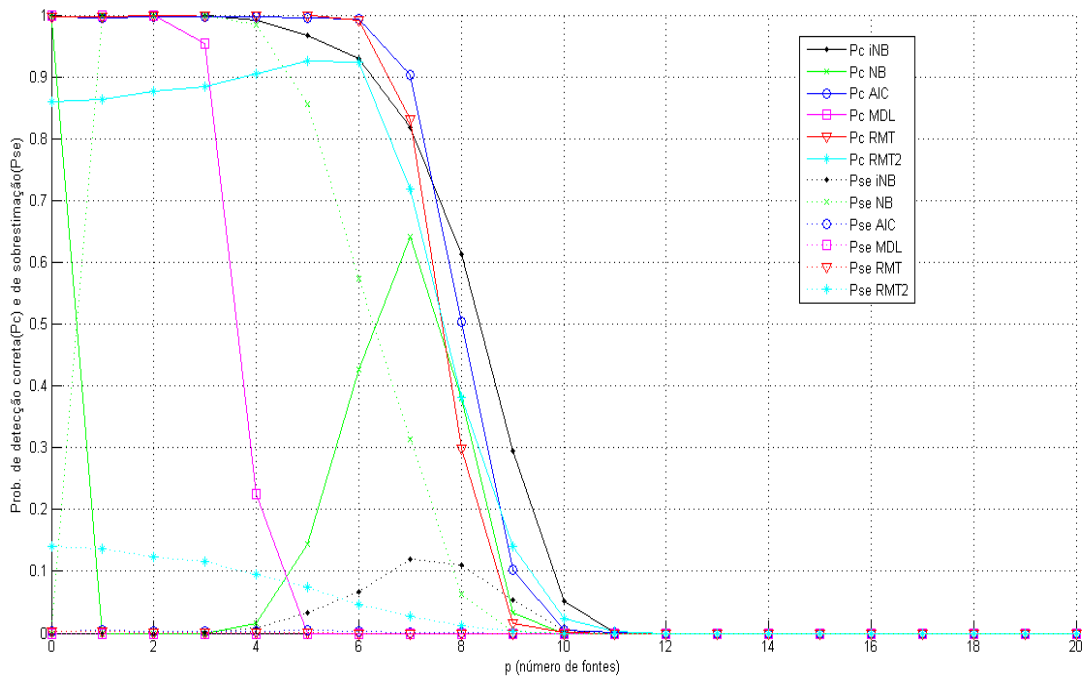


Figura 5.23: P_c e P_{se} em função do número de fontes (p) para o Caso 07 ($m = 70$, $n = 1000$, $SNR = -10$ dB).

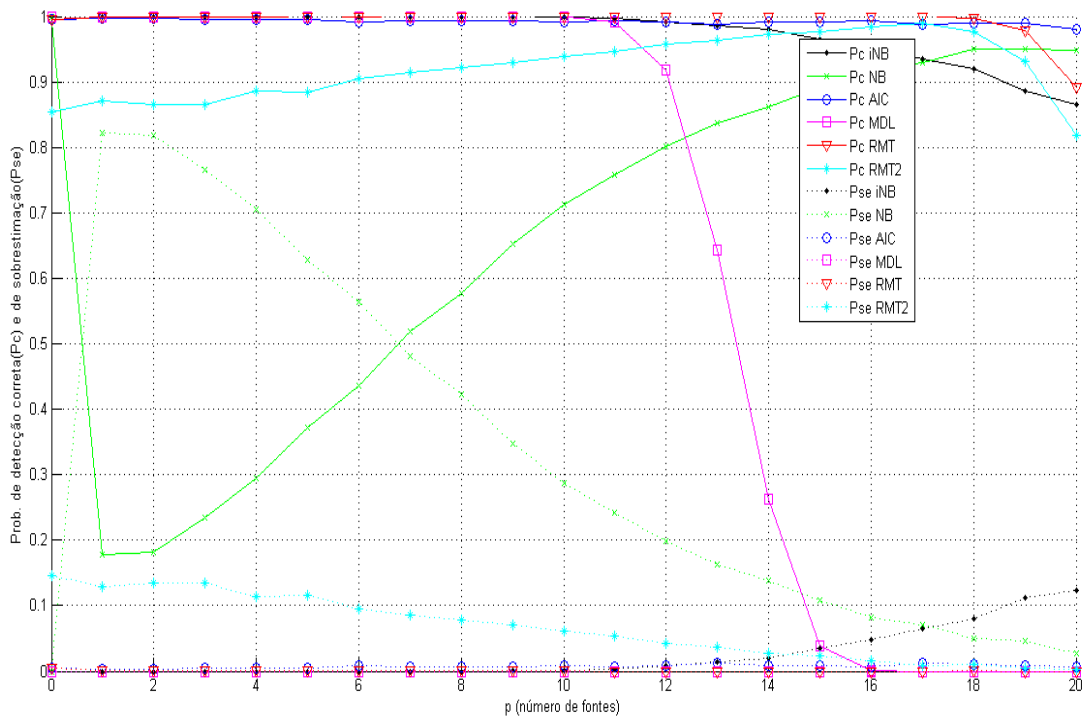


Figura 5.24: P_c e P_{se} em função do número de fontes (p) para o Caso 08 ($m = 70$, $n = 1000$, $SNR = -2$ dB).

Fica evidente através da análise das Figuras 5.17 a 5.24 que todos os estimadores analisados apresentam uma forte queda de desempenho com o aumento do número de fontes, mais notadamente nas situações de baixa SNR (Casos 01, 03, 05 e 07). O número máximo de fontes que pode ser estimado com alta probabilidade de detecção variou de estimador para estimador, crescendo com o aumento da SNR e do número de amostras, com a vantagem para o estimadores AIC, RMT e iNB, nesta ordem.

Novamente, em todos os casos analisados, o desempenho do estimador iNB foi sempre bem superior ao dos estimadores MDL e NB. Já os estimadores AIC e RMT com variância conhecida tiveram nas maiorias dos casos um desempenho bem próximo do iNB.

5.5 Simulações com variação do número de sensores (m)

No quarto e último grupo de simulações consideramos casos onde o número de sensores (m) assume valores do conjunto:

{10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100}.

Já os valores utilizados, em cada caso, para os parâmetros p , n e SNR estão indicados na Tabela 5 dada a seguir.

Tabela 5: Conjuntos de parâmetros utilizados na obtenção das curvas de P_C e P_{se} em função do número de sensores (m).

Caso	p	n	SNR [db]
1	3	200	-10
2	3	200	-2
3	3	1000	-10
4	3	1000	-2
5	8	200	-10
6	8	200	-2
7	8	1000	-10
8	8	1000	-2

As Figuras 5.25 a 5.32 apresentam os resultados para P_C e P_{se} em função de m para esses oito casos.

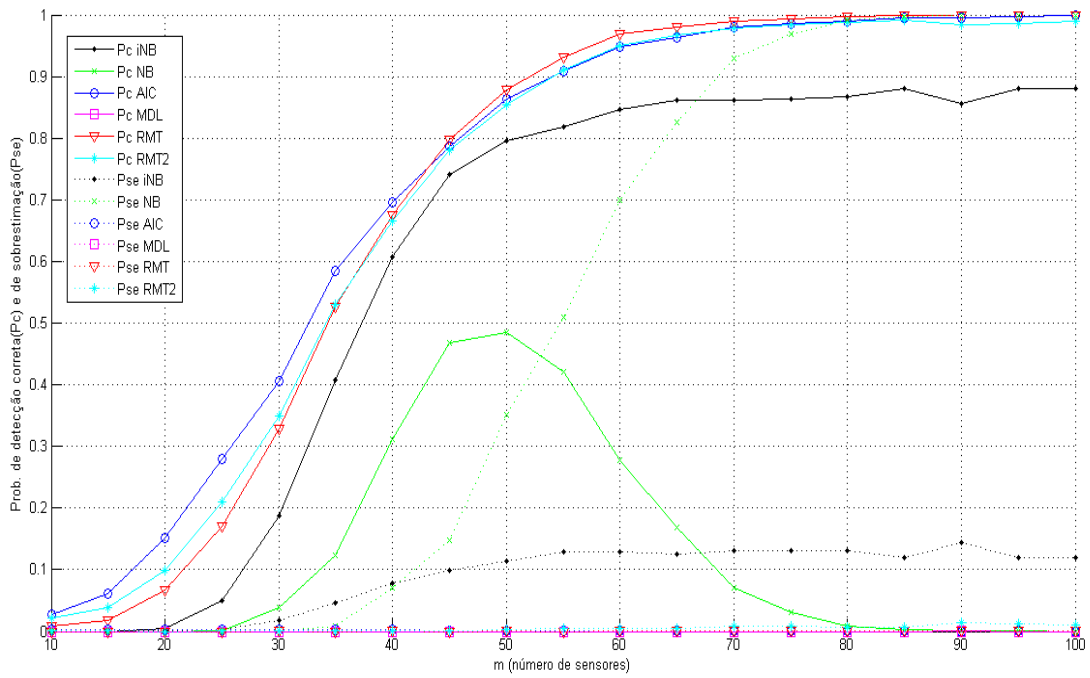


Figura 5.25: P_c e P_{se} em função do número de sensores (m) para o Caso 01 ($p = 3$, $n = 200$, $SNR = -10$ dB).

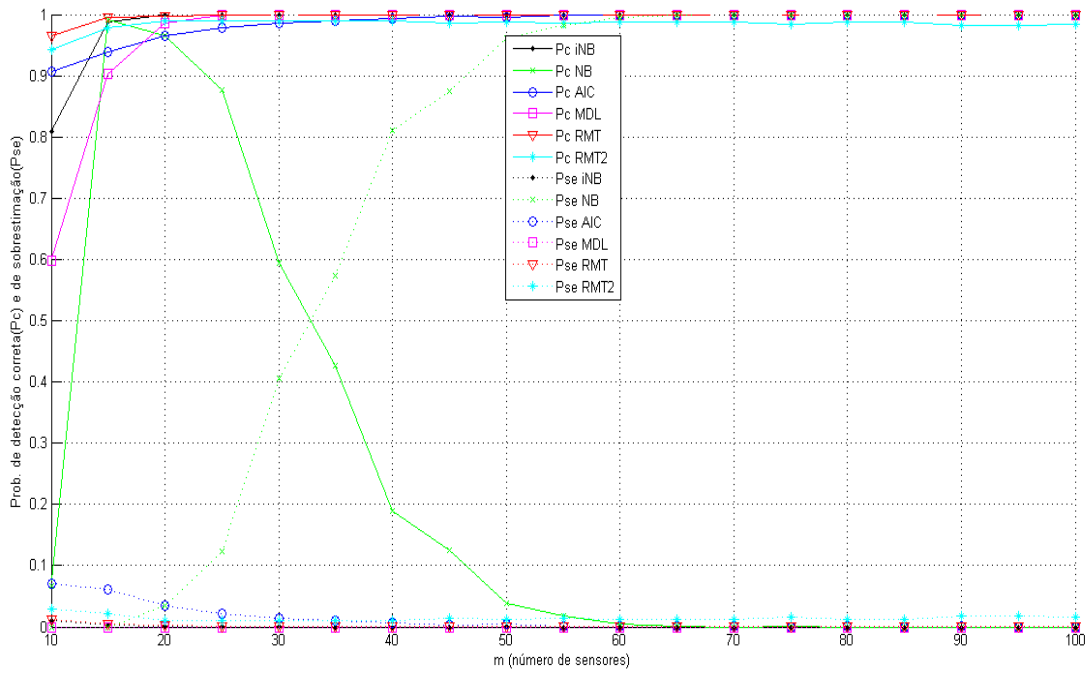


Figura 5.26: P_c e P_{se} em função do número de sensores (m) para o Caso 02 ($p = 3$, $n = 200$, $SNR = -2$ dB).

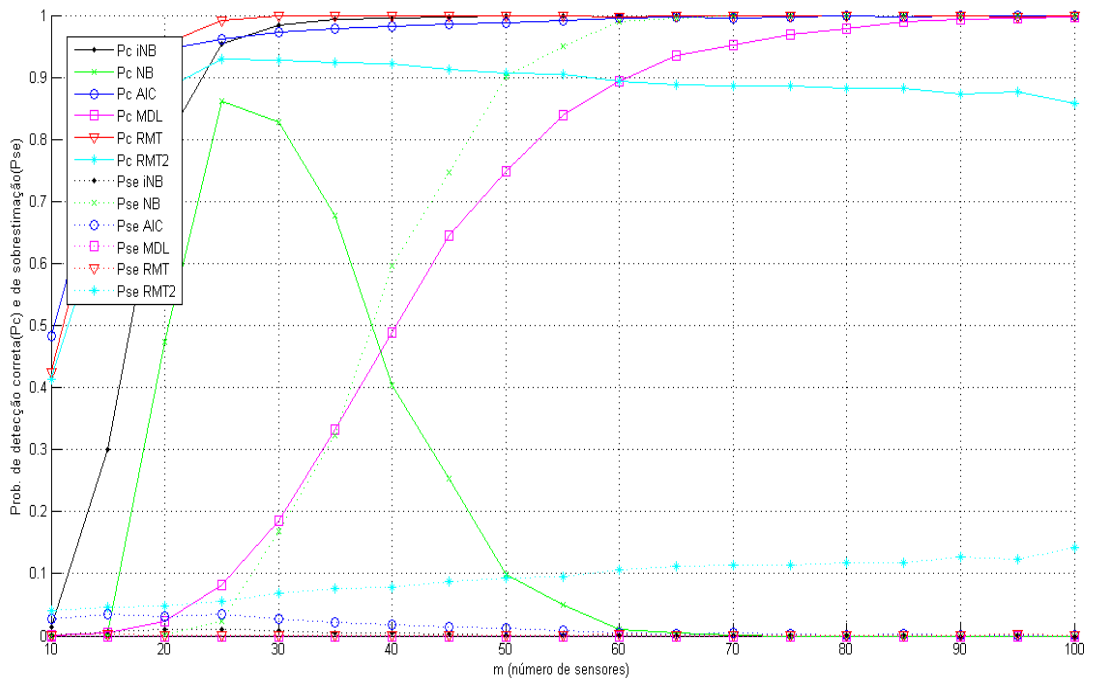


Figura 5.27: P_c e P_{se} em função do número de sensores (m) para o Caso 03 ($p = 3$, $n = 1000$, $SNR = -10$ dB).

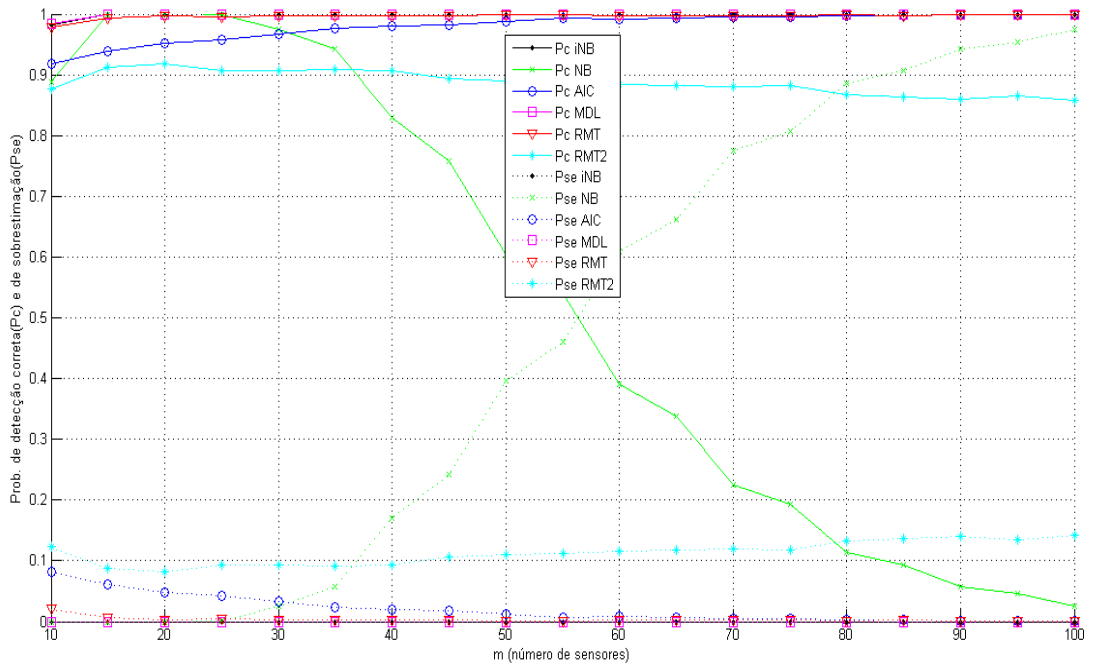


Figura 5.28: P_c e P_{se} em função do número de sensores (m) para o Caso 04 ($p = 3$, $n = 1000$, $SNR = -2$ dB).

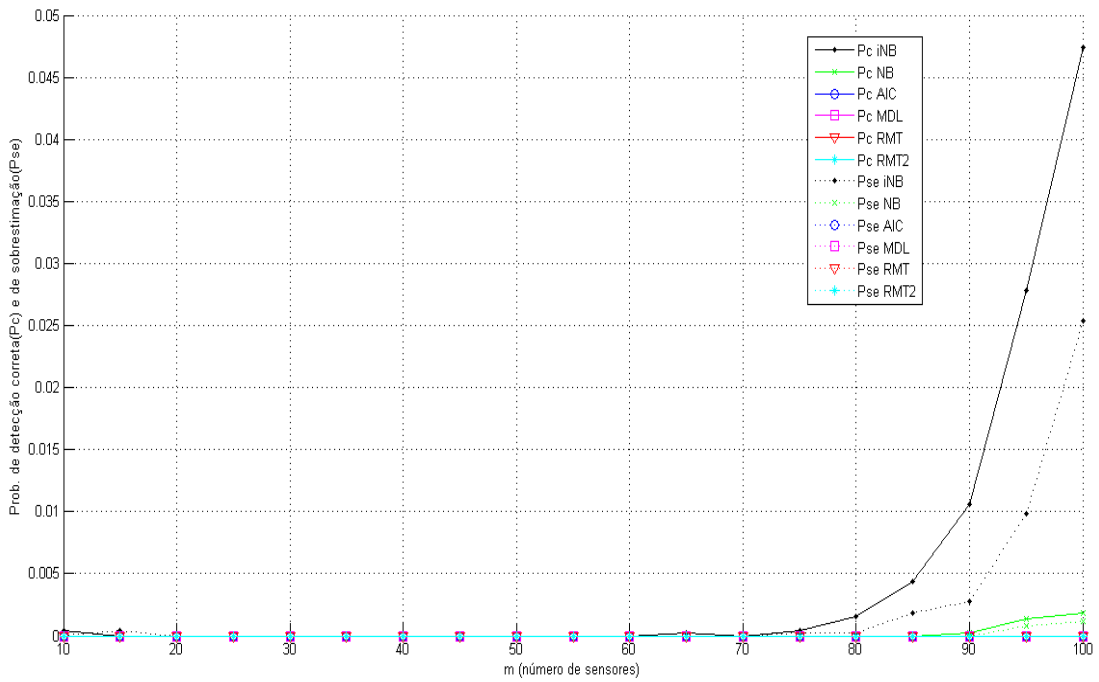


Figura 5.29: P_c e P_{se} em função do número de sensores (m) para o Caso 05 ($p = 8$, $n = 200$, $SNR = -10$ dB).

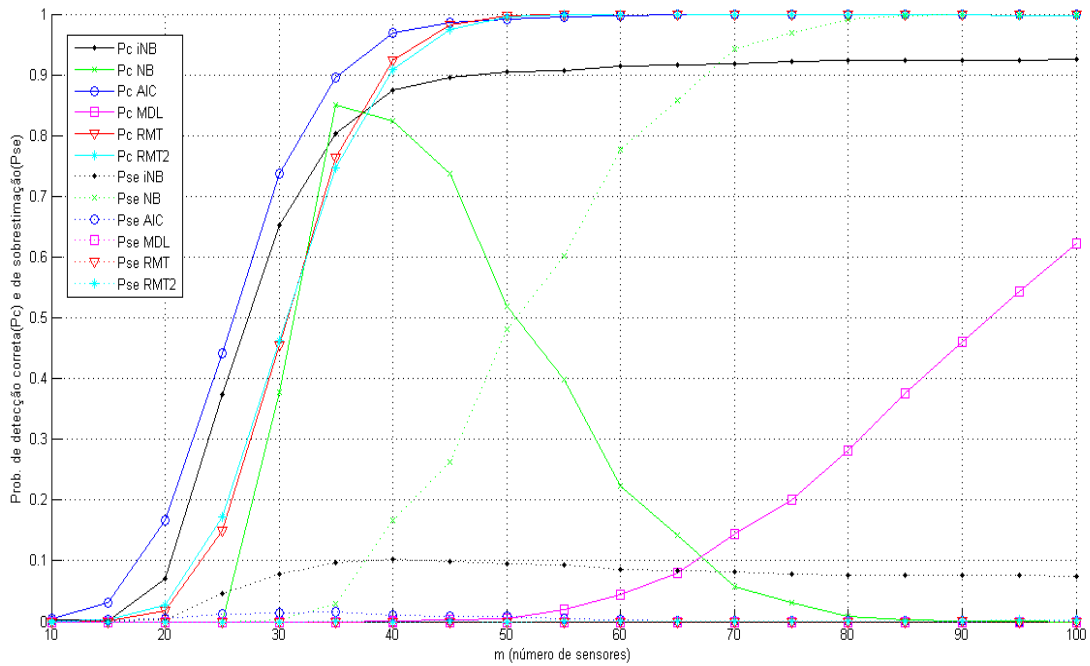


Figura 5.30: P_c e P_{se} em função do número de sensores (m) para o Caso 06 ($p = 8$, $n = 200$, $SNR = -2$ dB).

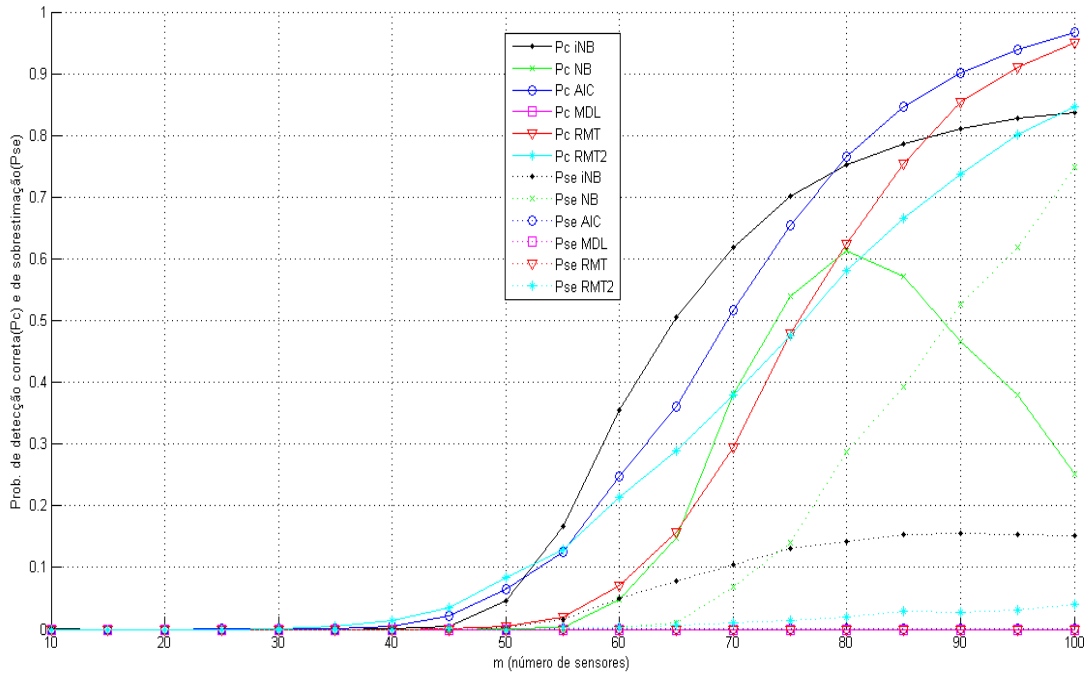


Figura 5.31: P_c e P_{se} em função do número de sensores (m) para o Caso 07 ($p = 8$, $n = 1000$, $SNR = -10$ dB).

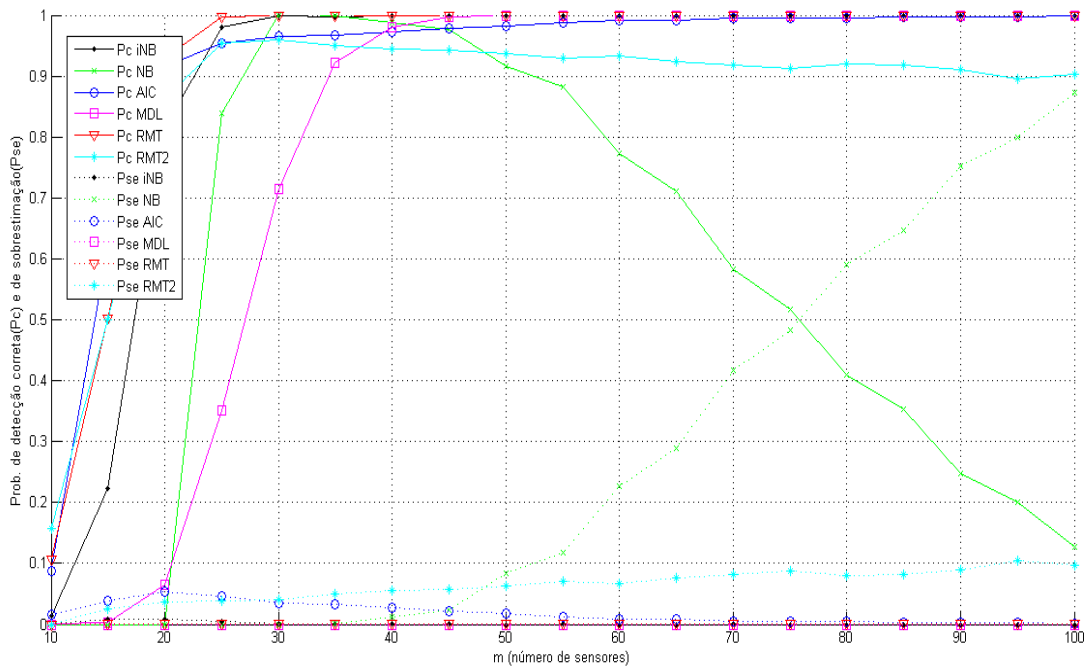


Figura 5.32: P_c e P_{se} em função do número de sensores (m) para o Caso 08 ($p = 8$, $n = 1000$, $SNR = -2$ dB).

A análise das Figuras 5.26 a 5.32, que apresentam o desempenho dos estimadores em função do número de sensores, novamente confirmam a superioridade do estimador iNB em relação aos estimadores MDL e NB.

O NB apresentou grande variação do desempenho com a variação do número de sensores. Já o iNB apresenta a probabilidade de detecção correta crescente com os aumentos do número de sensores e SNR e com a diminuição do número de fontes.

Todas as outras características observadas e comentadas nos itens anteriores também podem ser constatadas com a variação do número de sensores.

Capítulo 6

Conclusões e Pesquisas Futuras

Este trabalho propõe um algoritmo para um estimador empírico, denominado iNB, para o número de fontes de sinais que incidem sobre um conjunto de sensores. Esse estimador é uma melhoria do estimador NB sugerido em [16].

O NB melhorado (iNB) utiliza a norma $\ell_{0,55}$ como instrumento para realizar a classificação dos autovalores da matriz de covariância do sinal recebido. As principais vantagens do estimador iNB são:

- i) tem um algoritmo menos complexo do que o algoritmo NB;
- ii) não usa um escalonamento não linear dos autovalores e também não requer a definição do parâmetro empírico K , que é crucial para a operação adequada do algoritmo NB;
- iii) apresenta, em diversas situações, uma performance superior a um ou mais dos estimadores MDL, AIC e RMT, e
- iv) sempre supera o algoritmo NB.

Em contraste com o estimador AIC e com o estimador baseado em RMT na presença de incerteza na variância do ruído (RMT2), o iNB mostrou-se consistente, embora isso não tenha sido apoiado por uma prova formal.

Sendo uma proposição empírica, não se pode afirmar que o iNB terá uma melhor performance que os outros estimadores em todas as situações não exploradas nesse trabalho.

Podemos atestar, no entanto, que vários outros casos não apresentados nesse trabalho foram analisados, e neles o iNB manteve um melhor desempenho que os estimadores MDL e NB, e um desempenho bem próximo do alcançado pelos estimadores RMT e AIC.

Por último, mas não menos importante, vale a pena mencionar que os nossos resultados podem ser facilmente reproduzidos devido à baixa complexidade do algoritmo iNB.

Como propostas para futuros trabalhos relacionados ao iNB, destacamos:

- i) determinar o valor do parâmetro u da norma que minimiza a probabilidade de sobrestimação média (P_{se} média) e compará-lo com o valor de 0,55 que, nesse trabalho, foi proposto como aquele que máxima a probabilidade de detecção correta média (P_c média);
- ii) um desenvolvimento matemático do algoritmo proposto (iNB) em termos da probabilidade de estimação correta, probabilidade de sobrestimação e consistência (cogita-se, entretanto, que esta análise, se for possível, terá complexidade bastante elevada);
- iii) associação do iNB com outros algoritmos de estimação do número de fontes, como forma de alcançar uma melhoria da performance desses últimos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] NADLER, B. “*Nonparametric Detection of signals by Information Theoretic Criteria: Performance Analysis and an Improved Estimator*”, IEEE Trans. Signal Proc., vol. 58, 5, pp. 2746-2756, May. 2010.
- [2] WAX, M. and KAILATH, T., “*Detection of signals by information theoretic criteria*”, IEEE Trans. Signal Process, vol. 33, 2, pp. 387-392, Apr. 1985.
- [3] KRITCHMAN, E. S. and NADLER, B., “*Non-parametric Detection of the Number of Signals: Hypothesis Testing and Random Matrix Theory*”, IEEE Trans. Signal Proc, vol. 57, 10, pp. 3930-3941, Oct. 2009.
- [4] KRITCHMAN, S. and NADLER, B., “*Determining the number of components in a factor model from limited noisy data*”, Elsevier, Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems, pp. 19-32, June 2008.
- [5] SWAMY, R. K., MURTY, S. R. and YEGNANARAYANA, B., “*Determining number of speakers from multispeaker speech signals using excitation source information*”, IEEE Sig. Process, vol. 14, 7, pp. 481-484, July 2007.
- [6] CHIANI, M. and WIN, M. Z., “*Estimating the Number of Signals Observed by Multiple Sensors*”, International Workshop on Cognitive Information Processing, June 2010.
- [7] FISHLER, E., GROSMAN, M. and MESSER, H., “*Determining the Number of Discrete Alphabet Sources from Sensor Data*”, EURASIP Journal on Applied Signal Processing, pp. 4-12, 1, Jan. 2005.
- [8] FISHLER, E. and POOR, H. V., “*Estimation of the Number of Sources in Unbalanced Arrays via Information Theoretic Criteria*”, IEEE Signal Proc, vol. 53, 9, pp. 3543-3553, Sept. 2005.
- [9] GHASEMI, A. and SOUZA, E.S., *Spectrum Sensing in Cognitive Radio Networks: Requirements, Challenges and Design Trade-offs*, IEEE Communications Magazine, vol. 46, 4, pp. 32-39, Apr, 2008.
- [10] ARKIND, N. and NADLER, B., “*Parametric Joint Detection-Estimation of the Number of Sources in Array Processing*”, Sensor Array and Multichannel Signal Process. Workshop, IEEE, pp. 269-272, Oct, 2010.
- [11] BRUCKSTEIN, A., SHAN, T. J. and KAILATH, T., “*The resolution of overlapping echoes*”, IEEE Trans. Signal Proc., vol. 33, 6, pp. 1357-1367, Dec. 1985.
- [12] AKAIKE, H., *Information theory and extension of the maximum likelihood principle*, Proc. 2nd Int. Symp. Inform. Theory, suppl. Problems of Control and Inform. Theory, pp. 267-281, 1973.

- [13] AKAIKE, H. “A new look at the statistical model identification”, *Automatic Control*, IEEE Transactions on, vol.19, 6, pp. 716-723, Dec. 1974.
- [14] SCHWARZ, G. “Estimating the dimension of a model”, *The Annals of statistics*, vol. 6, 2, pp. 461-464, 1978.
- [15] RISSANEN, J. *Modeling by shortest data description*, *Automatica*, vol.14, pp. 465-471, 1978.
- [16] SOARES, P.M., *Um método empírico para estimação do número de fontes de sinais incidentes em um arranjo de sensores*. Dissertação de Mestrado Instituto Nacional de Telecomunicações. Santa Rita do Sapucaí. Minas Gerais. Brasil.
- [17] SHANNON, C.E., *A mathematical theory of communication*, *The Bell System Technical Journal*, New York, v.27,p.623-656,Oct. 1948.
- [18] FIGUEIREDO, M. A. T., *Elementos da Teoria da Informação*, 2013, Instituto Superior Técnico, Lisboa, Portugal. Disponível em: https://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/285254547932833/teoria_informacao.pdf (Último acesso: 13/08/2015)
- [19] STOICA, P. and SELÉN, Y., “Model-order selection: a review of information criterion rules”, *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. 21, 4, pp. 36-47, July 2004.
- [20] GRÜNWARD, P. *A Tutorial Introduction to the Minimum Description Length Principle*, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Kruislaan, Amsterdam, Apr. 2005.
- [21] Faculty of Mathematics and Computer Science, Boaz Nadler. Available at: [http://www.wisdom.weizmann.ac.il/~nadler/Wishart Ratio Trace/TW_ratio.html](http://www.wisdom.weizmann.ac.il/~nadler/Wishart%20Ratio%20Trace/TW_ratio.html) (last access: on Dec 2013)

APÊNDICE

```
% ESTIMAÇÃO DO NÚMERO DE FONTES POR NORMA L-0,55  
% Dayan A. Guimarães e Giovanni H. F. Floriano-Janeiro/2016
```

```
% ALGORITMOS implementados: iNB(improved NB), NB(norm-based),  
% AIC, MDL e RMT do Boaz Nadler (artigo "non-parametric detection of  
% the number...") com e sem informação exata de variância de ruído.  
%% _____
```

```
clc  
clear all
```

```
%% PARÂMETROS FIXOS EM TODAS AS SIMULAÇÕES
```

```
Ntests=5000; % número de testes de Monte Carlo.
```

```
A=2; % A=1 para cálculo aproximado do limiar do algoritmos RMT;  
% A=2 para cálculo por inversão da CDF TW.
```

```
alpha=0.001; % probabilidade de sobre-estimação do algoritmo RMT
```

```
Beta=2; % Beta=1 para amostras reais, Beta=2 para amostras complexas.
```

```
E=5; % Expoente de encurvamento no algoritmo NB.
```

```
%% PARÂMETROS VARIÁVEIS DA SIMULAÇÃO
```

```
eixo_X='n (número de amostras)'; % seleciona o parâmetro variável  
caso = 1; % seleciona o caso da simulação
```

```
switch (eixo_X)
```

```
case 'n (número de amostras)'
```

```
Parametro=[50 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000 1200 1400  
1600 1800 2000 2250 2500 2750 3000 3500 4000];
```

```
switch (caso)
```

```
case 1
```

```
p = 3;  
m = 30;  
SNR = -10;
```

```
case 2
```

```
p = 3;  
m = 30;  
SNR = -2;
```

```
case 3
```

```
p = 3;  
m = 70;  
SNR = -10;
```

```
case 4
```

```
p = 3;  
m = 70;  
SNR = -2;
```

```
case 5
```

```
p = 8;  
m = 30;  
SNR = -10;
```

```

case 6
    p = 8;
    m = 30;
    SNR = -2;
case 7
    p = 8;
    m = 70;
    SNR = -10;
case 8
    p = 8;
    m = 70;
    SNR = -2;
end

case 'SNR [dB]'
    Parametro=[-10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10];
switch (caso)
case 1
    p = 3;
    m = 30;
    n = 200;
case 2
    p = 3;
    m = 30;
    n = 1000;
case 3
    p = 3;
    m = 70;
    n = 200;
case 4
    p = 3;
    m = 70;
    n = 1000;
case 5
    p = 8;
    m = 30;
    n = 200;
case 6
    p = 8;
    m = 30;
    n = 1000;
case 7
    p = 8;
    m = 70;
    n = 200;
case 8
    p = 8;
    m = 70;
    n = 1000;
end

case 'p (número de fontes)'
    Parametro=[0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20];
switch (caso)
case 1
    m = 30;
    n = 200;
    SNR = -10;

```

```

case 2
    m = 30;
    n = 200;
    SNR = -2;
case 3
    m = 30;
    n = 1000;
    SNR = -10;
case 4
    m = 30;
    n = 1000;
    SNR = -2;
case 5
    m = 70;
    n = 200;
    SNR = -10;
case 6
    m = 70;
    n = 200;
    SNR = -2;
case 7
    m = 70;
    n = 1000;
    SNR = -10;
case 8
    m = 70;
    n = 1000;
    SNR = -2;
end

case 'm (número de sensores)'
    Parametro=[10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 70 75 80 85 90 95 100];
    switch (caso)
        case 1
            p = 3;
            n = 200;
            SNR = -10;
        case 2

            p = 3;
            n = 200;
            SNR = -2;
        case 3
            p = 3;
            n = 1000;
            SNR = -10;
        case 4
            p = 3;
            n = 1000;
            SNR = -2;
        case 5
            p = 8;
            n = 200;
            SNR = -10;
        case 6
            p = 8;
            n = 200;
            SNR = -2;
    end
end

```

```

    case 7
        p = 8;
        n = 1000;
        SNR = -10;
    case 8
        p = 8;
        n = 1000;
        SNR = -2;
    end
end

```

Npt=size(Parametro,2); %núm. de ptos no gráfico = núm. de valores do parâmetro variável

%% ROTINA PRINCIPAL

```

PciNB=zeros(1,Npt);
PseiNB=zeros(1,Npt);
PcNB=zeros(1,Npt);
PseNB=zeros(1,Npt);
PcRMT=zeros(1,Npt);
PseRMT=zeros(1,Npt);
PcRMT2=zeros(1,Npt);
PseRMT2=zeros(1,Npt);
PcMDL=zeros(1,Npt);
PseMDL=zeros(1,Npt);
PcAIC=zeros(1,Npt);
PseAIC=zeros(1,Npt);
PeNB=zeros(1,Npt);
PeiNB=zeros(1,Npt);
PeRMT=zeros(1,Npt);
PeRMT2=zeros(1,Npt);
PeMDL=zeros(1,Npt);
PeAIC=zeros(1,Npt);

```

```
for pt=1:Npt
```

```

%-----
switch (eixo_X)
    case 'n (número de amostras)'
        n=Parametro(pt);
    case 'SNR [dB]'
        SNR=Parametro(pt);
    case 'p (número de fontes)'
        p=Parametro(pt);
    case 'm (número de sensores)'
        m=Parametro(pt);
end
%-----

```

```

CcNB=0;      % contador de acertos de estimação
CseNB=0;    % contador de sobre-estimação
CciNB=0;    % contador de acertos de estimação
CseiNB=0;   % contador de sobre-estimação
CcRMT=0;    % contador de acertos de estimação
CseRMT=0;   % contador de sobre-estimação
CcRMT2=0;   % contador de acertos de estimação com var de ruído imprecisa
CseRMT2=0;  % contador de sobre-estimação com var de ruído imprecisa
CcMDL=0;    % contador de acertos de estimação
CseMDL=0;   % contador de sobre-estimação

```

```

CcAIC=0; % contador de acertos de estimação
CseAIC=0; % contador de sobre-estimação

s2=1/(10^(SNR/10)); % variância de ruído térmico

%% Limiar aproximado do algoritmo RMT
if A==1
    S = (-3/4)*log(16*pi*alpha)^(2/3);
    t=zeros(1,m-1);
    for k=1:m-1
        MU = (1/n)*(sqrt(n-1/2)+sqrt(m-k-1/2))^2;
        PSI = sqrt(MU/n)*((1/sqrt(n-1/2))+(1/sqrt(m-k-1/2)))^(1/3);
        t(k) = s2*(MU + S*PSI);
    end
end

%% Limiar por inversão da FDC Tracy Widom para o algoritmo RMT
if A==2
    for k=1:m; q=m-k;
        if Beta==2
            load TW_beta2.mat
        elseif Beta==1
            load TW_beta1.mat
        end
        [mu_np sigma_np] = KN_mu_sigma(n,q,beta); mu_np = mu_np ./ n; sigma_np =
sigma_np ./ n;
        U_cdf_complementary = 1-TW_s +1/beta/n/q * (mu_np/sigma_np)^2 *
TW_s_tag_tag;
        [val idx] = min(abs(U_cdf_complementary-alpha));
        t(k) = (s2*(mu_np + sigma_np * x(idx)));
        s = x(idx);
    end
end

%% Testes de Monte Carlo
for test=1:Ntests

    if p==0
        X=0;
        g=0;
        H=0;

    else

        gmax=1; % limite máximo das intensidades de potência dos sinais fonte.
        gmin=0.4; % limite mínimo das intensidades de potência dos sinais fonte.

        g=(gmin+(gmax-gmin).*rand(p,1)); % vetor de ganhos para alteração de
% intensidade dos sinais fonte de maneira
% uniformemente distribuída entre gmin e gmax.

        %g=ones(1,p); % habilitado para ter as mesmas intensidades do sinais fonte.

        G=diag(sqrt(g)); % matriz de alteração de intensidades.

        C = sqrt(p)/norm(sqrt(g)); % constante para garantia de potência
% de transmissão total unitária, independente do
% desbalanceamento de potências para cada um
% dos p transmissores (ver mathcad).

```

```

X=randn(p,n)*sqrt(1/(Beta*p))+1i*randn(p,n)*sqrt(1/(2*p))*(Beta-1); % sinais
% Gaussianos

%X=(randint(p,n)*2-1)*sqrt(1/(Beta*p))+1i*(randint(p,n)*2-1)*sqrt(1/(2*p))*(Beta-1);
% Sinais QPSK

X=C*G*X;
H=randn(m,p)*sqrt(1/Beta)+1i*randn(m,p)*sqrt(1/2)*(Beta-1);
end

V=randn(m,n)*sqrt(s2/Beta)+1i*randn(m,n)*sqrt(s2/2)*(Beta-1);
Y=H*X+V;
R=(Y*Y')/n;
lambda=sort(eig(R), 'descend');

%% Algoritmo MDL -----
MDL=zeros(1,m-1);
for i=0:m-1
    MDL(i+1)=-n*log(prod(lambda(i+1:m)))/((1/(m-i))*sum(lambda(i+1:m)))^(m-
i))+1/2*i*(2*m-i)*log(n); % Wax
    %MDL(i+1)=(m-i)*log(sum(lambda(i+1:m))/(m-i))-
log(prod(lambda(i+1:m)))+(1/(2*n))*i*(2*m-i)*log(n); %Nadler = Wax
    %MDL(i+1)=-n*log(prod(lambda(i+1:m)))/((1/(m-i))*sum(lambda(i+1:m)))^(m-
i))+1/2*i*(2*m-i+1)*log(n); % Fishler
end
[minMDL, lmdl]=min(MDL);
NrMDL=lmdl-1;

%% Algoritmo AIC -----
AIC=zeros(1,m-1);
for i=0:m-1
    AIC(i+1)=-2*n*log(prod(lambda(i+1:m)))/((1/(m-i))*sum(lambda(i+1:m)))^(m-
i))+2*i*(2*m-i);
end
[minAIC, laic]=min(AIC);
NrAIC=laic-1;

%% Algoritmo NB -----
b=(lambda-lambda(m))/(lambda(1)-lambda(m));

c=(1-(1-b).^E).^0.5;
K=floor(m/2);
k=m;
N=zeros(1,K);
for u=1:K
    N(u)=sqrt(c(u)^2+((u-1)/(K-1))^2);
end
[minNorm, lnb]=min(N);
NrNB=lnb-1;

%% Algoritmo iNB -----
L=(lambda-lambda(m))/(lambda(1)-lambda(m));
%P=linspace(0.55, 1, m); % default P = 0.55 sem adaptação e 0.55 a 1 com adaptação.
P = 0.55;
for u=1:m
    N(u)=(L(u)^P + ((u-1)/(m-1))^P)^(1/P);
end

```

```
[minNorm, linb]=min(N);  
NriNB=linb-1;
```

```
%% Algoritmo RMT -----  
for i=1:m-1  
    if lambda(i)<t(i)  
        lrmT=i;  
        break  
    end  
end  
NrRMT=lrmT-1;
```

```
%% Algoritmo RMT com erro de estimação da variância de ruído  
Delta=0.1*s2*rand-0.05*s2;  
for i=1:m  
    if lambda(i)<(t(i)+Delta*t(i)/s2)  
        lrmT2=i;  
        break  
    end  
end  
NrRMT2=lrmT2-1;
```

```
%% Contagem de eventos e acerto, erro e sobre-estimação  
if NrNB==p  
    CcNB=CcNB+1;  
end  
if NrNB>p  
    CseNB=CseNB+1;  
end  
if NriNB==p  
    CciNB=CciNB+1;  
end  
if NriNB>p  
    CseiNB=CseiNB+1;  
end  
if NrRMT==p  
    CcRMT=CcRMT+1;  
end  
if NrRMT>p  
    CseRMT=CseRMT+1;  
end  
if NrRMT2==p  
    CcRMT2=CcRMT2+1;  
end  
if NrRMT2>p  
    CseRMT2=CseRMT2+1;  
end  
if NrMDL==p  
    CcMDL=CcMDL+1;  
end  
if NrMDL>p  
    CseMDL=CseMDL+1;  
end  
if NrAIC==p  
    CcAIC=CcAIC+1;
```

```

end
if NrAIC>p
    CseAIC=CseAIC+1;
end

end

%% Taxas de acerto, erro e sobre-estimação
PcNB(pt)=CcNB/Ntests;
PseNB(pt)=CseNB/Ntests;
PciNB(pt)=CciNB/Ntests;
PseiNB(pt)=CseiNB/Ntests;
PcRMT(pt)=CcRMT/Ntests;
PseRMT(pt)=CseRMT/Ntests;
PcRMT2(pt)=CcRMT2/Ntests;
PseRMT2(pt)=CseRMT2/Ntests;
PcMDL(pt)=CcMDL/Ntests;
PseMDL(pt)=CseMDL/Ntests;
PcAIC(pt)=CcAIC/Ntests;
PseAIC(pt)=CseAIC/Ntests;
PeNB(pt)=1-PcNB(pt);
PeiNB(pt)=1-PciNB(pt);
PeRMT(pt)=1-PcRMT(pt);
PeRMT2(pt)=1-PcRMT2(pt);
PeMDL(pt)=1-PcMDL(pt);
PeAIC(pt)=1-PcAIC(pt);

end

%% Gráficos de Pc e Pse
figure
hold on
grid on
plot(Parametro,PciNB,'k.-');
plot(Parametro,PcNB,'gx-');
plot(Parametro,PcAIC,'bo-');
plot(Parametro,PcMDL,'ms-');
plot(Parametro,PcRMT,'rv-');
plot(Parametro,PcRMT2,'c*-');
plot(Parametro,PseiNB,'k.:');
plot(Parametro,PseNB,'gx:');
plot(Parametro,PseAIC,'bo:');
plot(Parametro,PseMDL,'ms:');
plot(Parametro,PseRMT,'rv:');
plot(Parametro,PseRMT2,'c*:');
xlabel(eixo_X);
ylabel('Prob. de detecção correta(Pc) e de sobrestimação(Pse)');
legend('Pc iNB','Pc NB','Pc AIC','Pc MDL','Pc RMT','Pc RMT2','Pse iNB','Pse NB','Pse AIC','Pse MDL','Pse RMT','Pse RMT2',0);
hold off;

```