Dissertação de Mestrado

Inatel
Instituto Nacional de Telecomunicações

UM NOVO MÉTODO DE GERAÇÃO DE SINAIS COMPLEXOS

ROBINSON GAUDINO CAPUTO

MARÇO / 2006

UM NOVO MÉTODO DE GERAÇÃO DE SINAIS COMPLEXOS

ROBINSON GAUDINO CAPUTO

Dissertação apresentada ao Instituto Nacional de Telecomunicações, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Telecomunicações.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Adonias Costa da Silveira

Santa Rita do Sapucaí
Março/2006

Dissertação defendida e aprovada em 17 / 03 / 2006 ,
pela comissão julgadora:

Prof. Dr. Adonias Costa da Silveira

_____

DTE / INATEL

Prof. Dr. José Edimar Barbosa Oliveira

_____

ITA / CTA

Prof. Dr. José Antonio Justino Ribeiro

_____

DTE / INATEL

_____

Prof. Dr. Adonias Costa da Silveira
Coordenador do Curso de Mestrado

"O nosso DEUS será nosso guia, até a morte."

Salmo 48:14

Aos meus filhos, aos meus pais e a Lila Elizabeth Juárez pelo amor e apoio dedico este trabalho.

.

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a **DEUS**, pela minha vida e pela direção nas idéias e soluções a mim reveladas nestes anos dedicados a pesquisa.

Também agradeço a DEUS pela vida das pessoas que acreditaram nesta pesquisa e estiveram ao meu lado me apoiando, incentivando e ajudando nos inúmeros trabalhos realizados.

Entre elas quero destacar o amigo **Eng. Luiz Gustavo Varella Figueiredo,** que pacientemente me acompanhou em todos os momentos e trabalhou de maneira árdua nos testes e intermináveis simulações.

Ao **Eng. Fábio Garcia Pina** e sua empresa TSDA pela colaboração dos serviços prestados nos testes de laboratório.

E destaco com honra o amigo **Prof. Dr. José Antônio Justino Ribeiro** que discutiu comigo diversos aspectos desta dissertação.

Agradeço ao meu orientador **Prof. Dr. Adonias Costa da Silveira** pelo apoio e insistente cobrança dos resultados.

A todos aqui citados peço que DEUS os abençoe muito.

ÍNDICE

AGRADECIMENTOS ---------- **v**

LISTA DE FIGURAS ---------- **viii**

LISTA DE TABELAS ---------- **xi**

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS ---------- **xii**

RESUMO ---------- **xiii**

ABSTRACT ---------- **xiv**

CAPÍTULO I ---------- **1**

APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA ---------- **1**

1.1. INTRODUÇÃO ---------- 1

1.2. BREVE DESCRIÇÃO E MOTIVAÇÃO PARA O ESTUDO ---------- 2

1.3. DESENVOLVIMENTO DO TRABALHO ---------- 2

CAPÍTULO II ---------- **4**

ANÁLISE POLINOMIAL ---------- **4**

2.1. IDÉIA FUNDAMENTAL ---------- 4

2.2. O FORMATO BÁSICO DA EQUAÇÃO DNAX E SUA INTERPRETAÇÃO ---------- 5

2.3. FORMA GERAL DA EQUAÇÃO DNAX ---------- 8

2.4. VARIAÇÕES DA EQUAÇÃO DNAX ---------- 8

CAPÍTULO III ---------- **11**

NOVA APRESENTAÇÃO DAS FUNÇÕES CLÁSSICAS DA ENGENHARIA ---------- **11**

3.1. INTRODUÇÃO ---------- 11

3.2. DESCRIÇÃO DO IMPULSO UNITÁRIO ---------- 11

3.3. DEFINIÇÃO CORRENTE DO DEGRAU UNITÁRIO ---------- 12

3.4. APROXIMAÇÃO DO DEGRAU UNITÁRIO PARA FUNÇÃO COM TRANSIÇÃO CONTINUA ---------- 12

3.5. DEFINIÇÃO DO IMPULSO UNITÁRIO ATRAVÉS DAS EQUAÇÕES DNAX ---------- 13

3.6. DETERMINAÇÃO DO PULSO RETANGULAR APERIÓDICO ---------- 14
3.7. EQUAÇÃO DNAX PARA UM ÚNICO PULSO ---------- 15
3.8. INTRODUÇÃO DE PARÂMETROS E FUNÇÕES COMPLEMENTARES ---------- 18
3.9. SEQÜÊNCIA DE PULSOS CONTÍNUOS PERIÓDICOS ---------- 19
3.10. SEQÜÊNCIA DE GRUPO DE BITS ---------- 20
3.11. COMPROVAÇÃO EXPERIMENTAL DA OBTENÇÃO DOS SINAIS COM CIRCUITOS ELETRÔNICOS ---------- 23

CAPÍTULO IV ---------- 29

GERAÇÃO DE SINAIS SIMPLES E COMPOSTOS ---------- 29
4.1. OBJETIVO E IDÉIA DO MÉTODO ---------- 29
4.2. CONJUNTO DE PARÂMETROS PARA AS FUNÇÕES DNAX ---------- 30
4.3. VISUALIZAÇÃO NO OSCILOSCÓPIO ---------- 34
4.4. MODULAÇÃO POR TEMPO DE SUBIDA OU DE DESCIDA ---------- 39
4.5. ALGUMAS FORMAS DE ONDA COMPLEXAS OBTIDAS COM A DNAX ---------- 39

CAPITULO V ---------- 42

COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES ---------- 42
5.1. COMENTÁRIOS GERAIS ---------- 42
5.2. SUGESTÕES PARA FUTUROS DESENVOLVIMENTOS E APLICAÇÕES ---------- 43
5.2 CONCLUSÃO ---------- 48

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS ---------- 49

PATENTES REGISTRADAS ---------- 50

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1. Comportamento do polinômio para diversos valores do expoente n.-------- 5

Figura 2.2. Comportamento do polinômio P_N para diversos valores do coeficiente n. - 6

Figura 2.3. Pulso retangular representativo da função analisado para a = 1 e $|n| \to \infty$. -- 6

Figura 2.4. Janela de operação determinada pelos valores dos coeficientes a e n da equação proposta. ---------- 7

Figura 2.5. Abertura da janela de operação em função do parâmetro a**.** ---------- 8

Figura 2.6. Representação da forma geral da equação proposta e a influência do valor de n. ---------- 8

Figura 3.1. Representação do impulso unitário na origem.----------12

Figura 3.2. Função degrau unitário, com sua indefinição na transição entre 0 e 1.-----12

Figura 3.3. Função degrau unitário obtido com a equação proposta neste trabalho. ---13

Figura 3.4. Gráfico do impulso unitário obtido com DNAx para as condições propostas no texto. Fica bem evidente que se trata de forma de onda com largura temporal muito pequena.----------14

Figura 3.5. Pulso retangular aperiódico, em sua representação clássica e da forma como é obtido através da equação DNAx. ----------15

Figura 3.6. Identificação do pulso isolado e a forma de definição de sua largura no domínio do tempo. Na segunda parte, destacam-se os intervalos de tempo tomados como as durações da subida e da descida do pulso.----------16

Figura 3.7. Possibilidade de modulação do tempo de subida do pulso retangular**.** -----17

Figura 3.8. Função de referência X(t) periódica, de formato senoidal. ----------18

Figura 3.9. Função de referência operada pela função DNAx com deslocamento no eixo das abcissas.----------19

Figura 3.10. Seqüência de pulsos contínuos periódicos, gerados pela função dada no texto. ----------20

Figura 3.11. Variação na largura dos pulsos seqüenciais, gerada a partir do polinômio representativo da transformada da função no domínio polinomial.---------22

Figura 3.12. Outro exemplo de seqüência de pulsos gerada pelo polinômio representativo da função analisada. ----------22

Figura 3.13. Diagrama em blocos de uma célula DNAx básica, capaz de gerar um ou vários pulsos controlados pela função X(t) e pelos parâmetros n, d e a. ---24

Figura 3.14. Diagrama esquemático de uma célula DNAx implementada conforme descrição no texto e com objetivo de comprovar a validade das equações, de acordo com o diagrama em blocos da figura anterior. ----------25

Figura 3.15. Vista superior da montagem da célula DNAx com os componentes e dispositivos descritos no texto. ----------26

Figura 3.16. Vista inferior da montagem da célula DNAx, conforme descrição no texto.26

Figura 3.17. Seqüência de formas de onda obtidas com o circuito implementado, com alterações nos valores dos parâmetros de controle da função DNAx. Os sucessivos formatos foram encontrados com o aumento dos valores de a e n.----------28

Figura 4.1. Sintetização de uma senóide pela superposição de ondas quase retangulares obtidas com a função DNAx .Notar que a freqüência do sinal resultante é igual a freqüência das ondas quase retangulares, e é o dobro da freqüência do sinal X(t).----------32

Figura 4.2. Forma de onda obtida com a menor distorção harmônica, seguindo os critérios propostos no texto. Neste caso, a distorção harmônica total ficou mais de 72dB abaixo do nível da senóide pura. ----------33

Figura 4.3. Com o aumento no valor de n, houve acréscimo na distorção. Neste caso, a distorção harmônica total ficou perto de 35dB abaixo da amplitude da senóide. ----------34

Figura 4.4. Nova forma de onda, com maior valor de distorção harmônica, em função do número finito de ondas retangulares utilizadas. Neste caso, tem-se uma distorção harmônica total de aproximadamente 25dB.----------35

Figura 4.5. Diagrama em blocos com as células DNAx para geração de sinais senoidais---------- 36

Figura 4.6. Na parte superior tem-se o resultado da soma das ondas retangulares e na parte inferior apresenta-se a forma de onda gerada pela distorção harmônica para n = 3.----------36

Figura 4.7. Na parte superior tem-se o resultado da soma das ondas retangulares e na parte inferior apresenta-se a forma de onda gerada pela distorção harmônica para n = 2.----------37

Figura 4.8. Na parte superior tem-se o resultado da soma das ondas retangulares para n = 1 e na parte inferior apresenta-se a forma de onda gerada pela soma das ondas retangulares com n = 400. ----------37

Figura 4.9. Superposição das ondas anteriores para n = 1 e n = 400, demonstrando que os valores são coincidentes em freqüência e amplitude, porém com formatos diferentes. ----------38

Figura 4.10. Comparação entre as ondas senoidais com -70dB e com -25dB de distorção harmônica total.----------38

Figura 4.11. Sinal em que se controlou o tempo de descida da portadora com o sinal modulante incorporado na função DNAx. ----------39

Figura 4. 12. Diferentes formas de onda inseridas na janela DNAx, que permitem operações matemáticas como integrações, diferenciações, etc., em limites preestabelecidos. ----------41

Figura 5.1. Representação dos pulsos no domínio do tempo e no domínio matemático para a aplicação proposta e uma ilustração do algoritmo proposto. --------44

Figura 5.2. Seqüência de bits relativos aos polinômios P(x) e Pk(x) conforme explicitados no texto. O polinômio P(x) obedece à seqüência 10101001 e o $P_k(x)$ obedece à 10001000.----------45

Figura 5.3. Visualização da encriptação/compressão da seqüência de bits gerada a partir do polinômio P(x). A segunda seqüência de bits é proporcional a $P_r(x)$. ----------46

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1. Coeficientes determinados para a geração de ondas retangulares ---------- 30

Tabela 5.1. Polinômio P(x) do exemplo de aplicação com sua seqüência de bits. ---------- 44

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

OWA - Operational Window Aperture, (Abertura de Janela Operacional).

NRZ - No Return to Zero, (Não Retorno a Zero).

RTM - Rise Time Modulation, (Modulação por Tempo de Subida).

DNAx - Nome fantasia patenteado que reúne as letras usadas nas equações, sendo D a constante de deslocamento da função geradora dos pulsos, N é o expoente da equação exponencial e define o tempo de subida dos pulsos, A é a constante que define a largura dos pulsos e x é a variável da função geradora dos pulsos.

THD - Total Harmonic Distortion, (Distorção Harmonica Total).

TD - Time Domain, (Domínio do Tempo).

MD - Mathematical Domain, (Domínio Matemático).

RESUMO

Caputo, R. G. Um Novo Método de Geração de Sinais Complexos. Santa Rita do Sapucaí. 2004. Instituto Nacional de Telecomunicações.

Aplicações em sistemas digitais, encriptação, sistemas pulsados, compressão de dados, etc., são tratados nesta dissertação de maneira simplificada e inovadora. Este trabalho apresenta algumas contribuições importantes da técnica DNAx aos campos da matemática, física e engenharia. Primeiramente definimos as equações DNAx e as aplicamos nas definições do impulso unitário, do degrau unitário e do pulso aperiódico. Criamos o conceito de Abertura de Janela Operacional (*OWA - Operational Window Aperture*), que permite obtermos a síntese de sinais complexos, introduzimos o conceito de uma nova transformada que permite sairmos do domínio do tempo para o domínio matemático, instrumento que permite usar novos processos polinomiais no estudo de sinais digitais e também a ampliação da aplicação do conceito de funções ortogonais para gerarmos sinais senoidais, controlarmos suas distorções e sugerimos a criação novos processos de modulação.

ABSTRACT

Caputo, R. G. - A New Method for Wave Form Generation Santa Rita do Sapucaí. 2004. Instituto Nacional de Telecomunicações.

In this work new applications in digital systems, encryption systems, data transmission, etc., through a new mathematical approach are described. This work presents some new important DNAx technique contributions to mathematics, physics and engineering fields. First of all the DNAx equations are defined and applied to definition of Delta of Dirac function, Unit Step Function and Non Periodic Pulse Function (Gate function). The concept of (*OWA) Operational Window Aperture* is introduced to allow the synthesis of complex signals in a easy way. A new transform concept that permits to map the points of time domain set to the mathematical domain set through polynomial function, is introduced.

This transformation process allows to use polynomial process to develop new applications in digital signals systems. The DNAx function shows the viability to create sinusoidal wave functions through a addition of square waves with controlled distortions and creating a viability of new modulation process.

CAPÍTULO I

APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

1.1. INTRODUÇÃO

Novas metodologias são necessárias para alcançar níveis tecnológicos mais altos em engenharia e física. A técnica proposta neste trabalho será designada como *DNAx* e mostra-se uma ferramenta revolucionária. Ela permite representar sinais e manipulá-los através de conceitos matemáticos flexíveis e originais. Podemos representar sinais elétricos analogicamente de uma forma continua, periodicamente ou aperiodicamente, podendo ser compostos como um sinal de vídeo colorido ou simples como uma seqüência digital de *uns* e *zeros*.

A idéia fundamental é obter uma equação contínua derivável em todo o intervalo de descrição da mesma. Sob determinadas condições, esta função deve ser linear e permitir a aplicação do princípio da superposição, de modo que a síntese de funções seja simplificada. Este método mostra-se bastante potente para a geração de sinais complexos, geração de diversos tipos de modulação como PWM, PPM, etc.. Em sua evolução, permitiu que se definisse a modulação por tempo de subida, aqui designada como RTM (*Rise Time Modulation*).

Este método de abordagem para síntese de funções permitiu também definir um processo novo de geração de ondas senoidais a partir da soma de ondas quase retangulares. Desta forma, tem-se o completo domínio sobre as funções senoidais ou quase senoidais. Outra aplicação interessante é a conversão de uma seqüência de bits em um polinômio equivalente. Neste ponto, podemos definir uma nova transformada, que conecta um polinômio a uma seqüência de bits ou vice-versa. O processo polinomial mostra-se muito versátil e permite outras aplicações que serão discutidas no trabalho, como a encriptação de sinais e mensagens.

1.2. BREVE DESCRIÇÃO E MOTIVAÇÃO PARA O ESTUDO

Nos últimos anos, desenvolveram-se estudos detalhados para se representar analiticamente e de forma contínua os sinais elétricos, com o objetivo de ampliar e facilitar os cálculos matemáticos sobre eles. Com a criação da célula DNAx, ampliam-se também suas aplicações e capacidades, sugerindo-se diferentes empregos e propostas de novas tecnologias envolvendo o processamento de sinais.

A técnica DNAx expressa a relação entre dois polinômios, onde os coeficientes e expoentes definem os resultados desejáveis. As relações serão de exponenciação ou de divisão. Com estas relações polinomiais, poderemos redefinir diversas funções da engenharia, como a função impulso unitário, a função degrau unitário, a função pulso aperiódico ou a função pulsos periódicos (ondas retangulares), etc., de uma maneira continua, com suas derivadas existindo em todos os pontos. Podemos, então, obter uma expansão das aplicações, abrindo novas maneiras de se pensar matematicamente as aplicações dessas funções. O fato permitirá explorá-las como uma ferramenta de transformação de domínio e não só de estudo do fenômeno que elas descrevem. Também serão abordados alguns aspectos práticos, com montagem de circuitos que produzem os sinais elétricos sintetizados pelas funções matemáticas descritas. Será explorada também a geração de sinais elétricos através de programas de computador que lêem os dados numéricos calculados pelo Mathcad®, programa aqui usado para a simulação das funções e sintetização dos sinais obtidos com a DNAx, e os apresentam para serem utilizados ou analisados em um osciloscópio, conforme apresentado.

1.3. DESENVOLVIMENTO DO TRABALHO

Para cumprir os objetivos, dividiu-se o assunto em diversas partes, separadas em capítulos independentes, mas complementares. O Capítulo 2 apresenta a idéia básica da proposta e descreve a formação da função DNAx, sua representação geral e as alterações mais relevantes propostas a partir de sua concepção original.

O Capítulo III é dedicado às novas descrições de funções matemáticas conhecidas da engenharia de comunicações e de grande importância no tratamento de sinais. Destacam-se a função degrau unitário, o impulso unitário, a função porta. Nestes casos, demonstra-se como são possíveis suas descrições a partir de funções polinomiais simples, com muito boa concordância em relação às formas tradicionais de apresentação. Além disto, são discutidas

as influências dos parâmetros associados à função proposta sobre o grau de exatidão das novas apresentações das funções clássicas. São também apresentados os resultados práticos da geração dos sinais pulsados em um circuito elétrico, montado para a comprovação da validade deste processo matemático.

No Capítulo IV, exploram-se as possibilidades de os parâmetros das equações da função DNAx serem controlados para a constituição de ondas simples, como as senóides, a partir da superposição de ondas quase retangulares. Uma inovação a mais é o levantamento da hipótese do controle dos tempos de subida e de descida do pulso retangular a partir de bits de informação. A implementação física desta proposição resultará em uma nova técnica de modulação. Prevê-se grande utilidade para a idéia, com aplicações em sistemas de comunicações com elevadas taxas de transmissão.

CAPÍTULO II

ANÁLISE POLINOMIAL

2.1. IDÉIA FUNDAMENTAL

A expressão inicialmente considerada é um polinômio de variável única como se segue:

$$P_D = a_n x^n + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \qquad (2.1)$$

Para esta análise, foi conveniente estabelecer as seguintes condições

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 && \text{(a)} \\ n &\to 2n && \text{(b)} \\ a_{n-1} = a_{n-2} &= \cdots = a_2 = a_1 = 0 && \text{(c)} \end{aligned} \qquad (2.2)$$

que resultou em um novo formato do polinômio, com modificações nos coeficientes do termo de ordem mais elevada, a saber

$$P_D = 1 + (a.x)^{2n} \qquad (2.3)$$

Para

$$n = \{1, 2, \cdots, \infty\} \qquad (2.4)$$

o gráfico a seguir mostra as diversas configurações do polinômio, à medida que o valor de *n* cresce. Quanto maior o valor de *n*, mais acentuada será a variação do polinômio nas proximidades de suas raízes. Observa-se que existem três pontos fixos, dois dependentes do valor da constante *a* e independentes de *n* e um independente de *a* e *n*. Todos os polinômios P_D para um mesmo valor de *a* e diferentes valores de *n* passam por estes pontos. No exemplo os pontos para *a=1* estão localizados em (-1,2), (0,1) e (1,0) respectivamente.

Fez-se o mesmo tratamento para um polinômio P_N, descrito por

$$P_N = 1-(ax)^{2n} \tag{2.5}$$

com os diversos valores de *n*, como apresentado na Figura 2.2, novamente para

$$n = \{1, 2, \cdots, \infty\} \tag{2.6}$$

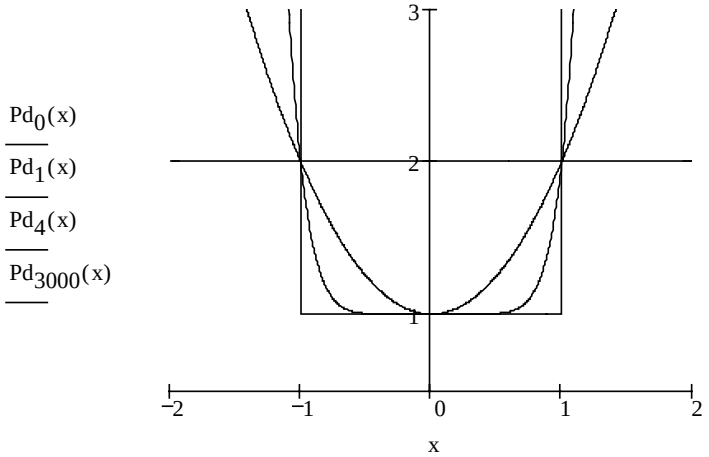


Figura 2.1. *Comportamento do polinômio para diversos valores do expoente n.*

Nota-se que também os polinômios P_N para um mesmo valor de *a* e diferentes valores de *n* apresentam três pontos fixos. No exemplo para *a=1* os pontos estão em (-1,0); (1,0) e (0,1).

2.2. O FORMATO BÁSICO DA EQUAÇÃO DNAx E SUA INTERPRETAÇÃO

A ferramenta DNAx está sendo desenvolvida a partir da divisão entre os polinômios P_N e P_D da forma

$$y(x) = \frac{P_N}{P_D} = \frac{1-(ax)^{2.n}}{1+(ax)^{2.n}} \tag{2.7}$$

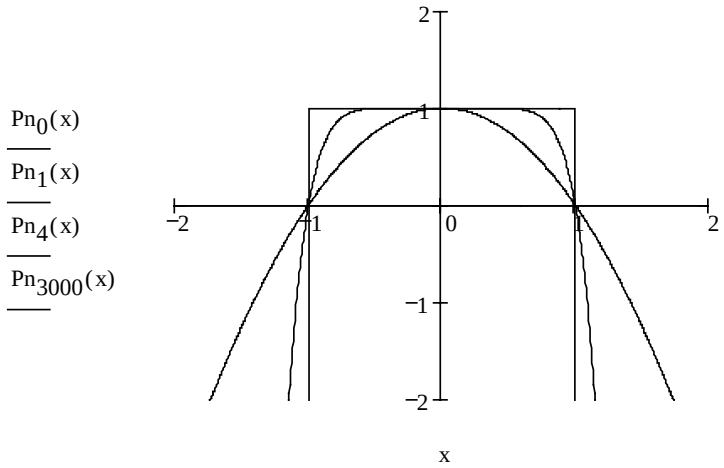


Figura 2.2. *Comportamento do polinômio P_N para diversos valores do coeficiente n.*

Como observado, os polinômios P_D e P_N para um mesmo valor de a passam por pontos fixos. Estes pontos fixos também existem para *y(x)* e estão localizados em (-1/*a* , 0); (0,1) e (0,+1/*a*). Esta propriedade indica que estes pontos são soluções da equação diferencial que rege o comportamento de *y(x)*. Portanto, é possível descrever sinais contínuos e diferenciáveis a partir de uma seleção de funções que relacionem os polinômios P_N e P_D .

A equação *y(x)* é uma função par e define um pulso retangular continuo centrado na origem. A borda anterior do pulso é centrada no ponto P_o (–1/*a*, 0) e a borda posterior do pulso pelo ponto P_c (1/*a*, 0). As transições de subida e de descida aproximam se de zero quando $n \to \infty$. A Figura 2.3 ilustra a situação para o valor particular de *a* = 1. Serão apresentadas as influências dos diferentes parâmetros no formato do pulso.

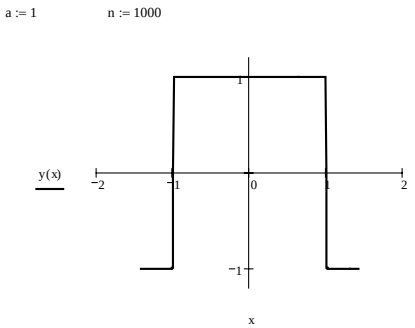


Figura 2.3. *Pulso retangular representativo da função analisado para a = 1 e* $|n| \to \infty$.

O coeficiente *a* determina qual a parte do plano *x-y* em que a equação DNAx assume valores outros diferentes de –1. O fator *n* estabelece a taxa de transição de –1 para +1 e +1 para –1. Quanto maior o seu valor menores serão as durações das correspondentes transições. O parâmetro *a* define uma *abertura de janela* no eixo das abscissas (Figura 2.4). Dentro desta janela pode-se operar, traçando ou definindo uma função necessária à operação, como será discutido mais adiante. A *abertura da janela operacional* (OWA) é definida como a região em que $y(x)$ assume valores diferentes de –1. A combinação de *a* e *n* define a abertura da janela operacional, onde *n* determina quão rápido o valor de $y(x)$ muda de –1 para qualquer outro definido e vice-versa.

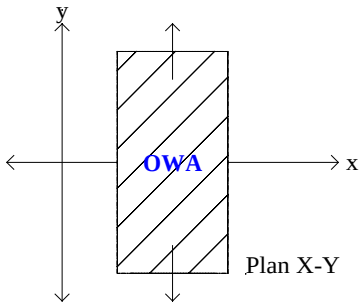


Figura 2.4. *Janela de operação determinada pelos valores dos coeficientes a e n da equação proposta.*

A OWA é a região delimitada pelo ponto de abertura $P_o(-1/a, 0)$ e pelo ponto de fechamento $P_c(1/a,0)$. Portanto, o valor de *a* determina quão aberta ou fechada será a janela, como ilustra a figura a seguir. A abertura da OWA é dada pelas intersecções com o eixo das abscissas, na forma

$$|w| = 2/a \tag{2.8}$$

Da maneira como a abertura da janela foi definida, o parâmetro *n* não afeta o seu valor. Quando $n \to \infty$, o ângulo de inclinação da subida ou descida, medido em relação ao eixo das abscissas, tende para $\pi/2$. A área sob a curva é constante para qualquer valor de *n*. A demonstração desta propriedade segue o roteiro descrito no Capítulo 3, quando for calculado o tempo de subida.

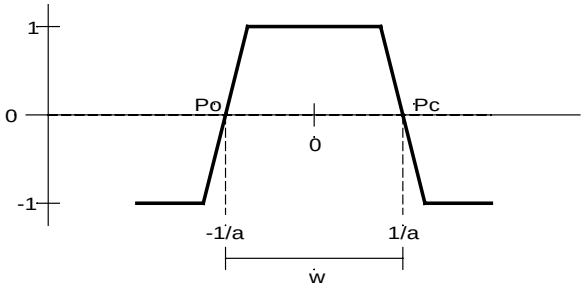


Figura 2.5. *Abertura da janela de operação em função do parâmetro a.*

2.3. FORMA GERAL DA EQUAÇÃO DNAX

Uma generalização de (2.7) assume o aspecto

$$y(x) = \frac{f(x) - (ax)^{2n}}{1 + (ax)^{2n}} \tag{2.9}$$

e a Figura 2.6 ilustra a equação DNAx com uma função arbitrária $f(x)$ descrita dentro da janela. A primeira parte da figura é a representação com baixo valor para o parâmetro n. Pequenos valores para este coeficiente resultam em transições lentas na subida e na descida das bordas da janela. Uma conseqüência é o surgimento de distorções em $f(x)$ nas vizinhanças dos pontos $(-1/a, 0)$ e $(1/a, 0)$. Na segunda parte da figura tem-se a situação para $n \to \infty$.

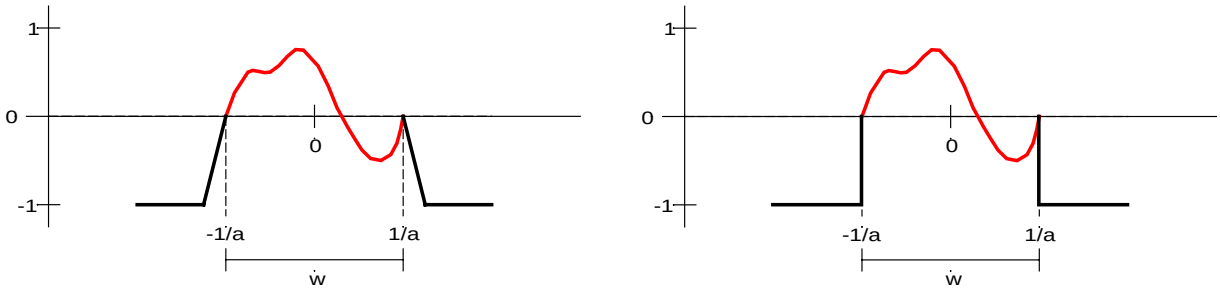


Figura 2.6. *Representação da forma geral da equação proposta e a influência do valor de n.*

2.4. VARIAÇÕES DA EQUAÇÃO DNAX

A forma geral completa da equação DNAx será denominada de equação DNAx exponencial tipo A, e tem o seguinte formato

$$y_a(x) = \left[(ax)^{2n} + f(x)\right]^{\left[1-(ax)^{2n}\right]} \tag{2.10}$$

Um caso especial desta nova representação é a equação exponencial ou equação DNAx do pulso:

$$y_a(x) = \left[(ax)^{2n} + 1\right]^{\left[1-(ax)^{2n}\right]} \tag{2.11}$$

Uma terceira apresentação, que será designada como tipo C, semelhante à do tipo A com um grau de liberdade a menos:

$$y_a(x) = \left[(ax)^{2n} + f(x)\right]^{\left[-(ax)^{2n}\right]} \tag{2.12}$$

A representação tipo D é obtida a partir da equação tipo B e trata-se de um recurso matemático que permitirá a obtenção de um pulso com formato NRZ:

$$y(x) = \frac{1-(ax)^{2n}}{1+(ax)^{2n}} \tag{2.13}$$

Finalmente, é possível ainda representar a equação proposta em uma forma equivalente, como se descreve a seguir. A demonstração parte da forma básica

$$y_t = \left\{ \left[(ax)^{2n} + f(x)\right]^{\left[1-(ax)^{2n}\right]} \right\} = \left\{ \left[Q + f(x)\right]^{[1-Q]} \right\} \tag{2.14}$$

Para facilitar o desenvolvimento, será somado e subtraído o valor 1 à base da equação anterior. Depois, será fatorado o fator $(1+Q)$ e obtém-se novo formato:

$$y_t = \left[(1+Q)^{(1-Q)}\right]\left[1 - \frac{1}{(1+Q)} + \frac{f(x)}{(1+Q)}\right]^{(1-Q)} \tag{2.15}$$

Agora, vamos determinar o limite de Q em torno do valor $x = 0$, onde está determinado o pulso. Obtém-se que $\lim_{x \to 0} Q = 0$ para qualquer valor de n positivo. Em conseqüência, nesta região analisada e quando o expoente n tender para o infinito, resulta

$$y_t = \left[1 + (ax)^{2n}\right]^{\left[1-(ax)^{2n}\right]} f(x) \qquad \text{para} \quad -a \le x \le a \tag{2.16}$$

permitindo concluir que

$$\left\{\left[\left[1 + (ax)^{2n}\right]^{\left[1-(ax)^{2n}\right]}\right] f(x)\right\} = \left\{\left[(ax)^{2n} + f(x)\right]^{\left[1-(ax)^{2n}\right]}\right\} \tag{2.17}$$

A porção de *f(x)* coincidente com a abertura da janela fica representada neste intervalo, sem alterações em sua forma básica ou em seus valores numéricos. Fora desses limites, $y(x) = -1$ ou 0, dependendo do tipo de equação DNAx usada. As transições de fora para dentro da janela e de dentro para fora são matematicamente continuas, com rapidez de transição fixada pelo fator *n* do expoente.

CAPÍTULO III

NOVA APRESENTAÇÃO DAS FUNÇÕES CLÁSSICAS DA ENGENHARIA

3.1. INTRODUÇÃO

Uma grande contribuição das equações DNAx é o equacionamento continuo dos processos de transição entre os valores 0 e 1 e entre 1 e 0. Este desenvolvimento provoca forte impacto sobre as soluções dos problemas de engenharia. Para ilustrar o fato, serão reapresentadas algumas funções clássicas de engenharia a partir das equações DNAx. Para cumprir este objetivo, serão necessárias algumas considerações importantes, algumas delas demonstradas no capítulo anterior:

- As equações DNAx são definidas para todos os valores possíveis da variável x entre – e + ;
- As derivadas das equações DNAx são finitas, inclusive nos pontos de transição;
- Dentro da janela de operação, as equações DNAx, para n muito grande, comportam-se linearmente, obedecendo ao teorema da superposição.

3.2. DESCRIÇÃO DO IMPULSO UNITÁRIO

As definições correntes do impulso unitário são teóricas e impossíveis de serem implementadas em um programa de computador ou com um circuito eletrônico, de modo que se possa utilizá-las praticamente. Por causa disto, a função impulso unitário é algumas vezes referida como uma “função decepcionante”. Uma entre muitas equações que podem definir o impulso unitário é:

$$\delta(t) = \lim_{a \to 0} \frac{d}{dt}\left[u_a(t)\right] \tag{3.1}$$

onde $u_a(t)$ é o degrau unitário que tem transição de 0 para 1 na origem. A representação gráfica do impulso unitário está na Figura 3.1.

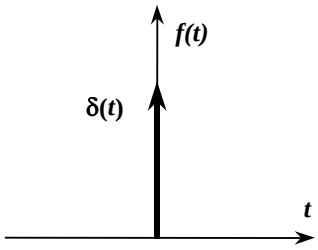


Figura 3.1. *Representação do impulso unitário na origem.*

3.3. DEFINIÇÃO CORRENTE DO DEGRAU UNITÁRIO

A definição matemática usual para a função degrau unitário é

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

que não permite uma descrição para todos os valores de *t*. A Figura 3.2 é o gráfico representativo desta função e permanece indefinida a transição entre 0 e 1.

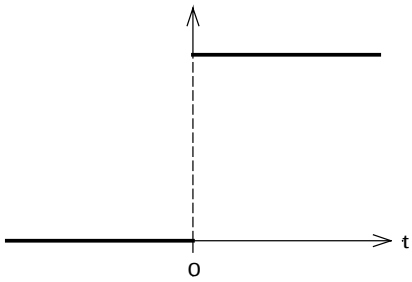


Figura 3.2. *Função degrau unitário, com sua indefinição na transição entre 0 e 1.*

3.4. APROXIMAÇÃO DO DEGRAU UNITÁRIO PARA FUNÇÃO COM TRANSIÇÃO CONTINUA

A equação DNAx capaz de descrever de forma aproximada o degrau unitário é uma equação analítica com valores finitos em todo intervalo continuo (– < t < +), inclusive na transição entre 0 e 1. O gráfico correspondente é mostrado a seguir. A transição na origem é representada por uma linha sólida, obtida com os valores

$$\begin{aligned} n &\to \infty && \text{(a)} \\ a &\to 1 && \text{(b)} \end{aligned} \tag{3.3}$$

As equações DNAx que levam a este resultado são

$$u_2(t) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1-a(t)}{1+a(t)}+1\right\} \tag{3.4}$$

$$u(t) = \left[1+a(t)\right]^{\left[1-a(t)\right]} \tag{3.5}$$

sendo

$$a(t) = e^{-n\,a(t-d)} \tag{3.6}$$

e neste levantamento adotaram-se os valores a = 3, d = 0 e n = 2.000. Deve-se notar que a equação DNAx é bem comportada, em particular a (3.4). Independentemente do sistema físico envolvido, o modelo matemático que se utiliza a partir da DNAx é sempre aplicável.

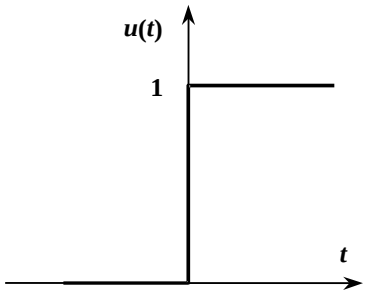


Figura 3.3. *Função degrau unitário obtido com a equação proposta neste trabalho.*

3.5. DEFINIÇÃO DO IMPULSO UNITÁRIO ATRAVÉS DAS EQUAÇÕES DNAx

Aplicando a sistemática proposta neste trabalho, o impulso unitário fica determinado pelo conjunto de equações

$$r(t) = \left[1+g(t)\right]^{\left[1+g(t)\right]} \tag{3.7}$$

$$g(t) = \left(at\right)^{-n} \tag{3.8}$$

e o gráfico a seguir foi levantado com $a = 10^{12}$ e n = 1000.

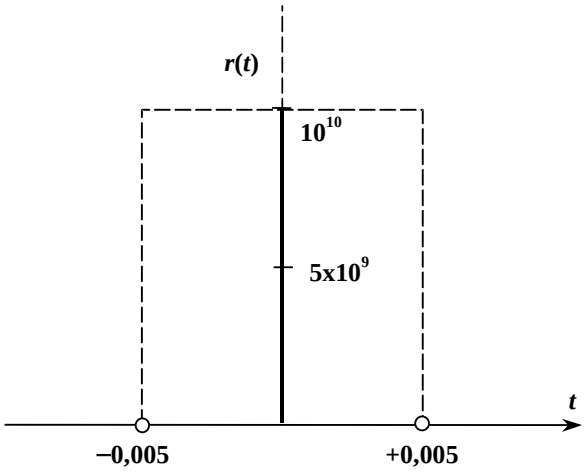


Figura 3.4. *Gráfico do impulso unitário obtido com DNAx para as condições propostas no texto. Fica bem evidente que se trata de forma de onda com largura temporal muito pequena.*

3.6. DETERMINAÇÃO DO PULSO RETANGULAR APERIÓDICO

A definição da função pulso retangular na origem, [6], é:

$$\prod(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1/2 \\ 0, & |t| > 1/2 \end{cases} \tag{3.9}$$

com a representação da primeira parte da figura a seguir. A equação DNAx é capaz de representar o pulso retangular no intervalo $(-\infty < t < +\infty)$ através de

$$y(t) = [(at)^{2n} + 1]^{[1-(at)^{2n}]} \tag{3.10}$$

$$n \to \infty \tag{3.11}$$

$$a \to k\,, \quad (k \in R^{+}) \tag{3.12}$$

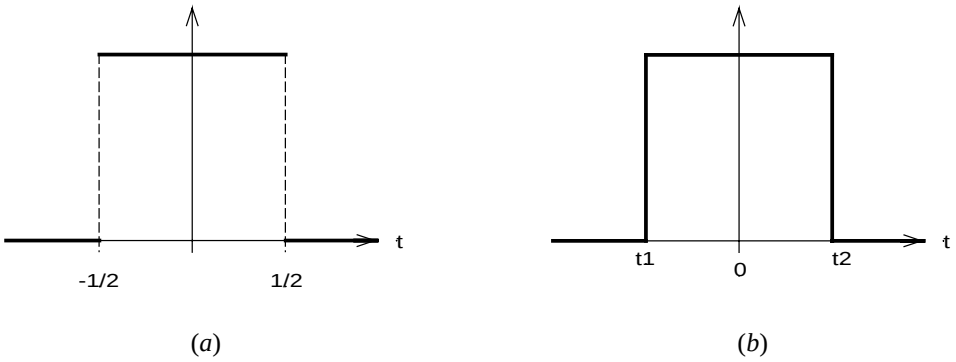


Figura 3.5. Pulso retangular aperiódico, em sua representação clássica e da forma como é obtido através da equação DNAx.

No gráfico para o pulso retangular obtido com DNAx, mostrado na segunda parte da figura, a transição 0-1-0 é representada por uma linha sólida, indicando que estes valores de $y(t)$ são finitos e determinados. Com o mesmo procedimento, é possível gerar um pulso aperiódico, em qualquer posição do eixo das abscissas controlando sua largura, sua amplitude e os tempos de subida e descida, continuamente. Pode-se fazer com sua equação qualquer operação matemática, utilizando se qualquer simulador ou processador de sinais.

3.7. EQUAÇÃO DNAx PARA UM ÚNICO PULSO

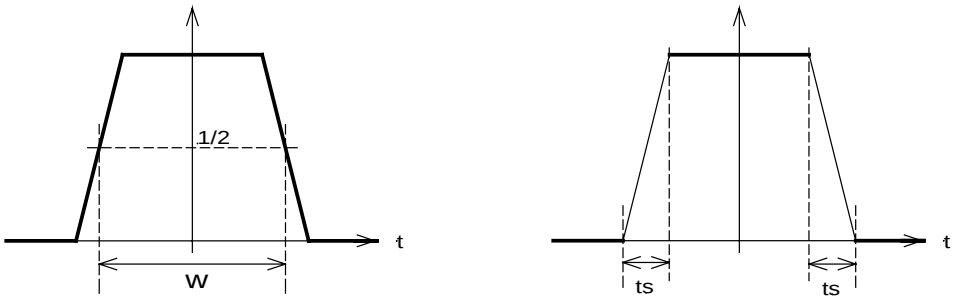
A equação abaixo gera um pulso retangular centrado na origem, $P_o(0;0)$, com amplitude unitária:

$$y(t) = [(at)^{2n} + 1]^{[1-(at)^{2n}]} \tag{3.13}$$

e largura w dada por:

$$w = \frac{2}{a} \tag{3.14}$$

O gráfico na Fig. 3.6 mostra o pulso centrado na origem. Como o tempo de subida é controlado por outro parâmetro, definimos os pontos que dão metade da amplitude do pulso como os de medida da sua duração. Esta largura será sempre constante para qualquer valor de n desde que se mantenha o parâmetro a constante.



(*a*) (*b*)

Figura 3.6. *Identificação do pulso isolado e a forma de definição de sua largura no domínio do tempo. Na segunda parte, destacam-se os intervalos de tempo tomados como as durações da subida e da descida do pulso.*

A equação empregada para o traçado desta função permite controlar o tempo de subida do pulso, que será igual ao tempo de descida. Definimos como tempo de subida o intervalo gasto para a função sair do estado 0 e chegar ao estado 1 e tempo de descida o intervalo para sair do estado 1 e atingir o estado 0. Estes tempos serão iguais para um pulso gerado pela equação DNAx, a menos que se imponha a condição para que sejam diferentes. Para o cálculo destes valores, parte-se da equação DNAx tipo C, reproduzida abaixo para $f(x) = 1$, sem perda de generalidade, devido às propriedades desta função:

$$y_a(t) = \left[(at)^{2n} + 1\right]^{\left[-(at)^{2n}\right]} \tag{3.15}$$

Os cálculos revelam que a ordenada assume o valor 0,5 para $t = -1/a$. Além disto, atinge o valor praticamente unitário em um ponto logo à direita desta abscissa, correspondente a $-1/a + \Delta t$. Deste ponto, traça-se um segmento de reta, passando por $(-1/a,\ 0{,}5)$ e atingindo o eixo das abscissas em um ponto um pouco à esquerda de $-1/a$, simétrico em relação ao primeiro, tendo como referência a abscissa $-1/a$. Isto é, este segundo ponto é na abscissa $-1/a - \Delta t$. O tempo de subida foi definido neste trabalho como $t_s = 2\Delta t$. Para o cálculo deste valor, utiliza-se a equação anterior na forma

$$y_a(t) = \left\{\left[a\left(-\frac{1}{a} + \Delta t\right)\right]^{2n} + 1\right\}^{-\left[a\left(-\frac{1}{a}+\Delta t\right)\right]^{2n}} = 1 \tag{3.16}$$

em que o expoente deve ser nulo para se garantir o valor unitário do resultado. Portanto,

$$\left[a\left(-\frac{1}{a}+\Delta t\right)\right]^{2n} = \left[\left(-1+a\,\Delta t\right)\right]^{2n} = 0 \qquad (3.17)$$

Como se trabalha com a condição $a\,\Delta t << 1$, a expansão desta equação em série binomial permite que se escreva

$$\left[\left(-1+a\,\Delta t\right)\right]^{2n} \cong -1+2n\,a\Delta t = 0 \qquad (3.18)$$

donde será possível obter o valor Δt e o tempo de subida, como identificado na segunda parte da Figura 3.6:

$$t_s = 2\,\Delta t = \frac{1}{a\,n} \qquad (3.19)$$

O fato de se poder controlar os tempos de subida e de descida implica na possibilidade de se introduzir a idéia de modulação por tempo de subida ou descida (*RTM*, de *Rise Time Modulation*). A figura abaixo mostra o efeito dos diversos valores de *n* sobre o tempo de subida.

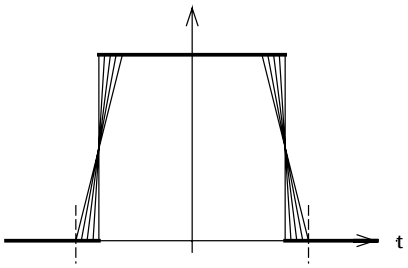


Figura 3.7. *Possibilidade de modulação do tempo de subida do pulso retangular.*

Com esta informação, já é possível mostrar a constância da área sob a curva, como previsto no capítulo anterior. Para isto, será admitido que o pulso tenha uma amplitude unitária, sem que afete a generalização desta propriedade. Quando $n \to \infty$, a área sob a curva fica dada por $2/a$. Para *n* finito, de qualquer valor, da Figura 3.6(*b*) conclui-se que a área de cada triângulo dos flancos anterior e posterior vale o tempo de subida multiplicado pela amplitude (no caso unitária), dividido por 2. Por conseguinte, a área que sobra, relativa ao retângulo interno fica igual $2(1/a-\Delta t)$, sendo Δt a metade do tempo de subida, como demonstrado anteriormente. Portanto, a área total ficará igual à área do retângulo somada

com as áreas relativas aos tempos de subida e de descida, que são iguais. Assim, a área total ficará

$$S_t = 2\left(\frac{1}{a} - \Delta t\right) + t_s = \frac{2}{a} - t_s + t_s = \frac{2}{a} \qquad (3.20)$$

independente do valor atribuído a *n*, como antecipado.

3.8. INTRODUÇÃO DE PARÂMETROS E FUNÇÕES COMPLEMENTARES

Será definida uma função de referência *X(t)* que permite criar novas funções especiais. Estas funções serão periódicas quando *X(t)* for periódica. Para isto, na função DNAx deve-se substituir a variável *t* pela função de referência. Quando a função *X*(*t*) aproximar-se de zero, novo pulso será gerado, formando-se nova função periódica. A Figura 3.8 ilustra esta condição para uma função de referência tipo senoidal. Se introduzirmos um coeficiente de fase na função senoidal, teremos novo parâmetro (*d*), que permitirá deslocar as formas de ondas proporcionalmente ao longo do eixo das abscissas. Neste caso, a função *X*(*t*) poderá ser reescrita como *X*(*t*-*d*). No exemplo da Figura 3.9, o centro do pulso DNAx foi deslocado de 14 unidades de *d* . A janela de operação da função pode ser deslocada ao longo de todo o eixo das abscissas, mostrando uma importante característica da equação, que é possibilitar a geração de janelas periódicas. A largura da janela e o tempo de subida da transição dependem de *a* e *n*.

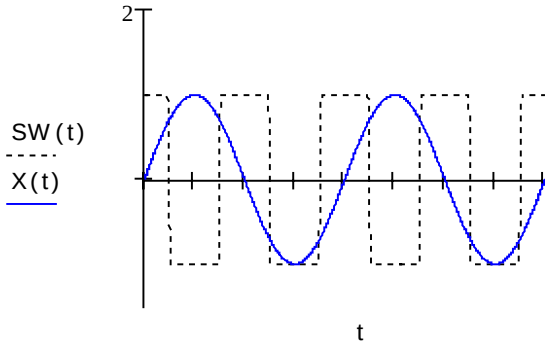


Figura 3.8. *Função de referência X(t) periódica, de formato senoidal.*

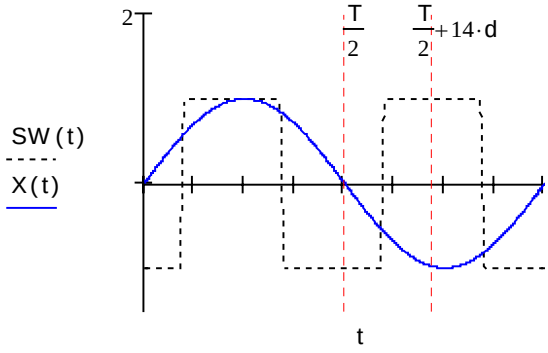


Figura 3.9. *Função de referência operada pela função DNAx com deslocamento no eixo das abscissas.*

Quando substituirmos t por $X(t)$, a função passa a depender desta nova variável, como se houvesse mudança nos valores das abscissas de t para $X(t)$. Como o pulso só acontece quando t aproxima-se de zero, a sua duração depende da velocidade com que se aproxima de zero, ou seja da derivada de $X(t)$ em relação a t. Portanto, uma generalização do cálculo da duração do pulso é obtida através de

$$w = \frac{2}{a\left[\left|\frac{d\,X(t)}{dt}\right|\right]_{t=t_0}} \tag{3.21}$$

A equação DNAx tipo D pode ser usada como geradora de janelas periódicas, com a descrição da função $f(t)$ dentro da janela. Com este objetivo, a equação deve incluir a função e o parâmetro complementares $X(t)$ que proporcionara a periodicidade dos pulsos, d será um parâmetro de defasagem que propiciara o deslocamento das janelas periódicas ao longo do eixo do tempo,

$$y(t) = \frac{f(t) - [a.X(t-d)]^{2.n}}{1 + [a.X(t-d)]^{2.n}} \tag{3.22}$$

3.9. SEQÜÊNCIA DE PULSOS CONTÍNUOS PERIÓDICOS

Uma seqüência de pulsos periódicos de amplitude unitária pode ser gerada fazendo-se $f(t)$ igual a 1 e $X(t-d) = cos[2\pi(t-d)]$. A largura do pulso será a largura da janela w e o tempo de subida será igual ao tempo de transição da janela t_s. A freqüência fundamental da

seqüência de pulsos é igual ao dobro da freqüência da função de referencia $X(t)$. A conclusão é devida à função de referência cruzar o eixo das abscissas duas vezes a cada ciclo. (Figura 3.10).

$f(x) := 1$ $\qquad$ $X(x) := 1\cos(2\cdot\pi\cdot x)$

$d := 0$ $\qquad$ $n := 80$ $\qquad$ $a := 4$

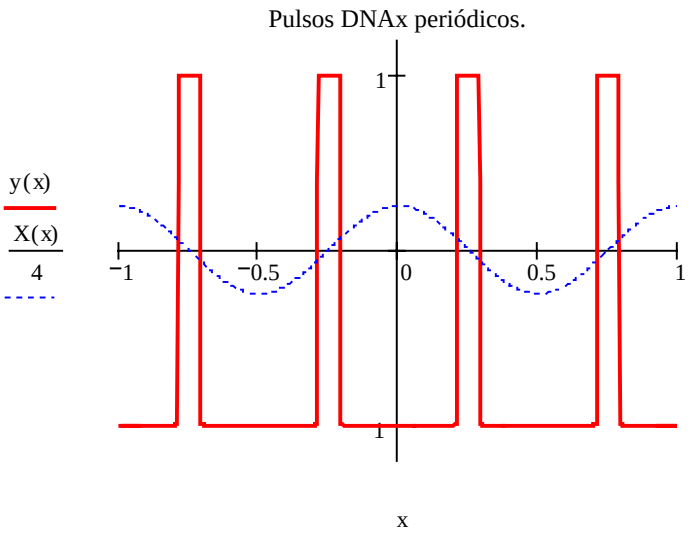


Figura 3.10. Seqüência de pulsos contínuos periódicos, gerados pela função dada no texto.

A posição dos pulsos no domínio do tempo é igual à posição das raízes reais da função de referência e é matematicamente travada nesses pontos. Portanto, quanto mais estável for a função de referência mais estável será a seqüência de pulsos. Para $n \to \infty$, o tempo de subida e o tempo de descida são determinados por

$$t_s = \frac{1}{a\,n\left[\left|\frac{d\,X(t)}{dx}\right|\right]_{x=x_i}} \tag{3.23}$$

3.10. SEQÜÊNCIA DE GRUPO DE BITS

Uma contribuição importante é a capacidade de gerar uma seqüência de bits através de um polinômio. Esta propriedade permite tratar a equação DNAx como uma *transformada*, pois transforma um polinômio de zeros reais para uma seqüência de bits no domínio do

tempo. Portanto, é uma transformada de um conjunto polinomial para um conjunto no domínio temporal. Isto permite fazer operações algébricas com as seqüências de bits transformadas ao domínio polinomial e obter a transformada inversa no domínio temporal novamente, resultando em uma nova seqüência de bits. Estas operações simplificam a obtenção de sistemas encriptados por chave de operação rápida. A seqüência de bits é gerada pela equação DNAx quando a função de referência $X(t)$ for uma equação polinomial de raízes reais $P(x)$

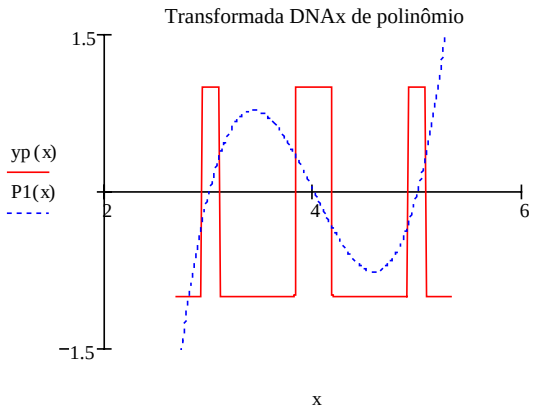
$$P(x) = A_n.x^n + A_{n-1}.x^{n-1} + ... + A_1.x + A_0 \tag{3.24}$$

$$A_n = 1 \tag{3.25}$$

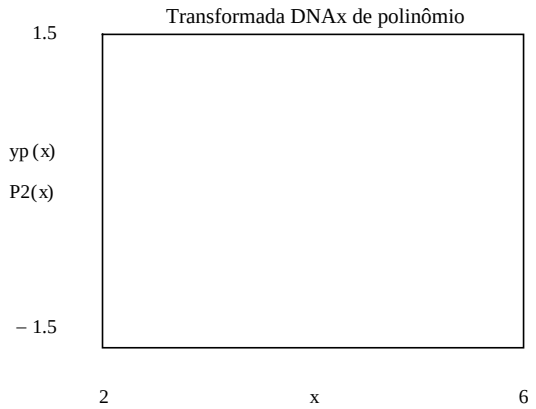
A largura do pulso gerado pela equação DNAx é inversamente proporcional a primeira derivada do polinômio $P(x)$ para x igual à raiz correspondente ao ponto onde o pulso foi gerado. Podemos alterar a largura dos pulsos tanto quanto os tempos de subida e descida variando os coeficientes do polinômio, mantendo os zeros no mesmo lugar, com os pulsos nas mesmas posições. Isto está exemplificado nos dois casos apresentados na Figura 3.11. Uma vez que os polinômios $P_1(x)$ e $P_2(x)$ são ambos de terceira ordem com zeros iguais, um grupo de três pulsos será gerado por cada polinômio nas mesmas posições mas com larguras diferentes. O número de pulsos é igual ao número de zeros reais, considerando um zero por posição. Outro exemplo de aplicação está na Figura 3.12, para o polinômio indicado. Nota-se que só existem dois polinômios para cada sequência de bits, que é o polinômio P(x) e o polinômio –P(x), para qualquer outro polinômio com zeros nas mesmas posições as larguras dos pulsos serão diferentes.

$P1(x) := 2\cdot(x-3)\cdot(x-4)\cdot(x-5)$

$P2(x) := \frac{11}{10}\cdot(x-3)\cdot(x-4)\cdot(x-5)$



(*a*)



(*b*)

Figura 3.11. *Variação na largura dos pulsos seqüenciais, gerada a partir do polinômio representativo da transformada da função no domínio polinomial.*

$d := 0 \qquad f(x) := 1 \qquad a := 3 \qquad n := 20$

$P_3(x) := 5[(x-3)\cdot(x-4)\cdot(x-5)\cdot(x-7)\cdot(x-8)\cdot(x-10)\cdot(x-12)\cdot(x-15)\cdot(x-19)]$

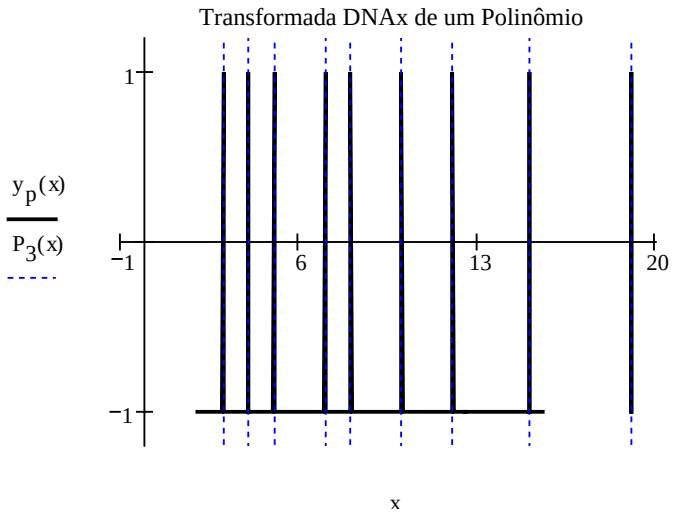


Figura 3.12. *Outro exemplo de seqüência de pulsos gerada pelo polinômio representativo da função analisada.*

3.11. COMPROVAÇÃO EXPERIMENTAL DA OBTENÇÃO DOS SINAIS COM CIRCUITOS ELETRÔNICOS

Para comprovar a teoria e as potencialidades da função DNAx, foi implementado um circuito eletrônico com os dispositivos integrados da Analog Devices AD633, AD538 e AD734. Os circuitos integrados AD633 e AD735 são amplificadores operacionais que foram escolhidos pelas suas características e facilidade de obtenção, porém o circuito integrado AD538 foi escolhido por executar a operação:

$$v_0 = v_y \times \left[\frac{v_z}{v_f} \right]^m$$

Onde v_o , v_y , v_z , v_f e m são tensões nos pinos do circuito integrado. Esses dispositivos possuem amplificadores operacionais internos que podem ser configurados para execução de potenciação de números positivos e negativos. Foram criados para diversas aplicações que envolvam a computação analógica, integrante de sistemas de computação híbrida, utilizada em sistemas de controle de mísseis teleguiados e aeronaves a jato para fins militares. Trata-se de circuitos com rígido controle de produção e comercialização, em vista dessas suas aplicações. O diagrama circuital de cada bloco é disponível na página da empresa na Rede Mundial de Computadores. Na Figura 3.13 apresenta-se o diagrama em blocos da célula, com o indicativo das funções mais importantes que o circuito deve executar.

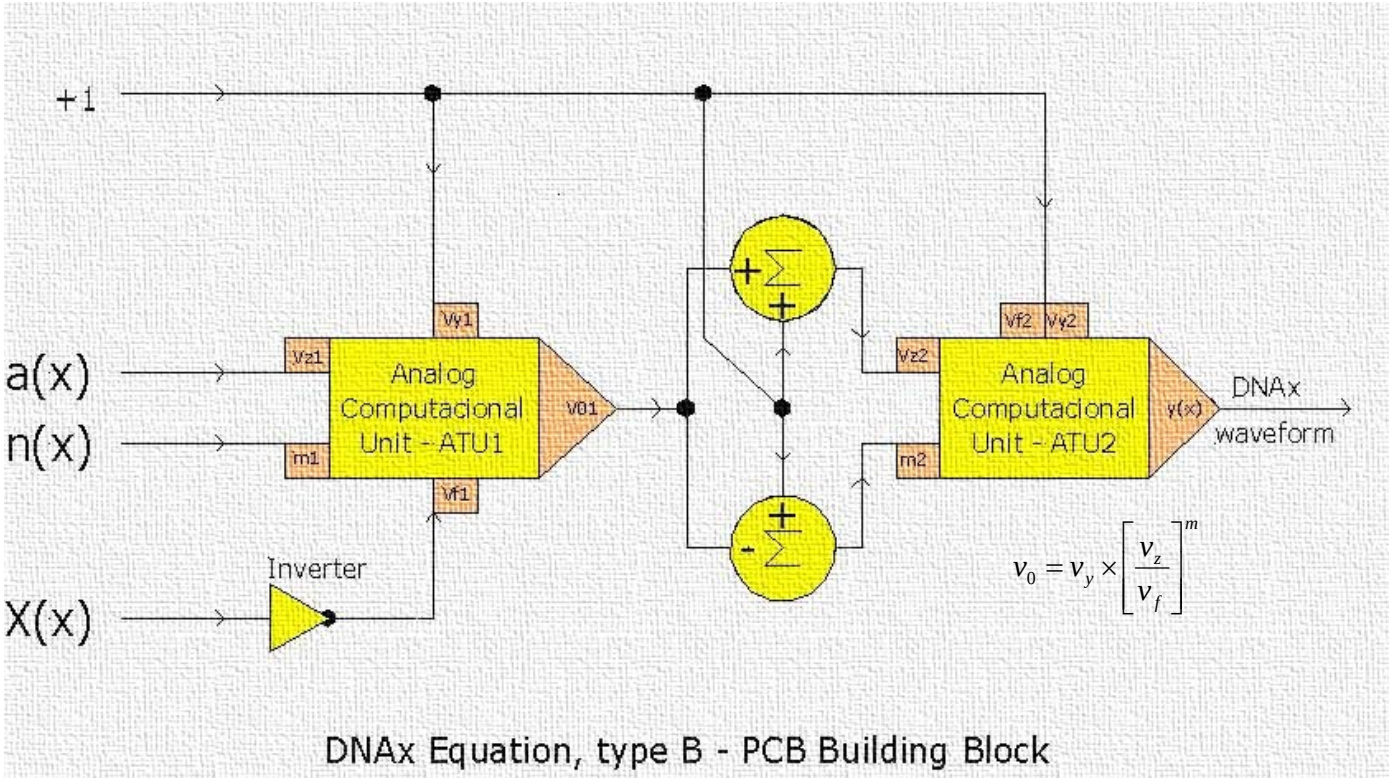


Figura 3.13. *Diagrama em blocos de uma célula DNAx básica, capaz de gerar um ou vários pulsos controlados pela função X(t) e pelos parâmetros n, d e a.*

O circuito eletrônico implementado a partir do diagrama anterior está representado na Figura 3.14. Para chegar a esta versão definitiva, foram realizados diversos ensaios com componentes discretos e integrados, a fim de comprovar a possibilidade de seu funcionamento. A partir da confirmação do fato, passou-se ao uso de componentes integrados de ação mais rápida e concluiu-se com a montagem definitiva apresentada nas Figuras 3.15 e 3.16. O circuito final ficou com formato compacto, com extensão de 10,5cm e 6cm de largura.

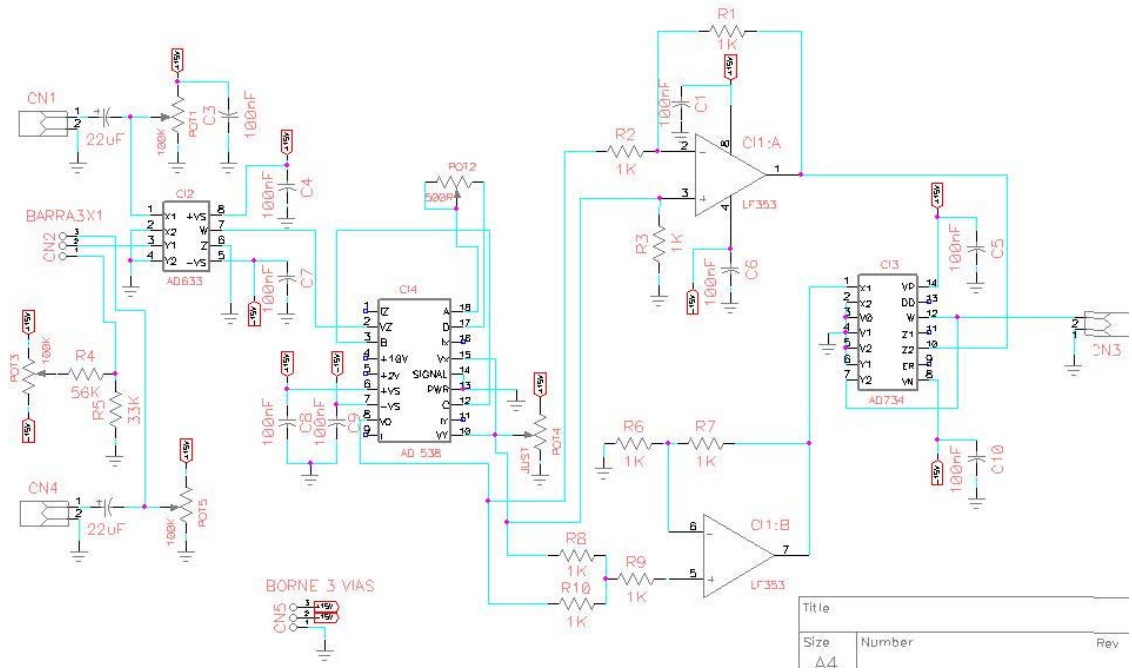


Figura 3.14. *Diagrama esquemático de uma célula DNAx implementada conforme descrição no texto e com objetivo de comprovar a validade das equações, de acordo com o diagrama em blocos da figura anterior.*

A seguir, são apresentadas formas de onda retangulares com diversas durações e diferentes tempos de subida, ajustáveis pelos valores dos parâmetros de controle da função proposta, e obtida com o circuito mostrado nas figuras anteriores. A função $X(t)$ foi escolhida em formato triangular para que se identificasse com precisão o seu valor mínimo igual a zero e fosse possível definir com exatidão os instantes de geração dos pulsos.

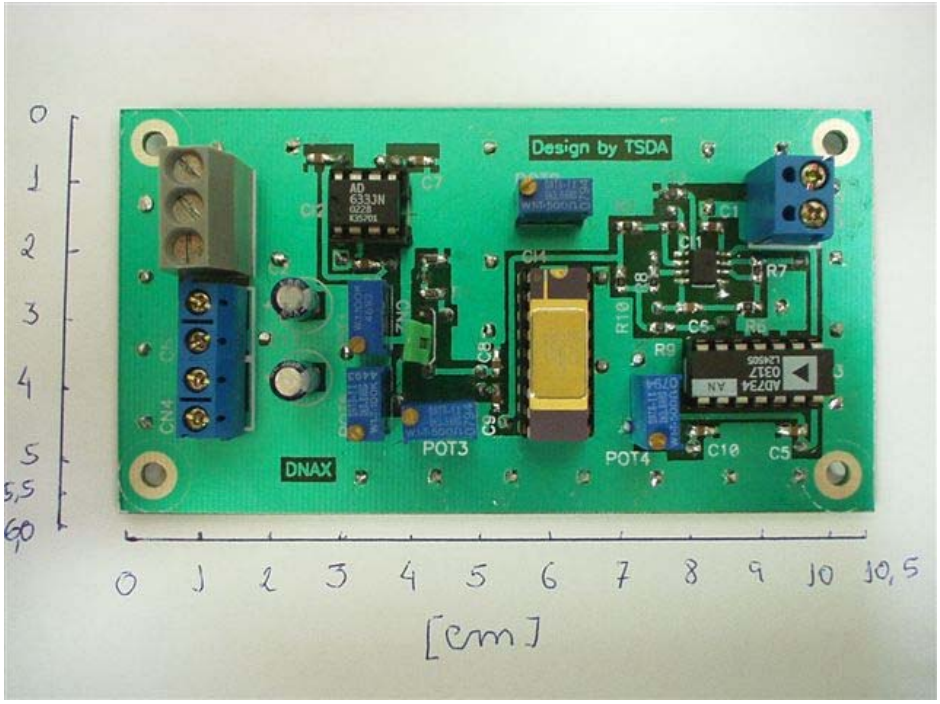


Figura 3.15. *Vista superior da montagem da célula DNAx com os componentes e dispositivos descritos no texto.*

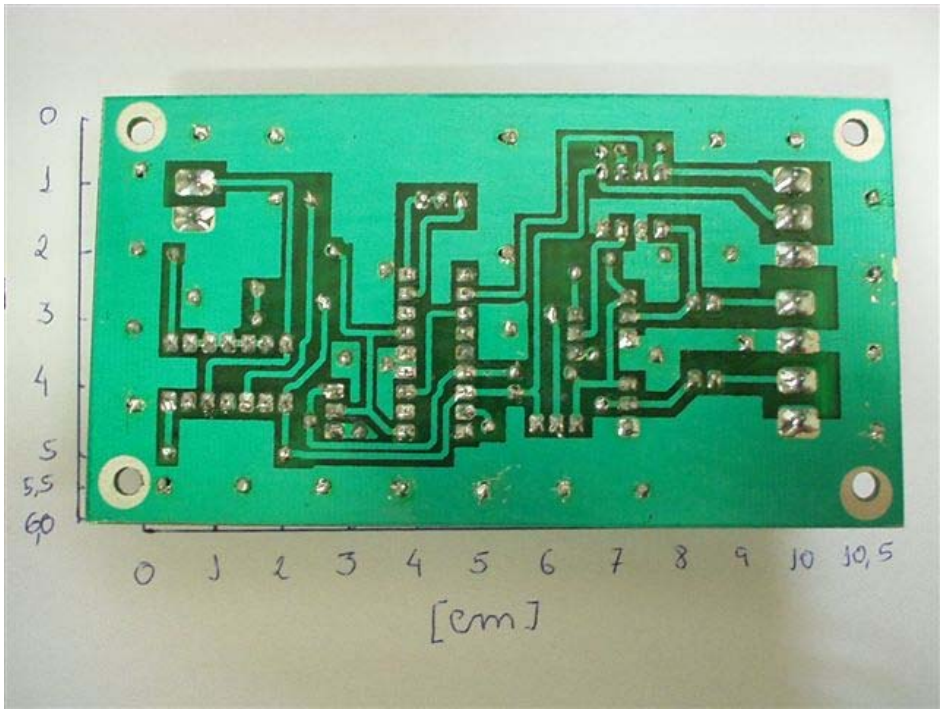
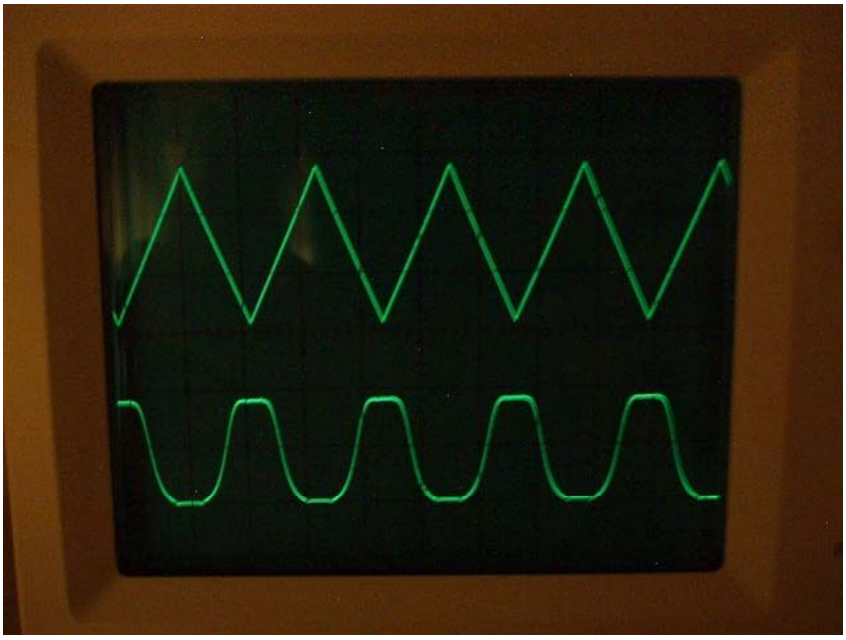
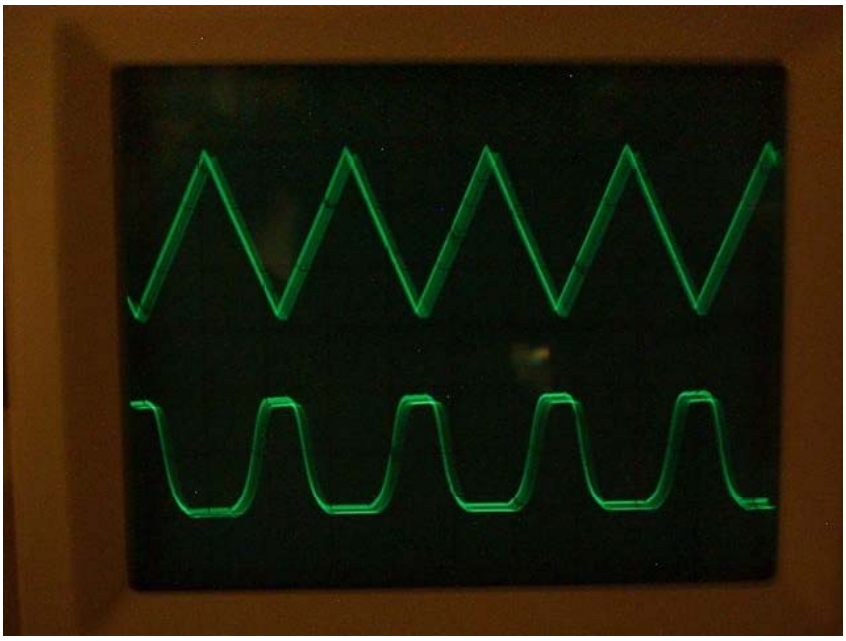


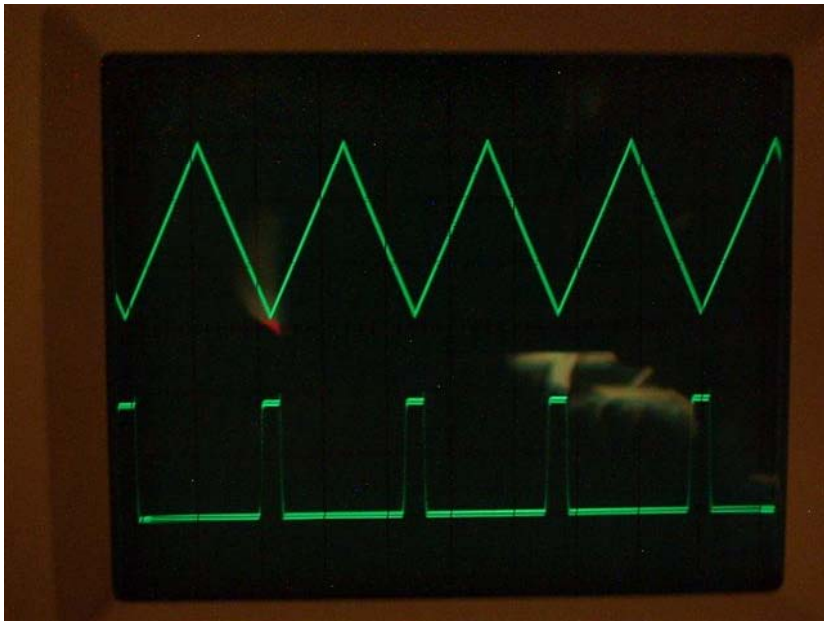
Figura 3.16. *Vista inferior da montagem da célula DNAx, conforme descrição no texto.*



(*a*)



(*b*)



(*c*)

Figura 3.17. *Seqüência de formas de onda obtidas com o circuito implementado, com alterações nos valores dos parâmetros de controle da função DNAx. Os sucessivos formatos foram encontrados com o aumento dos valores de a e n.*

CAPÍTULO IV

GERAÇÃO DE SINAIS SIMPLES E COMPOSTOS

4.1. OBJETIVO E IDÉIA DO MÉTODO

Neste capítulo, propõe-se a possibilidade de gerar ondas senoidais de baixa distorção a partir de múltiplas ondas quadradas obtidas com as funções DNAx. O objetivo de se gerar ondas senoidais com este procedimento é permitir controlá-las de uma forma mais exata e aumentar as possibilidades de sua utilização, como geração de padrões de medidas, portadoras de sinais modulantes, a criação de novos códigos, etc.. Mostraremos que uma onda senoidal poderá ser sintetizada por soma de ondas quadradas, calcularemos seus coeficientes e parâmetros e obteremos uma onda senoidal controlável através de parâmetros ajustáveis.

De acordo com a teoria DNAx, as ondas quadradas com tempo de subida controlado requerem uma largura de pulso de meio período, com o valor do parâmetro $a = \sqrt{2}$. Para demonstração, serão estudados três exemplos com as medições da distorção harmônica total (THD) e serão verificadas os formatos finais e os valores característicos de cada sinal resultante. A principal diferença entre os exemplos será o valor de *n*, que controla o tempo de subida das ondas retangulares. Serão usadas oito ondas básicas para os cálculos $(P = 8)$. O deslocamento temporal *d* entre duas ondas quadradas sucessivas é constante e definido como:

$$d = \frac{T}{2P} \tag{4.1}$$

onde T_f é o período da onda retangular básica. A amplitude de cada onda retangular DNAx varia e pode ser calculada pela relação, [6],

$$C_r = \frac{\int_0^{T_f} sin(2\omega t)\, y_r(t)\, dt}{\int_0^{T_f} y_r^2(t)\, dt} \tag{4.2}$$

sendo $y_r(t)$ uma das P possíveis equações representativas dessas ondas e ω a freqüência angular da componente fundamental da onda retangular. A equação anterior permite obter os coeficientes de amplitude das diversas parcelas que serão somadas. Esta equação é calculada a partir da soma de funções ortogonais, e proporciona a amplitude que permite minimizar o erro (valor médio quadrático ($f_e(t)$)) de f(t). As ondas retangulares formam um conjunto de sinais ortogonais aos pares. Isto justifica a necessidade de se ter P com valores pares.

4.2. CONJUNTO DE PARÂMETROS PARA AS FUNÇÕES DNAX

Neste exemplo, as oito equações DNAx ficarão reduzidas a seis quando as amplitudes C_r forem calculadas, pois os coeficientes C_0 e C_4 valem 0. A seguir, apresenta-se uma tabela de valores dos coeficientes de amplitude das componentes para três valores de n, com as respectivas distorções harmônicas totais calculadas.

Tabela 4.1. *Coeficientes determinados para a geração de ondas retangulares*

	n		
	1	**2**	**3**
C_0	0	0	0
C_1	0.7103540	0.5630850	0.5234040
C_2	1.0045930	0.7963220	0.7402050
C_3	0.7103540	0.5630850	0.5234040
C_4	0	0	0
C_5	-0.7103540	-0.5630850	-0.5234040
C_5	-1.0045930	-0.7963220	-0.7402050
C_7	-0.7103540	-0.5630850	-0.5234040
THD(dB):	**-72.74**	**-33.49**	**-23.26**

O conjunto de ondas retangulares DNAx é representado pela seqüência de equações e pelo conjunto de gráficos a seguir. Na mesma montagem, apresenta-se a forma de onda

resultante da superposição das componentes individuais. São geradas a partir de (3.14) com um termo adicional (1/2) que anule o valor médio da forma de onda básica.

$$y_q(t) = C_q \left\{ \left[\left[aX\left(t - q\,d\right) \right]^{2n} + 1 \right]^{\left[-\left[aX(t-qd) \right]^{2n} \right]} \right\} - \frac{C_q}{2} \tag{4.3}$$

para q = 0, 1, … , 7. De acordo com a proposta, a senóide resultante foi obtida com a soma

$$f(t) = \sum_{q=0}^{7} y_q\left(t\right) \tag{4.4}$$

efetuando-se o controle das amplitudes e dos correspondentes tempos de subida, onde a freqüência da onda senoidal resultante é igual a freqüência das ondas retangulares. Na Figura 4.1 ilustra-se o procedimento descrito, destacando-se a presença das várias componentes empregadas na formação do sinal senoidal.

Na Figura 4.2 é feita uma comparação entre a resultante do processo proposto e uma onda senoidal descrita na forma $sin\,2\omega t$. Nesta formação, empregou-se o menor valor de n e todas as componentes propostas. Foi levantada a distorção harmônica total para $n = 1$ e o resultado indica

$$THD\,(\text{dB}) = 20\,log\left(\frac{0{,}00045}{1{,}950723}\right) = -72{,}74\,\text{dB} \tag{4.5}$$

que foi o menor valor obtido. Da mesma forma, para n = 2 e n = 3, a distorção harmônica total assumirá os valores

$$THD\,(\text{dB}) = 20\,log\left(\frac{0{,}035}{1{,}8921833}\right) = -34{,}66\,\text{dB} \tag{4.6}$$

$$THD\,(\text{dB}) = 20\,log\left(\frac{0{,}16}{1{,}979}\right) = -24{,}64\,\text{dB} \tag{4.7}$$

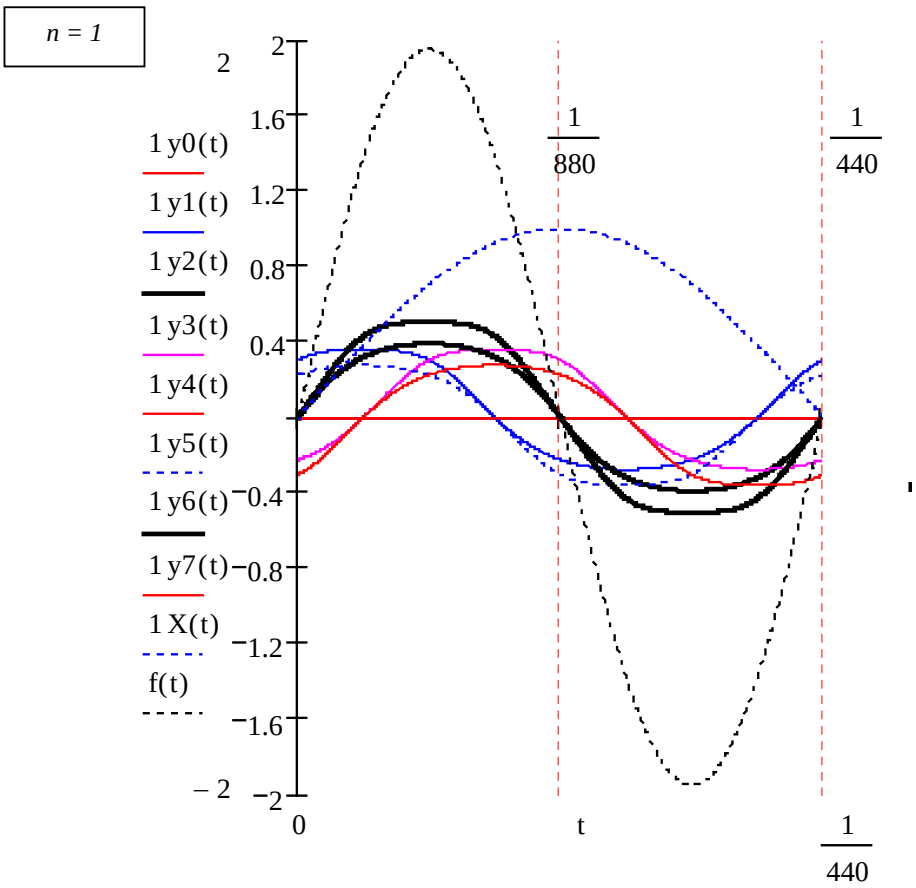


Figura 4.1. *Sintetização de uma senóide pela superposição de ondas quase retangulares obtidas com a função DNAx .Notar que a freqüência do sinal resultante é igual a freqüência das ondas quase retangulares, e é o dobro da freqüência do sinal X(t).*

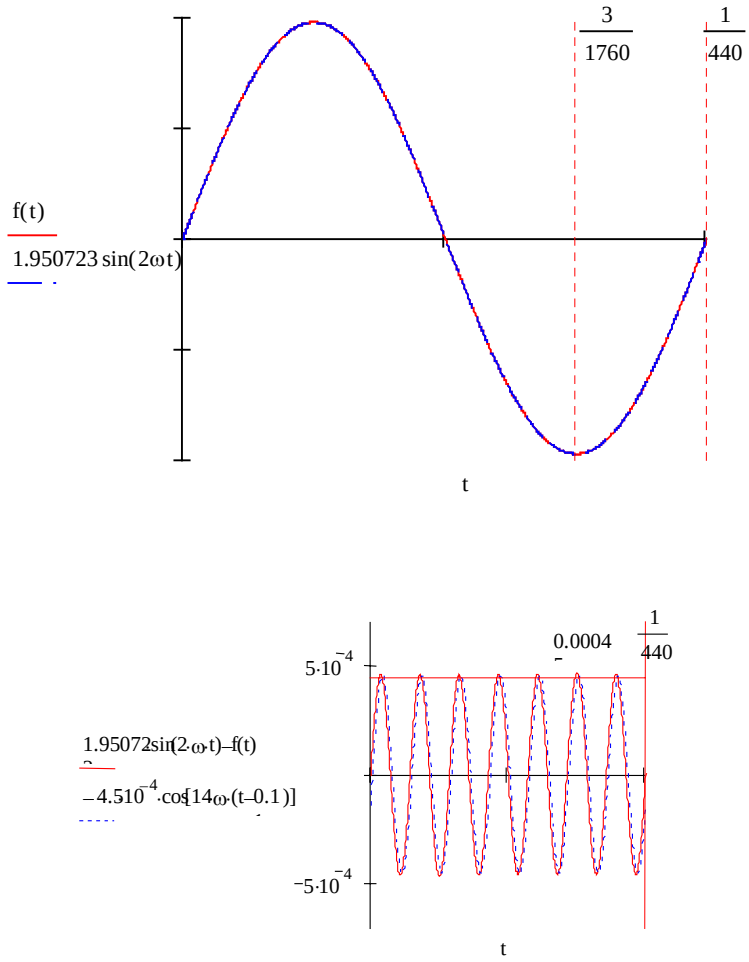


Figura 4.2. *Forma de onda obtida com a menor distorção harmônica, seguindo os critérios propostos no texto. Neste caso, a distorção harmônica total ficou mais de 72dB abaixo do nível da senóide pura.*

Podemos concluir que existem dois fatores importantes que atuam sobre a distorção harmônica total da onda senoidal:

1. *Valor de n* – para determinado número *P* de ondas retangulares, quanto maior o valor de *n* maior será a distorção harmônica total, o que é visto na comparação dos exemplos dados.
2. *Número de ondas quase retangulares P* – para determinado valor de *n*, quanto maior o número de ondas quase retangulares *P* menor será a distorção harmônica total da onda senoidal.

Portanto, quanto maior for o número de ondas quase retangulares *P* e quanto menor for o valor de *n*, menor será a distorção harmônica total da onda senoidal.

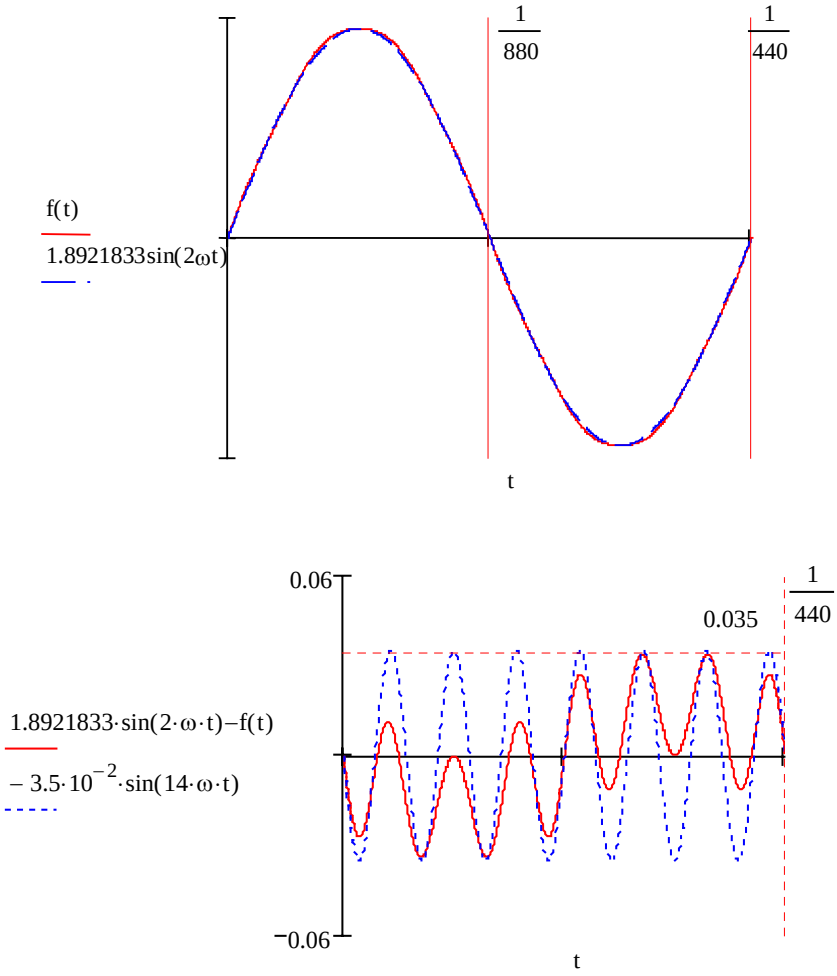


Figura 4.3. *Com o aumento no valor de n, houve acréscimo na distorção. Neste caso, a distorção harmônica total ficou perto de 35dB abaixo da amplitude da senóide.*

4.3. VISUALIZAÇÃO NO OSCILOSCÓPIO

Efetuaram-se as verificações experimentais das várias formas de onda descritas na secção anterior. Na Figura 4.5 está mostrado o diagrama em blocos do processamento proposto. As reproduções no osciloscópio estão apresentadas na Figura 4.4, com as nomenclaturas geradas pelo próprio aparelho. Todos os sinais foram obtidos com um processador e um programa de computador desenvolvido pela Rohde & Schwarz, que tomavam os dados do Mathcad na saída serial do computador e geravam um sinal elétrico proporcional aos dados numéricos calculados.

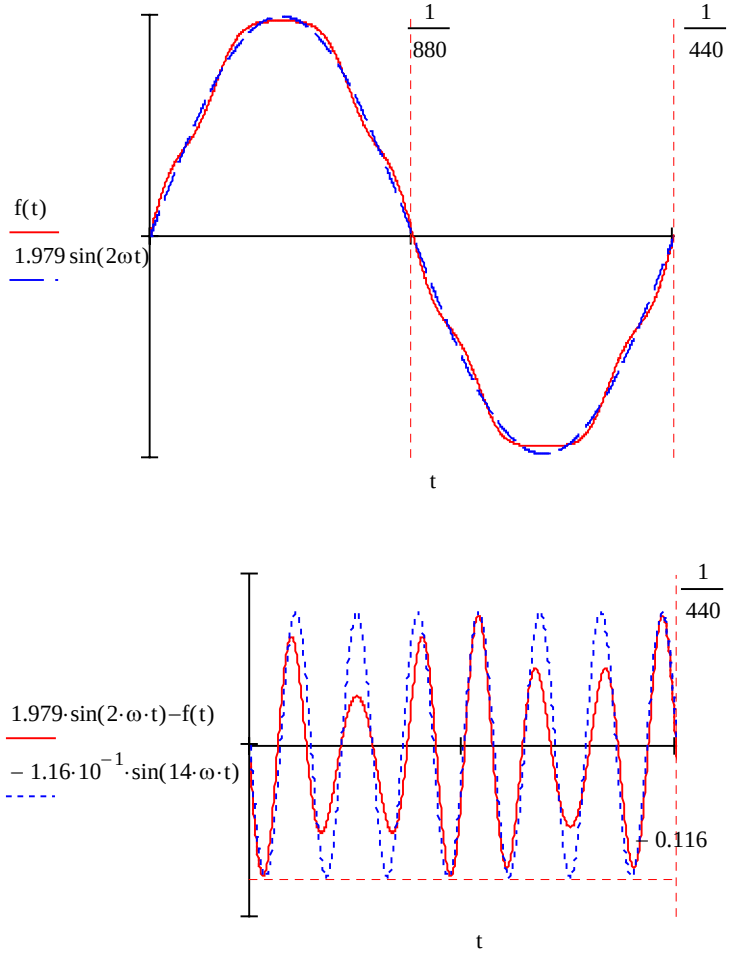


Figura 4.4. *Nova forma de onda, com maior valor de distorção harmônica, em função do número finito de ondas retangulares utilizadas. Neste caso, tem-se uma distorção harmônica total de aproximadamente 25dB.*

1) Two Channel Functions Arbitrary Wave Generator, Clock Rate Max. 100MHz, 256 Kb Memory. Model: Rohde & Schwarz Am300

2) Waveform Composer Software For Arbitrary Generator Am300 Pc Systems Windows 2000xp. Model: AM300-

3) K2

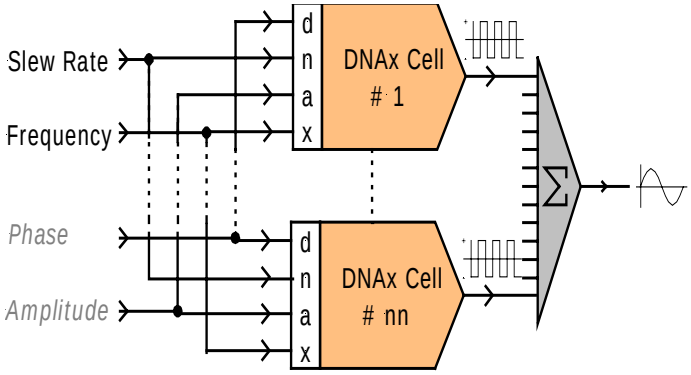
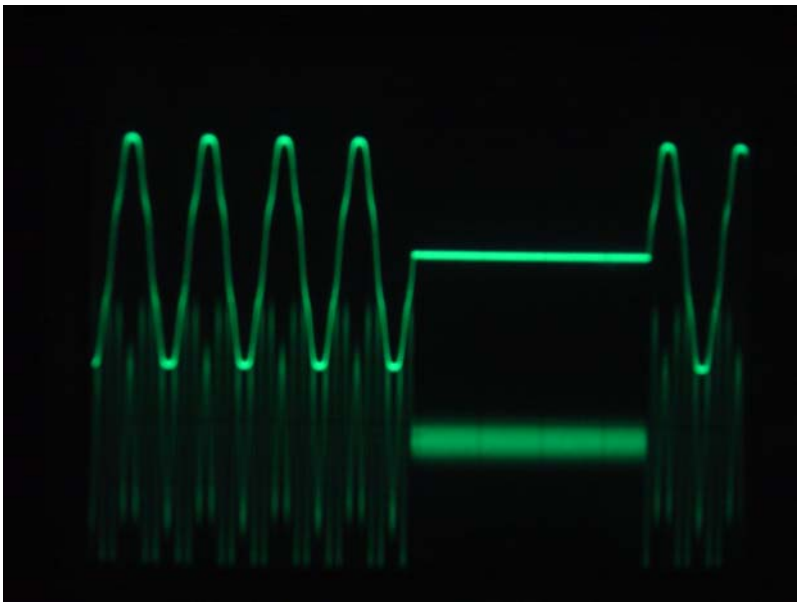
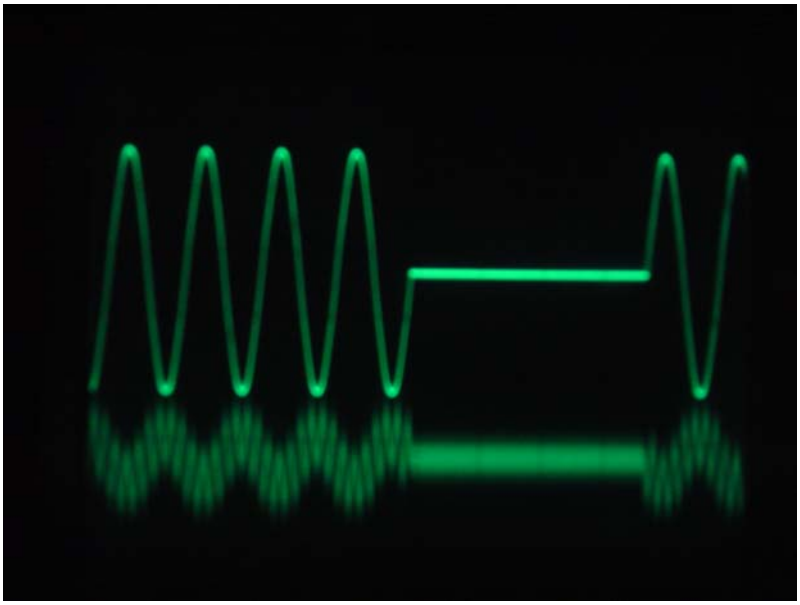


Figura 4.5. *Diagrama em blocos com as células DNAx para geração de sinais senoidais*



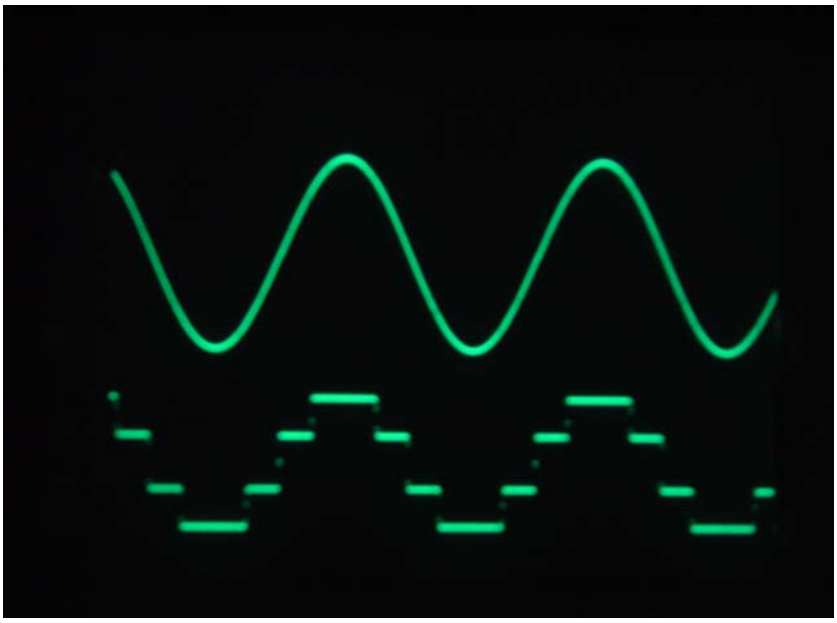
Top: Dnax Sq-Sine P8N3 (THD -25db) + SIGNAL BLANK LINE
Bottom: Dnax Sq-Sine P8N3 – THD Pattern & -45db Ref. NOISE BLANK LINE

Figura 4.6. *Na parte superior tem-se o resultado da soma das ondas retangulares e na parte inferior apresenta-se a forma de onda gerada pela distorção harmônica para n = 3.*



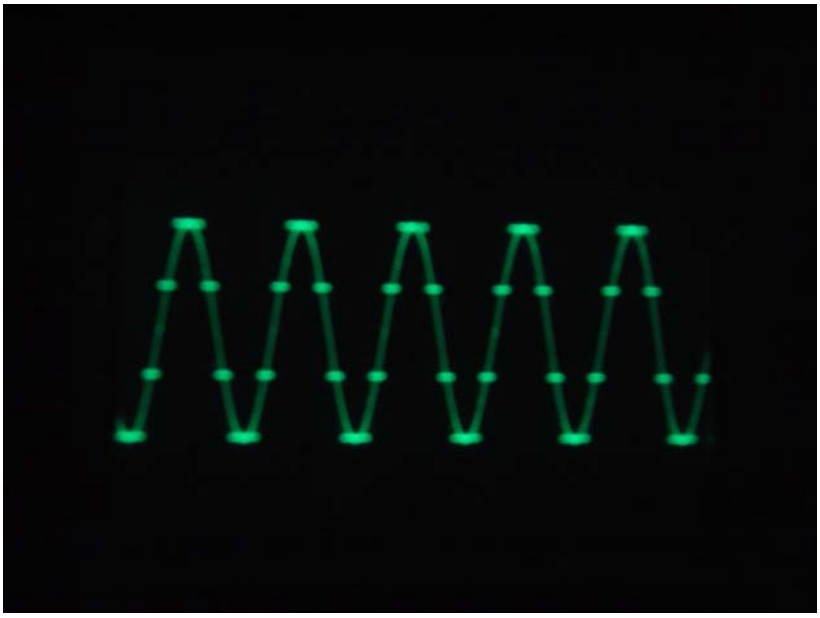
Top: DNAx Sq-Sine P8N2 (THD -34dB) + SIGNAL BLANK LINE
Bottom: DNAx Sq-Sine P8N2 – THD Pattern & -45dB Ref. NOISE BLANK LINE

Figura 4.7. *Na parte superior tem-se o resultado da soma das ondas retangulares e na parte inferior apresenta-se a forma de onda gerada pela distorção harmônica para n = 2.*



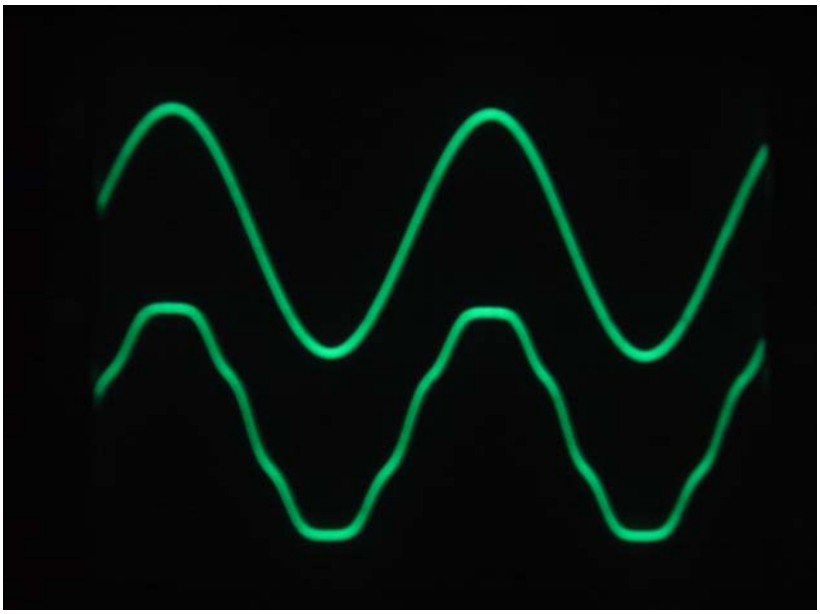
Top: DNAx Sq-Sine P8N1 – THD -70dB
Bottom: DNAx Sq-Sine P8N400

Figura 4.8. *Na parte superior tem-se o resultado da soma das ondas retangulares para n = 1 e na parte inferior apresenta-se a forma de onda gerada pela soma das ondas retangulares com n = 400.*



DNAx Sq-Sine P8N1 & DNAx Sq-Sine P8N400 – Overlap

Figura 4.9. *Superposição das ondas anteriores para n = 1 e n = 400, demonstrando que os valores são coincidentes em freqüência e amplitude, porém com formatos diferentes.*



Top: DNAx Sq-Sine P8N1 – THD -70dB
Bottom: DNAx Sq-Sine P8N3 – THD -25dB

Figura 4.10. *Comparação entre as ondas senoidais com -70dB e com -25dB de distorção harmônica total.*

Em algumas das imagens acima, deixou-se parte do sinal gerado interrompido de forma propositada, para comparação com o nível de ruído do equipamento. Observa-se que a geração com $n = 1$ apresenta distorção harmônica total próxima desse nível de ruído.

4.4. MODULAÇÃO POR TEMPO DE SUBIDA OU DE DESCIDA

Através da técnica DNAx, podemos prever um tipo de modulação ainda não utilizada na prática, na qual se procura controlar os tempos de subida e de descida de um pulso. A idéia da modulação por tempo de subida consiste em estabelecer um sistema que gera uma onda portadora retangular através de uma célula DNAx. Um sinal modulante que pode ser *zero* ou *um*, aplicado a célula DNAx, provoca mudança no tempo de subida ou descida da onda retangular, a cada semiciclo. Embora seja possível prever uma elevada taxa de modulação, será necessário um aprimoramento das bases teóricas e experimentais para identificar as limitações do processo. A descrição a seguir dá uma visão clara do processo proposto, na qual foi possível controlar os tempos de subida e de descida a partir da especificação dos parâmetros associados à função DNAx. Nota-se que o tempo de descida ficou menor do que o tempo de subida e serão procuradas aplicações possíveis para esta propriedade.

$$a := 1.5 \quad p := \frac{\pi}{2} \quad b := 1.5 \quad m := 100 \quad d := 0.5 \quad k := \frac{\pi}{2} \quad C := 4 \quad Q := 20$$

$$n(x) := Q\cdot\left[\left[\,\left|b\cdot\sin[k\cdot(x-d)]\right|\,\right]^{m} + 1\right]^{\left[-\left[\,\left|b\cdot\sin[k\cdot(x-d)]\right|\,\right]^{m}\right]} + C$$

$$yp(x) := \left[\left(\left|a\cdot\sin(p\cdot x)\right|\right)^{n(x)} + 1\right]^{\left[-\left[\left(\left|a\cdot\sin(p\cdot x)\right|\right)^{n(x)}\right]\right]}$$

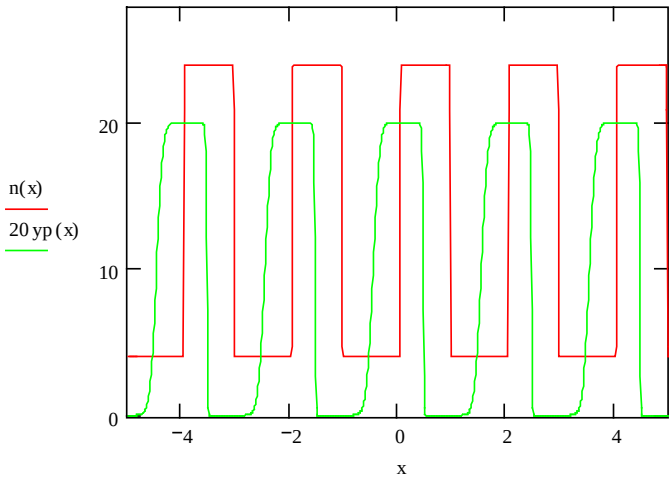
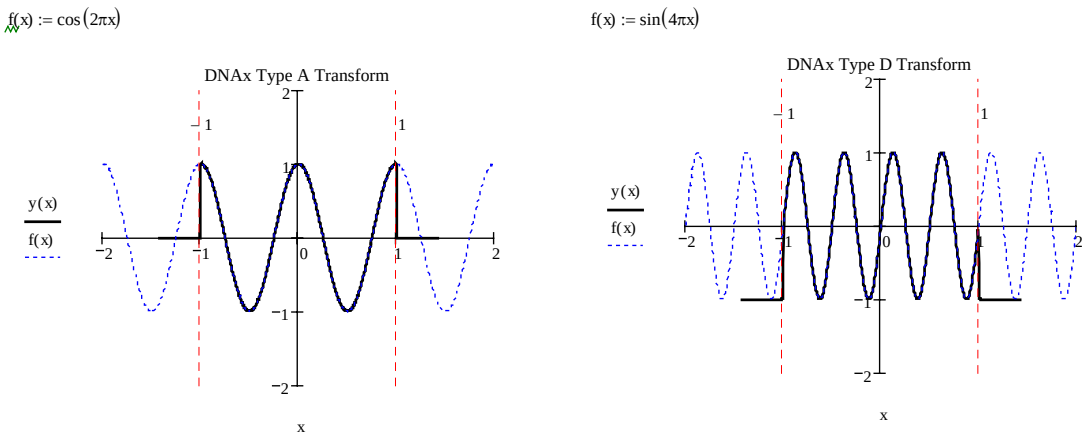


Figura 4.11. *Sinal em que se controlou o tempo de descida da portadora com o sinal modulante incorporado na função DNAx.*

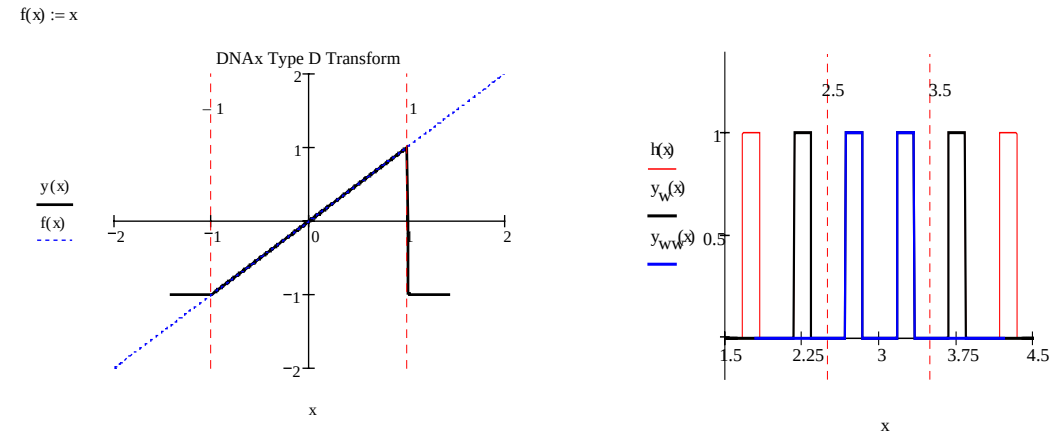
4.5. ALGUMAS FORMAS DE ONDA COMPLEXAS OBTIDAS COM A DNAx

Diversas formas de onda *f*(*t*) foram inseridas na janela da função DNAx, cujos resultados estão na figura a seguir, com o destaque para as condições sob as quais foram

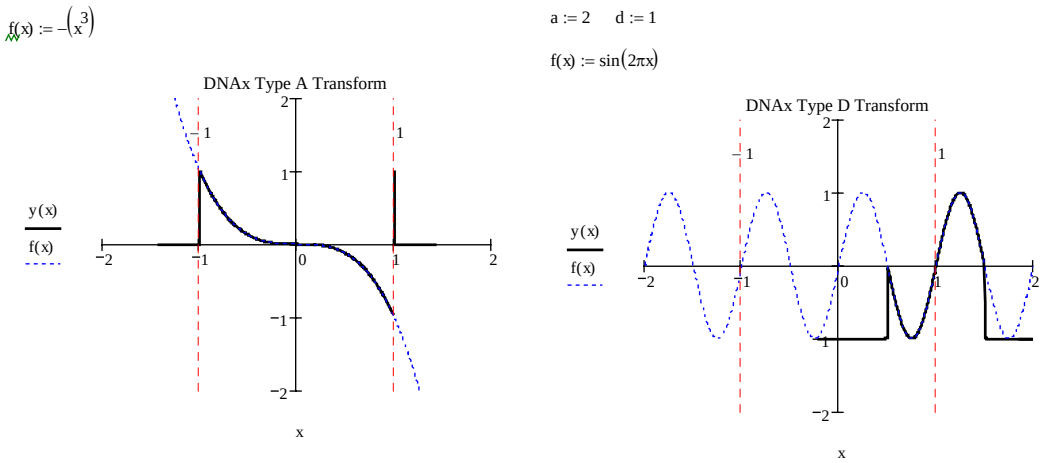
geradas. Para todos os gráficos, impuseram-se os valores a = 1 e $n \to \infty$. Os resultados indicam que a janela pode ser empregada para apresentar uma amostra de um intervalo da função, independente da forma de onda original. Trata-se de uma parte controlada da função desejada a partir da especificação do valor de a. Nas apresentações, foi possível selecionar o número de ciclos de uma senóide usando esta propriedade, garantindo o formato original, sem distorções no intervalo considerado. Isto é possível para o valor de $n \to \infty$, pois para outros valores poderão ocorrer distorções principalmente nas proximidades dos limites da janela. Foi possível gerar outras formas de onda e mesmo deslocar uma forma original no tempo.



(*a*) (*b*)



(*c*) (*d*)



(*e*) (*f*)

Figura 4. 12. *Diferentes formas de onda inseridas na janela DNAx, que permitem operações matemáticas como integrações, diferenciações, etc., em limites preestabelecidos.*

CAPITULO V

COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

5.1. COMENTÁRIOS GERAIS

Neste capitulo, apresentaremos algumas das possíveis aplicações para a função DNAx definida que deverão ainda ser estudadas e desenvolvidas, mas que já se tem uma sólida indicação de que são passíveis de aplicação. A função DNAx foi calculada para ser analógica, contínua, diferenciável e integrável em todo seu intervalo de validade para que se possa utilizá-la na síntese de outras funções. Como vimos nos capítulos anteriores, conseguimos gerar pulsos, ondas retangulares e criar janelas operacionais que permitem obter formas de ondas especiais, todas controláveis. Foi possível, também, sintetizar ondas senoidais a partir de ondas retangulares, sugerindo uma enorme possibilidade de utilizações. Foi possível, por exemplo, controlar as distorções das senóides. Podemos afirmar que conhecemos melhor as ondas senoidais pois podemos gerá-las e controlar sua distorção por meio do ajuste de termos conhecidos que as corrigem.

Neste capitulo, abriram-se também algumas possibilidades que poderão levar à criação de novos tipos de modulação como será proposto. E uma das propriedades que mais poderão trazer desenvolvimento é a transformada que possibilita mapear uma seqüência de bits para um polinômio equivalente e vice-versa a partir daqui a chamaremos *transformada P*. A transformada P permitirá a criação de novos códigos, compressão, encriptação, etc.. Mais adiante apresentaremos um algoritmo simples que mostra a viabilidade destes desenvolvimentos, que ainda requerem estudos de acordo com as aplicações e necessidades.

Este desenvolvimento matemático mostra-se muito eficaz em diversas aplicações da engenharia, simplificando algumas operações e criando outras possibilidades. O advento dos processadores digitais e de aplicativos computacionais permitiram equacionar os problemas tecnológicos e de engenharia com novos enfoques e a técnica DNAx aparece como um recurso muito útil para estas soluções.

5.2. SUGESTÕES PARA FUTUROS DESENVOLVIMENTOS E APLICAÇÕES

Proporemos alguns caminhos a serem seguidos na aplicação da técnica DNAx para desenvolvimento e criação de novos sistemas aplicáveis em diversos ramos da engenharia, em particular o voltado para as telecomunicações. Nesta aplicação, destacam-se os assuntos relativos à compressão e encriptação de sinais através da transformada P e a possibilidade da criação de uma nova maneira de transmitirem dados a uma alta taxa de bits por ciclo. Existe, ainda, a possibilidade de sintetização de sons a partir de correspondentes formulações matemáticas, que representem vogais e sílabas.

Uma idéia de encriptação utilizando a propriedade de transformada da técnica DNAx parte do princípio que esta propriedade permite transformar qualquer seqüência de bits no domínio do tempo (TD) em um polinômio no domínio matemático (MD). A ilustração abaixo mostra uma seqüência de bits de quatro pulsos que pode ser representada por um polinômio de quatro raízes reais. Quando o polinômio for aplicado na célula DNAx, como mostrado no Capítulo 3, ele faz com que apareça uma seqüência de quatro pulsos, cada um correspondente a uma raiz do polinômio. Uma proposição seguiria o algoritmo descrito a seguir.

Seqüência de encriptação usando a técnica DNAx

1. Converter a seqüência de bits no domínio do tempo (TD) em um polinômio função de x usando qualquer processo matemático que relacione a raiz do polinômio com os pulsos da seqüência de bits. No exemplo foi usado um método de relacionar diretamente a posição de um pulso a uma raiz real do polinômio $P(x)$. Poderão ser usadas raízes complexas ou reais.

2. O segundo passo é definir um polinômio chave $P_k(x)$ que operará sobre $P(x)$.

3. Defina quais operações serão executadas entre P(x) e PK(x); aqui neste ponto aparece também a possibilidade de se comprimir as informações pela diminuição controlada do numero de bits que serão resultantes desta operação.

4. O polinômio resultante será $P_r(x)$, que contenha a informação encriptada e/ou compactada.

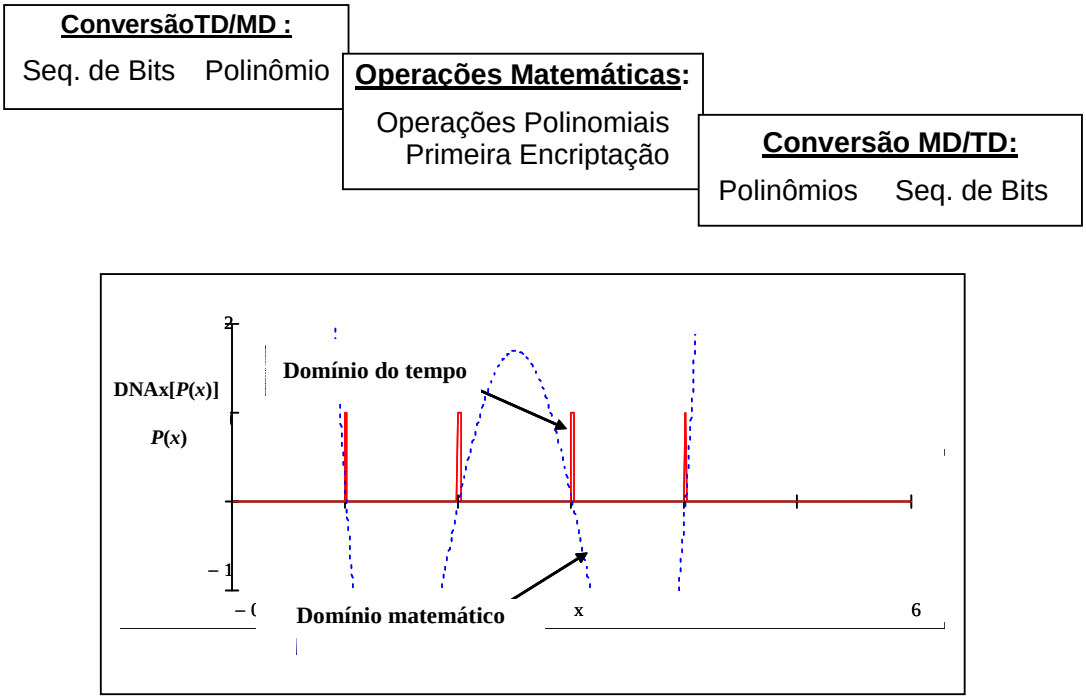


Figura 5.1. *Representação dos pulsos no domínio do tempo e no domínio matemático para a aplicação proposta e uma ilustração do algoritmo proposto.*

Conversão do domínio do tempo para o domínio matemático

1. Gera-se uma seqüência de números correspondentes a cada estado lógico da seqüência de bits. Pode-se usar uma seqüência natural de números inteiros ou números relativos. Também se pode usar uma série numérica qualquer, resultando em uma encriptação mais robusta.

2. No exemplo abaixo, escolheu-se o estado lógico 1 para ser representado pelas raízes do polinômio, que indicam as posições do bit 1 na seqüência ao longo da linha do tempo.

3. Na tabela abaixo representa-se a o polinômio P(x) com sua seqüência de bits 10101001 para a técnica DNAx. Isto é possível de se ter na prática através de microprocessadores e aplicativos matemáticos.

Tabela 5.1. *Polinômio P(x) do exemplo de aplicação com sua seqüência de bits.*

Seq. de Bits	1	0	1	0	1	0	0	1
Seq. de números	1	2	3	4	5	6	7	8
Escolha das raízes	1		3		5			8
Polinômio resultante	$P(x)=(x-1)(x-3)(x-5)(x-8)$							
Polinômio resultante	$P(x)=x^4-17x^3+95x^2-199x+120$							

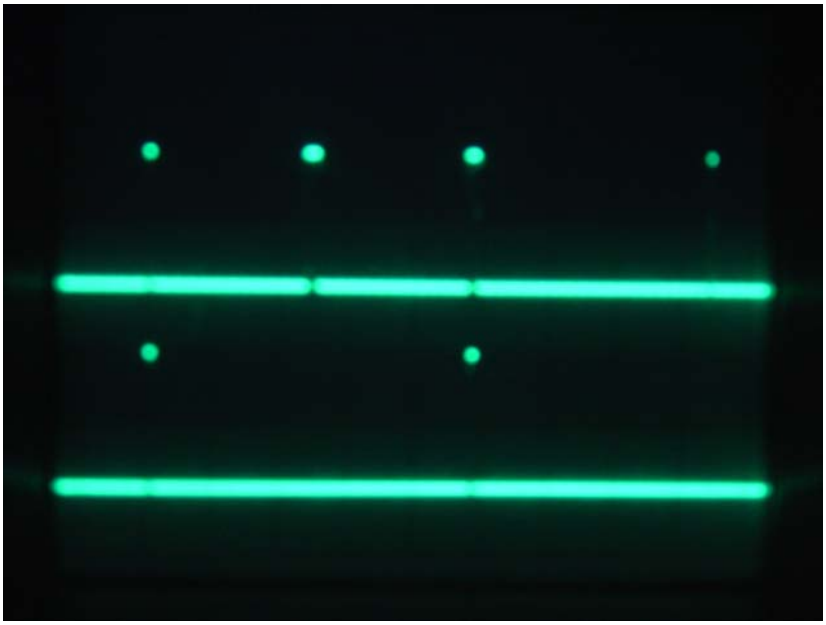


Figura 5.2. *Seqüência de bits relativos aos polinômios P(x) e Pk(x) conforme explicitados no texto. O polinômio P(x) obedece à seqüência 10101001 e o* $P_k(x)$ *obedece à 10001000.*

A encriptação no domínio matemático (MD)

Desde que $P(x)$ é a representação da seqüência de bits, torna-se possível a operação apresentada a seguir.

1. Pode-se proceder a qualquer tratamento matemático com $P(x)$.
2. Podemos criar outro polinômio que será chamado *polinômio chave* $P_k(x)$ e realizar qualquer operação matemática entre $P(x)$ e $P_k(x)$. A escolha das operações dependerá do algoritmo desejado e dos objetivos a serem alcançados. Poderemos estabelecer uma finalidade, não apenas de encriptação, mas também de compressão simultaneamente, ou somente compressão, etc.. A figura a seguir é uma seqüência de bits relativos a $P(x)$ e $P_k(x)$, respectivamente, segundo uma escolha conveniente deste último.

O resultado das operações entre $P(x)$ e $P_k(x)$ será $P_r(x)$ que possuirá raízes resultantes das operações e proporcionará uma outra seqüência de bits. Por exemplo,

$$P_r(x) = \frac{P(x)}{P_k(x)} \tag{5.1}$$

Algoritmo de desencriptação DNAx

O processo de desencriptação de $P_r(x)$ requer o conhecimento de $P_k(x)$ e dos parâmetros da função DNAx. O algoritmo é exatamente o inverso do apresentado na encritptação. Contudo o trabalho só estará terminado se obtivermos a seqüência de bits a partir de $P_r(x)$.

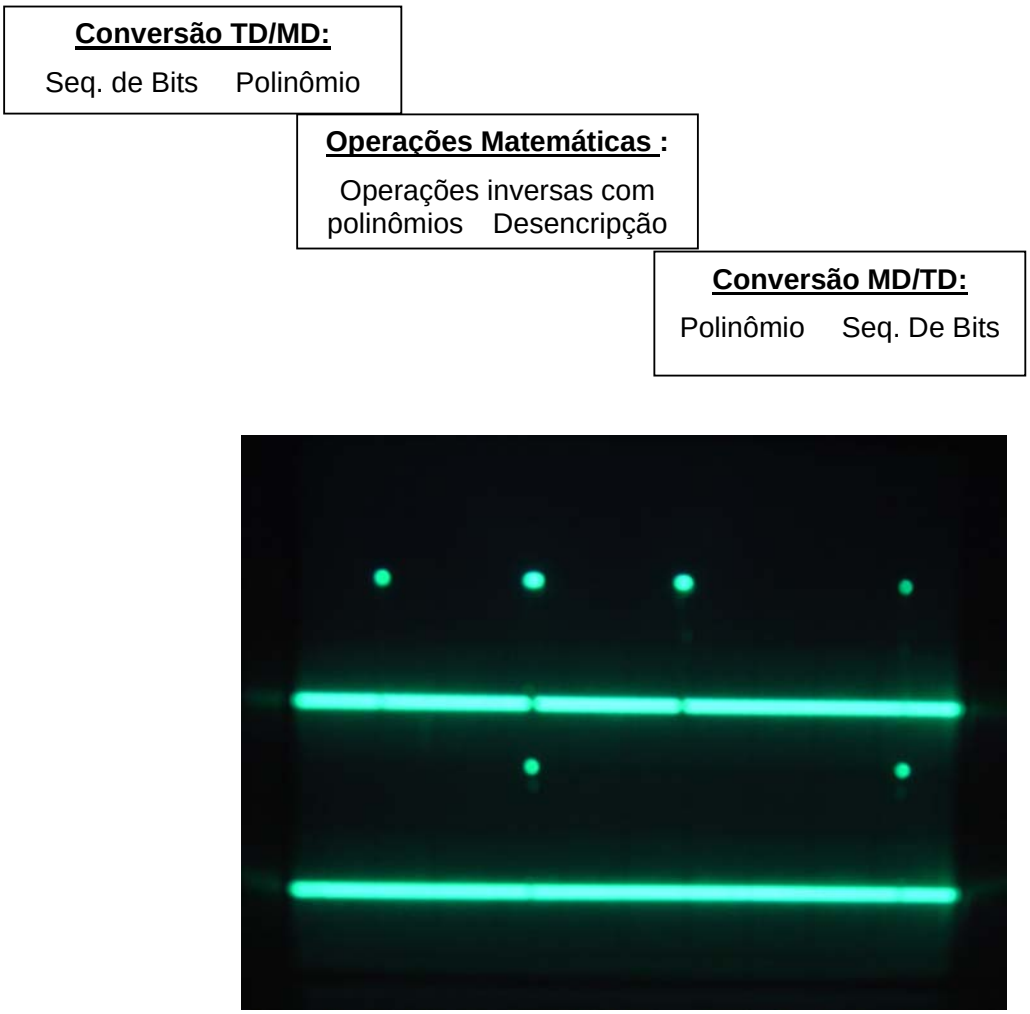


Figura 5.3. *Visualização da encriptação/compressão da seqüência de bits gerada a partir do polinômio P(x). A segunda seqüência de bits é proporcional a $P_r(x)$.*

Conversão do Domínio da Matemática para o Domínio do Tempo (MD/TM)

Para convertermos o polinômio Pr(x) em uma sequência de bits (sinal elétrico) $S(t)$, usaremos a equação DNAx, que poderá ser uma célula formada por circuitos, como apresentado no Capítulo 3, ou resultado de processamento por programa de computador adequado, como mostrado no Capítulo 4. Neste ponto

a célula DNAx também pode representar uma segunda encriptação, pois seus parâmetros poderão traçar a seqüência de bits para valores de seus parâmetros mantidos confidenciais. S(t) é uma sequência de bits no domínio do tempo. A sequência de bits encriptada/comprimida será então equivalente a seqüência original.

$$S(t) \equiv DNAx\left[P_r\left(x\right)\right] \tag{5.2}$$

$$10101001 \Leftrightarrow 100001 \tag{5.3}$$

Fim do algoritmo

Na proposta de aplicação discutida, além de encriptada, a seqüência de bits está menor do que a original. Este exemplo foi criado propositadamente para mostrar as duas capacidades da transformada P. Todavia, trata-se de um caso muito específico, no qual se escolheram polinômios que, ao serem divididos, dão resultados inteiros, sem resto a ser considerado. Isto não pode ser generalizado de forma simplificada por que os bits originais têm disposições aleatórias de zeros e uns. Uma vez fixado o polinômio chave, nem sempre as divisões serão inteiras. Trata-se de um problema a ser solucionado, o que exigirá um estudo aprofundado e o desenvolvimento de métodos adaptados a cada utilização.

5.2 CONCLUSÃO

Neste trabalho apresentou-se nova proposta de tratamento e geração de sinais a partir de uma nova função que foi denominada DNAx. Discutiu-se novas formas de apresentação de funções clássicas da engenharia de telecomunicações, as formas pelas quais podem ser conseguidas por meio de circuitos eletrônicos ou de programas de computador. Apresentaram-se resultados teóricos e suas comprovações experimentais, tanto com o emprego de circuitos como com os recursos computacionais. Nessas aplicações ficaram bastante evidentes as vantajosas potencialidades do método e algumas de suas limitações mais relevantes. Destacaram-se as possibilidades de uso da função proposta para geração de pulsos com diferentes formatos dentro da janela de operação da função, a possibilidade de estabelecerem-se seqüências de bits com os formatos propostos, a obtenção de ondas senoidais a partir da superposição de ondas retangulares com o método. Nesta última aplicação, aparece a possibilidade do envio de elevadas taxas de bits por ciclo, uma nova aplicação que necessita ser melhor explorada. Para isto, há necessidade de implementação de sistemas eletrônicos e computacionais dedicados à tarefa proposta.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. CAPUTO, R. G. *Method of generating complex waveforms and modulating signals*. US Patent n. 10/463, 482.
2. CAPUTO, R. G. *Complex waveform generator*. US Provisional Patent Application serial n. 60/543,191.
3. CRC *Concise Mathematics Encyclopedia*. 2nd. Ed. Boca Raton: CRC, 1998.
4. SPIEGEL, M. R. *Laplace transforms*. New York: McGraw-Hill, 1965.
5. *Mathematics Handbook*, Rode & Westergren. 4th Edition.
6. LATHI, B. P. *Modern Digital and Analog Communication Systems*. 2nd Edition. Local: 1995.
7. SPIEGEL, M. R. *Manual de fórmulas e tabelas matemáticas.* Trad. de Roberto Chiocarello. São Paulo: McGraw-Hill, 1974.
8. AD538 - *Real-Time Analog Computational Unit* (ACU). Disponível em: http://www.analog.com/en/prod/. Acesso em 21 de dezembro de 2005.
9. GOOTMAN, E. C. *Calculus*, New York: Barron's Educational Series, Inc., 1997
10. GAZALÉ, M. J. *Number, From Ahmes to Cantor*, Princeton, New Jersey Princeton University Press, 2000.
11. GAZALÉ, M. J. *Gnomon, From Pharaohs to Fractals*, Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1999.
12. STEWART, Ian. *Concepts of Modern Mathematics*, Mineola, N.Y.: Dover Publications, Inc., 1994.
13. HAMMING, R.W. *Numerical Methods for Scientists and Engineers*, Mineola, N.Y.: Dover Publications Inc..1973.
14. MLODINOW L. *Euclid's Window*, New York, N.Y.: The Free Press Inc., 2001.
15. NEEDHAM, T., *Visual Complex Analysis*, Oxford, N.Y.: Oxford University Press, 1997.
16. BERLINSKI, D. *O Advento do Algoritmo*, São Paulo, S.P.: Editora Globo S.A., 2002.
17. ALENCAR FILHO, A. *Iniciação à Lógica Matemática*, São Paulo, S.P., AMPUB Comercial Ltda (NOBEL), 1975.
18. CONWAY, J. H.; GUY, R. K. *Numbers*, New York, N.Y., Spring-Verlag New York, Inc., 1996.
19. SINGH, J. *Great Ideas of Modern Mathematics: Their Nature and Use*, New York, N.Y.,: Dover Publications, Inc., 1959.
20. SCHEINERMAN, E. R. *Matemática Discreta*, São Paulo, S.P., Pioneira Thomson Learning Ltda., 2003.

PATENTES REGISTRADAS

1. CAPUTO, R. G. *Method of generating complex waveforms and modulating signals*. US Patent n. 10/463, 482.

2. CAPUTO, R. G. *Complex waveform generator*. US Provisional Patent Application serial n. 60/543,191.