

Dissertação de Mestrado

Inatel

Instituto Nacional de Telecomunicações

**MODELAGEM DE CIRCUITOS
FRACAMENTE NÃO-LINEARES
UTILIZANDO SÉRIES DE
VOLTERRA**

TIAGO DE ALMEIDA CARNEIRO

JUNHO / 2005

Modelagem de circuitos fracamente não-lineares utilizando séries de Volterra

TIAGO DE ALMEIDA CARNEIRO

Dissertação apresentada ao Instituto Nacional de Telecomunicações, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: PROF. DR. WILTON NEY DO AMARAL PEREIRA

Santa Rita do Sapucaí
2005

Dissertação defendida e aprovada em 21/06/2005, pela comissão julgadora:

Prof. José Edimar Barbosa Oliveira, PhD - Instituto Tecnológico
de Aeronáutica

Prof. Sandro Adriano Fasolo, Dr. Enga. Depto. Telecom. -
Instituto Nacional de Telecomunicações

Prof. Wilton Ney do Amaral Pereira, Dr. ENSAE Depto.
Eletrônica - Instituto Nacional de Telecomunicações

Dr. Adonias Costa da Silveira

A minha Mãe, a pessoa em
quem eu sempre me
espelhei.

Agradecimentos

A Deus, por ter me dado auxílio espiritual e esperança nos momentos mais difíceis.

Ao Professor Dr. Wilton, pelo grande incentivo, amizade e excelente orientação fornecida durante a elaboração deste trabalho e acima de tudo, por me fazer enxergar o verdadeiro valor do engenheiro e pesquisador na sociedade.

A meus Padrinhos, Galeno e Adalgisa, por terem me recebido de braços abertos em sua casa e despertado em mim o gosto pelos estudos.

A todos os colegas, professores e funcionários do Instituto Nacional de Telecomunicações, pela grande colaboração e amizade.

Índice

Lista de Figuras	vii
Lista de Tabelas	ix
Lista de Abreviaturas e Siglas	xi
Lista de Símbolos	xii
1 Introdução	1
1.1 Conceito de Não-Linearidades Fortes e Não-Linearidades Fracas	1
1.2 Objeto do Trabalho	2
1.3 Objetivo do Trabalho	2
1.4 Justificativa	2
1.5 Metodologia Empregada	3
1.6 Revisão Bibliográfica	3
1.7 Composição do Trabalho	4
2 Método das Séries de Volterra Aplicado na Aproximação em Funções de Transferência Não-Lineares	6
2.1 Discussão Geral	6
2.2 Resposta do Sistema à Excitações Senoidais	8
2.3 Regra de Heterodinagem de Frequências	11
2.4 Potência dos Produtos de Intermodulação	17
3 Modelo Não-linear Equivalente para Transistor BJT	19
3.1 Circuito Não-Linear Incremental para o Transistor BJT	20
3.1.1 Não-Linearidade Resistiva da Junção Base-Emissor	20
3.1.2 Não-Linearidade da Capacitância de Difusão	21
3.1.3 Não-Linearidade da Capacitância de Transição da Junção Base-Coletor	22
3.1.4 Não-Linearidade da Fonte de Corrente de Coletor	23

4	Análise de um Amplificador de RF Utilizando as Séries de Volterra	27
4.1	Coeficientes das Séries de Taylor Relacionadas às Não-Linearidades Caracterizadas no Modelo T	27
4.1.1	Coeficientes da Não-Linearidade Resistiva da Junção Base-Emissor	30
4.1.2	Coeficientes da Não-Linearidade da Fonte de Corrente de Coletor	31
4.1.3	Coeficientes da Não-Linearidade da Capacitância de Transição	31
4.1.4	Coeficientes da Não-Linearidade da Capacitância de Difusão	32
4.2	Solução do Circuito Não-Linear Incremental Empregando as Séries de Volterra	33
4.2.1	Funções de Transferência Lineares	37
4.2.2	Funções de Transferência Não-Lineares de Segunda Ordem	40
4.2.3	Funções de Transferência Não-Lineares de Terceira Ordem	47
4.3	Valores Numéricos das Funções de Transferência	63
5	Análise dos Efeitos de Distorções Empregando as Funções de Transferência Não-Lineares	65
5.1	Distorção de Intermodulação de Segunda e Terceira Ordens para Dois Tons de Excitação	65
5.1.1	Ponto de Interceptação de Terceira Ordem	68
5.2	Efeitos de Compressão no Ganho de um Amplificador	69
5.2.1	Resposta em Freqüência das Funções de Transferência de Volterra	71
5.2.1.1	Resposta em Freqüência da Função de Transferência Linear	71
5.2.1.2	Resposta em Freqüência da Função de Transferência Não-Linear de Segunda Ordem	72
5.2.1.3	Resposta em Freqüência da Função de Transferência Não-Linear de Terceira Ordem	73
6	Efeitos de Distorções Não-Lineares em um Amplificador de Microondas	75
6.1	Modelagem do Amplificador	75
6.2	Solução do Circuito Não-linear Empregando as Séries de Volterra	79
6.2.1	Funções de Transferência Lineares	82
6.2.2	Funções de Transferência Não-Lineares de Segunda Ordem	82
6.2.3	Funções de Transferência Não-Lineares de Terceira Ordem	83
6.3	Potência Média dos Produtos de Intermodulação	85
6.3.1	Potência dos Componentes (f_2) , $(f_2 - f_1)$ e $(2f_2 - f_1)$. . .	85
6.3.2	Potência dos Componentes (f_1) , $(f_2 + f_1)$ e $(2f_1 - f_2)$. . .	86

6.3.3	Potência dos Produtos de Intermodulação de Terceira Ordem ($2f_2 + f_1$) e ($2f_1 + f_2$)	88
6.3.4	Potência dos Componentes Harmônicos de Segunda e Terceira Ordens	89
6.4	Ponto de Interceptação de Terceira Ordem	92
6.4.1	Dedução do Ponto de Interceptação de Terceira Ordem para o Amplificador	92
6.5	Influência das Não-Linearidades nos Níveis de Intermodulação	96
6.5.1	Efeito da Não-Linearidade da Condutância de Dreno	96
6.5.2	Efeito da Não-Linearidade da Fonte de Corrente Controlada por Tensão	97
7	Conclusão	100
A	Não-Linearidades Inerentes ao Modelo T	103
A.1	Elementos Não-Lineares de Circuitos	103
A.2	Características do Modelo T	107
A.2.1	Modelo T Não-Linear Incremental	111
B	Efeitos de Distorções Não-Lineares	120
B.1	Distorção de Intermodulação de Segunda e Terceira Ordens	120
B.1.1	Conceito de Ponto de Interceptação	124
B.2	Ganho de Compressão ou Expansão	125
C	Funções de Transferência Lineares e Não-Lineares do Amplificador de Microondas	131
C.1	Funções de Transferência Lineares	131
C.2	Funções de Transferência Não-Lineares de Segunda Ordem	133
C.3	Funções de Transferência Não-Lineares de Terceira Ordem	138
D	Programa para Cálculo dos Efeitos de distorções do Amplificador de RF	147
D.1	Programa para Cálculo das Funções de Transferência Não-Lineares de Volterra	147
D.2	Programa para Cálculo da Resposta em Frequência do Sistema	156
D.2.1	Programa para Cálculo da Resposta da Função de Transferência Linear	156
D.2.2	Programa para Cálculo da Resposta da Função de Transferência Não-Linear de Segunda Ordem	159
D.2.3	Programa para Cálculo da Resposta da Função de Transferência Não-Linear de Terceira Ordem	163

E Programa para Cálculo das Funções de Transferência Não-Lineares do Amplificador de Microondas	173
Bibliografia	191

Lista de Figuras

1.1	Característica de transferência não-linear de um circuito de amplificação.	2
2.1	Modelo de um sistema fracamente não-linear [2].	7
2.2	Função de Transferência Linear de um Sistema com Frequência Central em 50MHz.	12
3.1	Modelo T para o transistor de junção bipolar.	20
3.2	Modelo T não-linear incremental para o transistor de junção bipolar.	26
4.1	Circuito do amplificador emissor-comum [1].	28
4.2	Modelo do circuito incremental para o amplificador.	29
4.3	Modelo do circuito incremental com as impedâncias e a fonte equivalente.	29
4.4	Modelo do circuito não-linear incremental equivalente do amplificador emissor comum.	30
5.1	Valores medidos e calculados dos produtos de distorção de dois tons ($f_1 = 2,5\text{MHz}$, $f_2 = 3\text{MHz}$).	67
5.2	Valores medidos e calculados dos produtos de distorção de dois tons ($f_1 = 30\text{MHz}$, $f_2 = 51,4\text{MHz}$).	68
5.3	Curva de ganho de compressão para o amplificador em $f_2 = 3\text{MHz}$	70
5.4	Curva de ganho de compressão para o amplificador em $f_2 = 51,4\text{MHz}$	70
5.5	Magnitude da função de transferência linear.	71
5.6	Magnitude da função de transferência não-linear de segunda ordem.	72
5.7	Magnitude da função de transferência não-linear de segunda ordem em três dimensões.	73
5.8	Magnitude da função de transferência não-linear de terceira ordem.	74
6.1	Diagrama esquemático do circuito de amplificador com transistor GaAs MESFET.	76
6.2	Modelo não-linear incremental equivalente do transistor GaAs MESFET.	76

6.3	Modelo não-linear incremental equivalente do amplificador com transistor GaAs MESFET.	78
6.4	Potência dos componentes (f_2) e $(f_2 - f_1)$ variando com a frequência.	87
6.5	Potência do produto de intermodulação $(2f_2 - f_1)$ variando com a frequência.	87
6.6	Potência dos componentes (f_1) e $(f_2 + f_1)$ variando com a frequência.	88
6.7	Potência do produto de intermodulação $(2f_1 - f_2)$ variando com a frequência.	89
6.8	Potência do produto de intermodulação $(2f_2 + f_1)$ variando com a frequência.	90
6.9	Potência do produto de intermodulação $(2f_1 + f_2)$ variando com a frequência.	90
6.10	Potência do componente harmônica de segunda ordem $(2f_1)$ variando com a frequência.	91
6.11	Potência do componente harmônica de terceira ordem $(3f_1)$ variando com a frequência.	91
6.12	Ponto de interceptação de terceira ordem em função do produto de intermodulação $(2f_1 - f_2)$, variando com a frequência.	94
6.13	Ponto de interceptação de terceira ordem em função do produto de intermodulação $(2f_2 - f_1)$, variando com a frequência.	94
6.14	Ponto de interceptação de terceira ordem em função do produto de intermodulação $(2f_1 + f_2)$, variando com a frequência.	95
6.15	Ponto de interceptação de terceira ordem em função do produto de intermodulação $(2f_2 + f_1)$, variando com a frequência.	95
6.16	Potência dos componentes (f_2) e $(f_2 - f_1)$ variando com a frequência.	97
6.17	Potência do componente $(2f_2 - f_1)$ variando com a frequência.	97
6.18	Potência dos componentes (f_2) e $(f_2 - f_1)$ variando com a frequência.	98
6.19	Potência do componente $(2f_2 - f_1)$ variando com a frequência.	99
A.1	(a) Resistor não-linear. (b) Capacitor não-linear. (c) Fonte de corrente não-linear controlada por tensão.	108
A.2	Modelo T para o transistor de junção bipolar.	109
A.3	Modelo T não-linear incremental para o transistor de junção bipolar.	118

Lista de Tabelas

4.1	Parâmetros do Transistor 2N2950.	28
4.2	Funções de Transferência Lineares e Não-Lineares do Amplificador em $f_1 = 2,5\text{MHz}$, $f_2 = 3\text{MHz}$, $f_3 = f_2$	63
4.3	Funções de Transferência Lineares e Não-Lineares do Amplificador em $f_1 = 30\text{MHz}$, $f_2 = 51,4\text{MHz}$, $f_3 = f_2$	64
6.1	Parâmetros do Transistor AT10650.	77
6.2	Diferença entre os níveis dos produtos de intermodulação em 5 GHz.	99

Lista de Abreviaturas e Siglas

BJT	Transistor de junção bipolar
FET	Transistor de efeito de campo
HBT	Transistor bipolar de heterojunção
MESFET	Transistor de efeito de campo metal-semicondutor
<i>intr</i>	Razão de intermodulação
<i>gce</i>	Razão de ganho de compressão/expansão

Lista de Símbolos

$x(t)$	Sinal de entrada de um sistema fracamente não-linear
$y(t)$	Sinal de saída de um sistema fracamente não-linear
E_q	Amplitude complexa da senoide de entrada em f_q
f_q	freqüência da q -ésima senoide de entrada
θ_q	ângulo da q -ésima senoide de entrada
Q	Número de tons senoidais
m	Vetor de heterodinagem de freqüências
$y_i(t)$	Componente de i -ésima ordem de $y(t)$
f_m	Freqüência de intermodulação gerada pelo vetor m
$y_i(t; m)$	Componente de $y_i(t)$ gerado pelo vetor m
$\hat{y}_i(t; m)$	soma de $y_i(t; m)$ e seu complexo conjugado
$y(t; f)$	soma dos componentes de $y(t)$ que estão na freqüência f
$ E_m $	Amplitude de $\hat{y}_i(t; m)$
$p_L(f_m)$	Potência média dissipada na carga
$p_S(f_q)$	Potência média do sinal de entrada na freqüência f_q
$c(m)$	Multiplicador de intermodulação
$H_i(f_1, \dots, f_i)$	Função de transferência não-linear de i -ésima ordem
$h(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i)$	Kernel de i -ésima ordem de Volterra
$Z_S(jw)$	Impedância equivalente de Thevenin
$v_S(t)$	Fonte equivalente de Thevenin
$Z_L(jw)$	Impedância equivalente de carga

$GaAs$	Arsenieto de Gálio
$a(t)$	Tensão do nó a
$b(t)$	Tensão do nó b
$c(t)$	Tensão do nó c
$d(t)$	Tensão do nó d
$[Y(\cdot)]$	Matriz admitância
$e(t)$	Vetor de tensões
$i_g(t)$	Vetor de fonte de excitação independente
$j(t)$	Vetor de correntes não-lineares
p	Operador diferencial, $p = d/dt$
$A(f_1, \dots, f_i)$	Função de transferência de <i>i-ésima</i> ordem de $a(t)$
$B(f_1, \dots, f_i)$	Função de transferência de <i>i-ésima</i> ordem de $b(t)$
$C(f_1, \dots, f_i)$	Função de transferência de <i>i-ésima</i> ordem de $c(t)$
$D(f_1, \dots, f_i)$	Função de transferência de <i>i-ésima</i> ordem de $d(t)$
$a_i(t)$	Componente de <i>i-ésima</i> ordem de $a(t)$
$b_i(t)$	Componente de <i>i-ésima</i> ordem de $b(t)$
$c_i(t)$	Componente de <i>i-ésima</i> ordem de $c(t)$
$d_i(t)$	Componente de <i>i-ésima</i> ordem de $d(t)$
ξ_{1S}, ξ_{2S} e ξ_{3S}	Coefficientes de $\exp[j2\pi(f_1 + f_2)t]$
ξ_{1T}, ξ_{2T} e ξ_{3T}	Coefficientes de $\exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]$
p_{AS}	Potência disponível do gerador
R_S	Resistência da fonte
p_r	Potência de referência
G_r	Condutância de referência
E_r	Amplitude complexa da tensão de referência
$I_i(f_m)$	Ponto de interceptação de <i>i-ésima</i> ordem

Resumo

Os efeitos de distorções não-lineares em sistemas fracamente não-lineares eram avaliados empregando o método clássico de aproximação em séries de potência. Nos últimos anos, as não-linearidades inerentes aos dispositivos eletrônicos vêm sendo caracterizadas, com sucesso, utilizando o método das séries de Volterra.

O objetivo deste trabalho foi realizar um estudo exploratório desta técnica, bem como aplicá-la na análise dos efeitos não-lineares típicos em amplificadores de potência e verificar sua validade com base em dados experimentais, previamente conhecidos e empregando simulações numéricas.

Empregando-se o método de Volterra para realizar a modelagem matemática de amplificadores de potência, conseguiu-se determinar a potência dos produtos de intermodulação dissipada na saída do circuito. Com o auxílio desta técnica, pode-se avaliar também as características de compressão no ganho do sistema, bem como sua resposta em frequência e o ponto de interceptação de terceira ordem.

Palavras-chave: Sistemas fracamente não-lineares, método das séries de Volterra, aproximação em séries de potência.

Abstract

The effects of nonlinear distortions in weakly nonlinear systems were evaluated using the classic method of power series approach. In the last years, the nonlinearities inherent to the electronic devices come being characterized, successfully, using the Volterra series method.

The objective of this work is to carry out a study and summary of the main characteristics of this technique, as well as applying it in the analysis of the typical nonlinear effects in power amplifiers and verifying its validity based in experimental data, previously known and using numerical simulations.

Using the Volterra's method to carry out the mathematical modeling of power amplifiers, it was possible to determine the power of the intermodulation products dissipated in the circuit output. With the aid of this technique, it was possible also to carry out the evaluation of the characteristics of the compression in the system gain, as well as its frequency response and the third order intercept point.

Keywords: Weakly nonlinear systems, Volterra series method, power series approach.

Capítulo 1

Introdução

Componentes físicos e circuitos são inerentemente não-lineares. Todavia a maior parte dos textos voltados à análise de circuitos trabalha com análise linear. Neste caso, as não-linearidades são freqüentemente ignoradas ao se realizar a modelagem de um sistema eletrônico. Modelos lineares são, contudo insuficientes para explicar importantes fenômenos reais comuns em eletrônica.

1.1 Conceito de Não-Linearidades Fortes e Não-Linearidades Fracas

Nesse trabalho é feita a distinção entre não-linearidades fortes e fracas. Não-linearidades fortes são caracterizadas por mudanças abruptas nos limites da região de operação do sistema. Por exemplo, seja considerada a característica de transferência que relaciona tensões de entrada e saída em um circuito de amplificação, como a ilustrada na Figura 1.1. Nota-se que há uma mudança abrupta na característica de transferência ao passar da região de amplificação para as regiões de corte ou saturação. Essa variação abrupta na curva é caracterizada como sendo uma não-linearidade forte.

As não-linearidades fracas caracterizam-se por uma relação entrada-saída que varia gradualmente em função do sinal de entrada ou seja, sem que haja alterações abruptas na característica de transferência. Segundo essa definição, o tipo de não-linearidade que envolve a característica de transferência na região de amplificação, apresentada na Figura 1.1, pode ser considerada como sendo uma não-linearidade fraca.

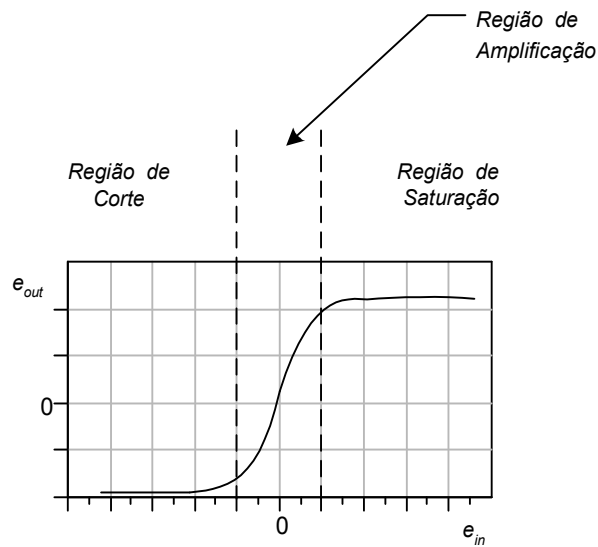


Figura 1.1: Característica de transferência não-linear de um circuito de amplificação.

1.2 Objeto do Trabalho

Esse trabalho desenvolveu um estudo abrangente sobre uma das ferramentas matemáticas mais poderosas para a análise do comportamento de circuitos fracamente não-lineares, desenvolvida sobre as séries de Volterra.

1.3 Objetivo do Trabalho

O propósito desse trabalho foi realizar um estudo exploratório, condensando de forma concisa e organizada a teoria sobre a aplicação das séries de Volterra na análise dos efeitos não-lineares em amplificadores de potência implementados com um transistor de junção bipolar (BJT) e um transistor de efeito de campo metal-semicondutor de arsenieto de gálio (GaAs MESFET).

1.4 Justificativa

A motivação para o desenvolvimento desse trabalho partiu da dificuldade de encontrar na bibliografia um estudo detalhado, bem organizado e didático capaz de preparar o engenheiro para a utilização de uma ferramenta analítica confiável.

Esta ferramenta deve ser capaz de fornecer um suporte teórico consistente e adequado a modelagem e análise dos efeitos não-lineares significativos em circuitos atualmente empregados em sistemas de comunicação, tais como moduladores,

misturadores, amplificadores de potência, osciladores, linearizadores, etc.

1.5 Metodologia Empregada

Em função da ausência de textos técnicos, em particular na língua portuguesa, que abordassem de uma forma mais completa a teoria de análise de circuitos fracamente não-lineares, o autor achou conveniente condensar, na abordagem inicial, os conceitos teóricos sobre aproximação em funções de transferência não-lineares de Volterra, descritos originalmente por WEINER [2].

Depois de apresentado um resumo teórico e abrangente sobre a aproximação em funções de transferência não-lineares de Volterra, buscou-se aplicá-la na análise das características não-lineares de um amplificador de RF e de um amplificador de microondas, desenvolvendo-se modelos matemáticos destes dispositivos. Em seguida, utilizou-se o software MATLAB [16] para implementar, numericamente, as equações resultantes dos modelos teóricos concebidos para esses amplificadores.

Com o intuito de verificar a validade das deduções analíticas efetuadas para cada modelo, os resultados obtidos com os programas gerados em MATLAB [16] foram comparados com novas simulações numéricas realizadas por um software comercial já consagrado, o Microwave Office e também com resultados experimentais, publicados por GRAHAM & EHRMAN [1].

1.6 Revisão Bibliográfica

Atualmente, a aproximação de Volterra é utilizada em muitas aplicações que envolvem não-linearidades. Volterra propôs estas séries em meados de 1910.

GRAHAM & EHRMAN [1] realizaram com sucesso a análise e modelagem de sistemas de comunicação na presença de interferência, empregando as séries de Volterra.

A obra de WEINER [2] deu suporte teórico e ajudou a esclarecer a complexidade das manipulações matemáticas realizadas no relatório de GRAHAM & EHRMAN [1].

Empregando-se o Método do Balanço Harmônico e as séries de Volterra, MASS [3] estudou diversos circuitos não-lineares de microondas utilizando transistores GaAs MESFET, com o objetivo de determinar o comportamento da distorção na saída dos sistemas.

NARAYANAN [4] utilizou as séries de Volterra para investigar os efeitos de distorção por intermodulação de um amplificador em configuração emissor-comum, empregando transistor BJT.

As características não-lineares de um amplificador de potência, utilizando o transistor (SiGe) HBT, foram analisadas por DENG et al. [5] e [6], empregando um método derivado das séries de Volterra denominado de coeficientes de Volterra de potência dependente. Este método é aplicado na análise de sistemas que exibem não-linearidades fortes.

Com o propósito de modelar amplificadores de potência com não-linearidades fortes, ZHU & BRAZIL [7] apresentaram um novo método baseado nas séries de Volterra para reduzir a complexidade analítica da modelagem do sistema.

Utilizando as séries de Volterra, KUSUNOKI et al. [8] apresentaram um estudo sobre os mecanismos de compensação de distorção e valor ótimo da impedância de carga para amplificadores de potência que empregam o transistor pHEMT.

Com método de Volterra, AHN et al. [9] pesquisaram a influência da impedância de fonte e de carga nos efeitos não-lineares de amplificadores de potência, utilizando também GaAs MESFET.

CROSMUN & MASS [12], por meio das séries de Volterra, mostraram a dependência da distorção de intermodulação de terceira ordem em função da frequência para um amplificador de microondas, por meio das séries de Volterra.

1.7 Composição do Trabalho

Conforme foi comentado na Seção 1.5, o Capítulo 2 desse trabalho apresenta a teoria inicial sobre as funções de transferência não lineares de Volterra, fundamentação teórica necessária para a modelagem e análise dos dispositivos não-lineares.

No Capítulo 3 é apresentado um modelo não-linear incremental equivalente para o transistor BJT. Um modelo não-linear do dispositivo ativo utilizado no circuito foi apresentado antes de analisar um sistema empregando as séries de Volterra.

Com o objetivo de verificar a aplicação da técnica de Volterra, investigou-se no Capítulo 4, um amplificador de RF implementado com o BJT 2N2950. O método de entradas harmônicas foi utilizado para determinar, de forma recursiva, as funções de transferência não-lineares deste circuito.

Com o intuito de avaliar os efeitos de distorções não-lineares do circuito, as funções de transferência não-lineares deduzidas para o amplificador analisado no Capítulo 4 foram utilizadas no Capítulo 5.

Para verificar a validade do modelo teórico desenvolvido para circuitos com dispositivos diferentes do BJT, no Capítulo 6 efetuou-se a modelagem matemática e análise dos efeitos não-lineares de um amplificador de microondas, implemen-

tado com um transistor GaAs MESFET.

A conclusão foi realizada no Capítulo 7, neste Capítulo se comentou sobre os principais resultados obtidos, bem como as limitações da técnica investigada, as dificuldades encontradas, algumas considerações finais e sugestões para realização de trabalhos futuros.

Capítulo 2

Método das Séries de Volterra Aplicado na Aproximação em Funções de Transferência Não-Lineares

Introduziu-se nesse capítulo a aproximação utilizando funções de transferência não-lineares, que são originadas das séries de Volterra. As funções de transferência não-lineares de Volterra são uma ferramenta matemática que serve de apoio ao projeto e análise de um sistema fracamente não-linear.

Cabe destacar, que o desenvolvimento teórico sobre a aproximação em séries de Volterra e as deduções analíticas, apresentadas neste capítulo, foram baseadas na obra de WEINER [2].

2.1 Discussão Geral

Baseado na análise de Volterra, a aproximação em funções de transferência não-lineares modela um sistema fracamente não-linear qualquer, de entrada $x(t)$ e saída $y(t)$, como ilustrado na Figura 2.1. Este modelo consiste de combinações paralelas de n blocos, com cada bloco tendo como entrada comum, a excitação $x(t)$. A saída do i -ésimo bloco é denotada por $y_i(t)$, com $i = 1, 2, \dots, n$. A resposta total é obtida somando-se as saídas dos blocos individuais, neste caso

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) + \dots + y_n(t) = \sum_{i=1}^n y_i(t). \quad (2.1)$$

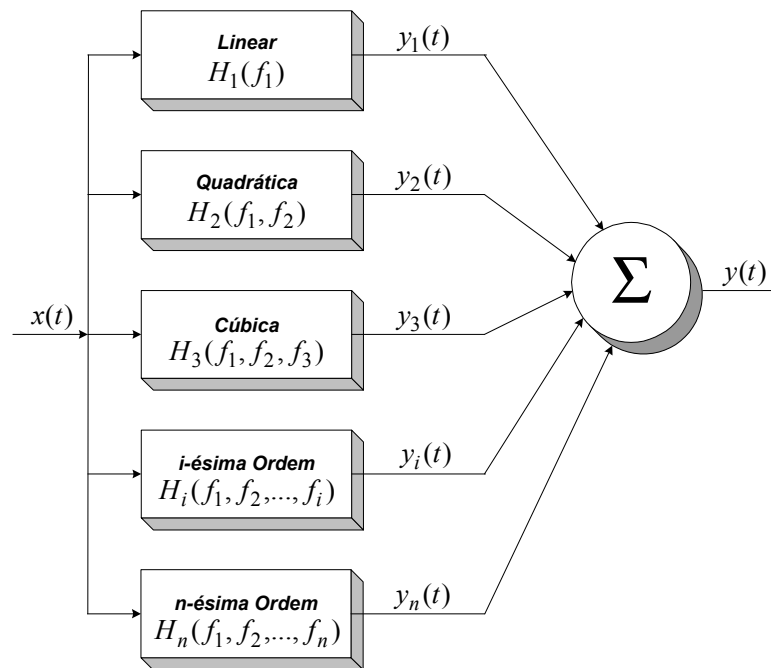


Figura 2.1: Modelo de um sistema fracamente não-linear [2].

Segue-se que o *i-ésimo* bloco é de *i-ésima* ordem, pois a multiplicação da entrada $x(t)$ pela constante A resulta na multiplicação da saída $y_i(t)$ pela constante A^i .

Segundo WIENER [2], a aproximação em funções de transferência não-lineares representa totalmente a resposta de um circuito fracamente não-linear como uma soma de n respostas individuais. A porção linear do circuito, caracterizado pela função de transferência linear ou de primeira ordem $H_1(f_1)$, gera o componente de primeira ordem da resposta. A porção quadrática do circuito, caracterizado pela função de transferência não-linear de segunda ordem $H(f_1, f_2)$, gera o componente de segunda ordem da resposta. Respostas adicionais são geradas de forma similar. Os blocos acima de ordem n não são incluídos no modelo, sendo considerados desprezíveis.

Conceito de Ordem e Grau

É de fundamental importância saber distinguir entre o conceito de grau dos termos de uma série de potência e a ordem da resposta de um sistema não-linear para poder utilizar o modelo de Volterra.

Por exemplo, considere um sistema fracamente não-linear que é adequadamente caracterizado pelo modelo da Figura 2.1. Assume-se que os blocos acima de terceira ordem são desprezíveis para a saída. Portanto $n = 3$ e a resposta do sistema é dada por

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t). \quad (2.2)$$

Considere $y(t)$ como sendo uma tensão aplicada a um resistor, em que a corrente depende não-linearmente da tensão, de acordo com a relação definida pela seguinte série de potência

$$i(t) = \sum_{r=1}^2 a_r y^r(t) = a_1 y(t) + a_2 y^2(t). \quad (2.3)$$

Sabendo-se que grau se refere ao expoente de qualquer termo de uma série de potência, a relação corrente-tensão no resistor envolve termos de primeiro e segundo graus. Substituindo (2.2) em (2.3) e resolvendo as operações, a corrente no resistor fica sendo escrita como

$$\begin{aligned} i(t) = & a_1[y_1(t) + y_2(t) + y_3(t)] + a_2[y_1^2(t) + y_2^2(t) + y_3^2(t) \\ & + 2y_1(t)y_2(t) + 2y_1(t)y_3(t) + 2y_2(t)y_3(t)]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Segue-se que o termo de primeiro grau em (2.3) gera componentes de primeira, segunda e terceira ordens. Desde que a multiplicação de $x(t)$ por A resulta na multiplicação do produto $y_j(t)y_k(t)$ por A^{j+k} , a ordem de $y_j(t)y_k(t)$ é $(j+k)$. Consequentemente, o termo de segundo grau em (2.3) gera componentes de segunda até sexta ordem. O ponto importante é que um termo de grau i de uma série de potência pode gerar componentes de ordem maior ou igual a i . Essa propriedade será bastante útil na determinação das funções de transferência não-lineares de um circuito.

2.2 Resposta do Sistema à Excitações Senoidais

Sinal de Entrada

Para estudar a resposta senoidal do sistema considerou-se a excitação, na entrada do modelo ilustrado na Figura 2.1, como sendo a soma de Q tons senoidais. Neste caso, a excitação pode ser representada como

$$x(t) = \sum_{q=1}^Q |E_q| \cos(2\pi f_q t + \theta_q) \quad (2.5)$$

onde, $x(t)$ é arbitrariamente escolhido como sendo um sinal de tensão. Para trabalhar com funções exponenciais introduziu-se a tensão complexa como sendo

$$E_q = |E_q| \exp(j\theta_q) \quad (2.6)$$

e define-se

$$E_{-q} = E_q^*, \quad E_0 = 0, \quad f_{-q} = -f_q. \quad (2.7)$$

Assim pode-se escrever $x(t)$ como

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2} \sum_{q=1}^Q [E_q \exp(j2\pi f_q t) + E_q^* \exp(-j2\pi f_q t)] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{q=-Q \\ q \neq 0}}^Q E_q \exp(j2\pi f_q t). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Sinal de Saída

Na aproximação utilizando o método das séries de Volterra a resposta do sistema não-linear é expressa como

$$y(t) = \sum_{i=1}^n y_i(t) \quad (2.9)$$

onde $y_i(t)$ é o componente de i -ésima ordem da resposta, que de acordo com WINER [2] e MAAS [3] é definido por

$$\begin{aligned} y_i(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h_i(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i) \\ &\quad \cdot x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) \cdots x(t - \tau_i) d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_i. \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde a função multi-dimensional $h_i(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i)$ é conhecida como o Kernel de i -ésima ordem de Volterra ou resposta não-linear ao impulso de i -ésima ordem. Segue-se que a aproximação definida em (2.9) e (2.10) também foi utilizada por KUSUNOKI & KAWAKAMI [8], BAYTEKIN & MEYER [14] e AHMED et al. [13].

Substituindo a segunda equação de (2.8) em (2.10), obtém-se

$$\begin{aligned} y_i(t) &= \frac{1}{2^i} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h_i(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i) \\ &\quad \cdot \sum_{q_1=-Q}^Q E_{q_1} \exp[j2\pi f_{q_1}(t - \tau_1)] \sum_{q_2=-Q}^Q E_{q_2} \exp[j2\pi f_{q_2}(t - \tau_2)] \\ &\quad \cdots \sum_{q_i=-Q}^Q E_{q_i} \exp[j2\pi f_{q_i}(t - \tau_i)] d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_i. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Trocando a ordem dos somatórios e integrais em $y_i(t)$, tem-se

$$\begin{aligned}
 y_i(t) = & \frac{1}{2^i} \sum_{q_1=-Q}^Q \sum_{q_2=-Q}^Q \cdots \sum_{q_i=-Q}^Q E_{q_1} E_{q_2} \cdots E_{q_i} \exp[j2\pi(f_{q_1} + f_{q_2} + \cdots + f_{q_i})t] \\
 & \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h_i(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i) \\
 & \cdot \exp[-j2\pi(f_{q_1}\tau_1 + f_{q_2}\tau_2 + \cdots + f_{q_i}\tau_i)] d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_i.
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Onde, a função de transferência não-linear de i -ésima ordem é definida por

$$\begin{aligned}
 H_i(f_{q_1}, f_{q_2}, \dots, f_{q_i}) = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h_i(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i) \\
 & \cdot \exp[-j2\pi(f_{q_1}\tau_1 + f_{q_2}\tau_2 + \cdots + f_{q_i}\tau_i)] \\
 & \cdot d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_i.
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Substituindo (2.13) em (2.12), a resposta de i -ésima ordem pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 y_i(t) = & \frac{1}{2^i} \sum_{q_1=-Q}^Q \cdots \sum_{q_i=-Q}^Q E_{q_1} \cdots E_{q_i} H_i(f_{q_1}, \dots, f_{q_i}) \\
 & \cdot \exp[j2\pi(f_{q_1} + \cdots + f_{q_i})t].
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Considerando $i = 1$ em (2.13), a função de transferência de primeira ordem é definida por

$$H_1(f_1) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau_1) \exp[-j2\pi f_1 \tau_1] d\tau_1. \tag{2.15}$$

Nota-se que (2.15) é a transformada de Fourier da resposta ao impulso da porção linear do circuito. Portanto, $H_1(f_1)$ é uma função de transferência linear convencional. A função de transferência não-linear de i -ésima ordem, $H_i(f_1, f_2, \dots, f_i)$, pode ser interpretada como a transformada de Fourier de dimensão i de $h_i(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i)$. Esta função também pode ser determinada por meio da transformada de Laplace, como foi proposto por LI & PILEGGI [10]. Aplicando-se a transformada de Fourier inversa em $H_i(f_1, f_2, \dots, f_i)$ obtém-se $h_i(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i)$, de acordo com a seguinte equação

$$\begin{aligned}
 h_i(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i) = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} H_i(f_{q_1}, f_{q_2}, \dots, f_{q_i}) \\
 & \cdot \exp[j2\pi(f_{q_1}\tau_1 + f_{q_2}\tau_2 + \cdots + f_{q_i}\tau_i)] \\
 & \cdot df_1 df_2 \cdots df_i.
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Conceito de Simetria

Conforme já foi observado em (2.14), $H_i(f_{q_1}, \dots, f_{q_i})$ é a função de transferência não-linear que relaciona a saída na frequência $(f_{q_1} + \dots + f_{q_i})$ às entradas nas frequências $f_{q_1}, f_{q_2}, \dots, f_{q_i}$.

As funções de transferência não-lineares que diferem somente pela permutação de seus argumentos são iguais e podem ser consideradas funções simétricas de seus argumentos. Por exemplo, as funções de transferência não-lineares de terceira ordem satisfazem a seguinte relação

$$\begin{aligned} H_3(f_1, f_2, f_3) &= H_3(f_1, f_3, f_2) = H_3(f_2, f_1, f_3) \\ &= H_3(f_2, f_3, f_1) = H_3(f_3, f_1, f_2) = H_3(f_3, f_2, f_1). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Pode-se mostrar que as funções de transferência de sistemas reais são conjugadas quando os sinais de seus argumentos são trocados. Portanto

$$H_i(-f_1, \dots, -f_i) = H_i^*(f_1, \dots, f_i) \quad (2.18)$$

Por exemplo, devido a simetria das funções de transferência não-lineares, pode-se trocar a ordem dos índices q_1, \dots, q_i em (2.14) que não haverá alteração do termo geral

$$\frac{1}{2^i} E_{q_1} \dots E_{q_i} H_i(f_{q_1}, \dots, f_{q_i}) \exp[j2\pi(f_{q_1} + \dots + f_{q_i})t]. \quad (2.19)$$

2.3 Regra de Heterodinagem de Frequências

Os componentes de intermodulação gerados em um sistema fracamente não-linear são interessantes porque podem se localizar no interior da banda passante do sistema, mesmo quando as excitações na entrada estejam fora.

Aplicação dos Efeitos dos Produtos de Intermodulação em um Sistema Não-Linear

Considere um sistema sintonizado em 50MHz com 1MHz de largura de banda como ilustrado na Figura 2.2. Assume-se que a entrada consiste de dois tons senoidais em $f_1 = 46\text{MHz}$ e $f_2 = 48\text{MHz}$. Nota-se que os dois tons se localizam fora da banda passante. Se o sistema é não-linear, um componente de intermodulação em $2f_2 - f_1 = 50\text{MHz}$ pode ser gerado. Este componente está situado no centro da faixa de passagem e pode causar interferência significativa se sua amplitude for suficientemente grande em relação ao sinal desejado.

Conceito de Heterodinagem de Frequências

De acordo com (2.14) pode-se notar que mesmo para valores pequenos de Q e i um número grande de componentes de intermodulação podem ser gerados na saída de um sistema fracamente não-linear. Segue-se que os componentes com frequências localizadas fora da banda passante não são problemáticos, pois são atenuados pela seletividade de frequência deste sistema. Portanto, somente os componentes de intermodulação com frequências próximas ou dentro da banda passante precisam ser considerados. Isto pode simplificar a avaliação da resposta, pois os termos significativos são relativamente menores em número.

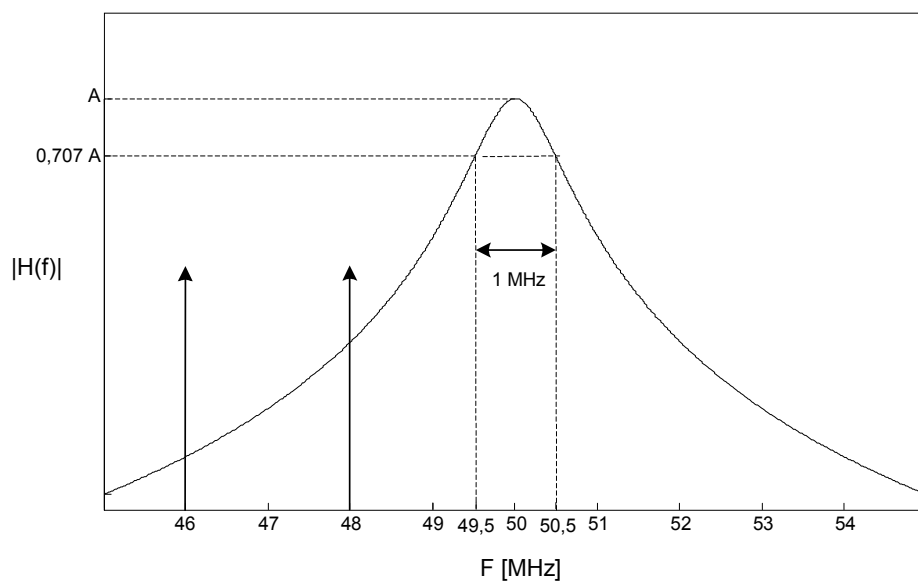


Figura 2.2: Função de Transferência Linear de um Sistema com Frequência Central em 50MHz.

Neste caso, o primeiro passo para avaliar (2.14) é determinar quais frequências de intermodulação são de interesse. Feito isto, o segundo passo é determinar a maneira pela qual tais frequências são geradas. Neste caso, introduz-se o conceito de heterodinagem de frequências.

Especificamente, considere na aplicação representada na Figura 2.2 que o sistema tenha componentes não-lineares até quinta ordem. Como os tons de entrada estão em $f_1 = 46\text{MHz}$ e $f_2 = 48\text{MHz}$, o componente de intermodulação em $2f_2 - f_1 = 50\text{MHz}$ é de total interesse, pois cai no centro da banda passante. Os termos em que a frequência de intermodulação é $2f_2 - f_1$ são produzidos por três heterodinagens de frequências distintas: $(f_2 + f_2 - f_1)$, $(f_2 + f_2 + f_2 - f_2 - f_1)$ e $(f_2 + f_2 + f_1 - f_1 - f_1)$.

Com referência a (2.14) observe que a heterodinagem $(f_2 + f_2 - f_1)$ ocorre para

os termos em que $i = 3$, enquanto $(f_2 + f_2 + f_2 - f_2 - f_1)$ e $(f_2 + f_2 + f_1 - f_1 - f_1)$ ocorrem em termos onde $i = 5$.

Vetor de Heterodinagem

Para representar analiticamente uma heterodinagem de frequências, denota-se o número de vezes em que uma frequência f_k aparece de m_k . No caso de frequências negativas, lembre-se que $f_{-k} = -f_k$. Portanto, para uma excitação consistindo de Q tons senoidais, como mostrado em (2.8), as frequências de entrada são $f_{-Q}, \dots, f_{-1}, f_1, \dots, f_Q$. Segue-se que qualquer heterodinagem pode ser representada pelo vetor

$$m = (m_{-Q}, \dots, m_{-1}, m_1, \dots, m_Q), \quad (2.20)$$

por exemplo, a heterodinagem $(f_2 + f_2 - f_1)$ é representada por $m = (0, 1, 0, 2)$, enquanto $m = (1, 1, 0, 3)$ e $m = (0, 2, 1, 2)$ representam, respectivamente, as heterodinagens $(f_2 + f_2 + f_2 - f_2 - f_1)$ e $(f_2 + f_2 + f_1 - f_1 - f_1)$.

Resposta Total de Um Sistema para uma Heterodinagem Particular

Para determinar a amplitude de um componente de intermodulação, de (2.9) e (2.14) a resposta total do sistema não-linear pode ser escrita como

$$y(t) = \sum_{i=1}^n y_i(t) \quad (2.21)$$

onde

$$y_i(t) = \frac{1}{2^i} \sum_{q_1=-Q}^Q \cdots \sum_{q_i=-Q}^Q E_{q_1} \cdots E_{q_i} H_i(f_{q_1}, \dots, f_{q_i}) \cdot \exp[j2\pi(f_{q_1} + \cdots + f_{q_i})t]. \quad (2.22)$$

Para a heterodinagem relacionada ao vetor m , a frequência de intermodulação correspondente pode ser expressa como

$$f_m = \sum_{\substack{k=-Q \\ k \neq 0}}^Q m_k f_k = m_{-Q} f_{-Q} + \dots + m_{-1} f_{-1} + m_1 f_1 + \dots + m_Q f_Q, \quad (2.23)$$

Desde que i frequências estão envolvidas em cada heterodinagem em $y_i(t)$, tem-se

$$\sum_{\substack{k=-Q \\ k \neq 0}}^Q m_k = m_{-Q} + \dots + m_{-1} + m_1 + \dots + m_Q = i. \quad (2.24)$$

O número de termos em (2.22) contribuindo para a mesma heterodinagem, representada pelo vetor m , é igual ao número de maneiras diferentes em que os i índices podem ser permutados tal que $-Q$ aparece m_{-Q} vezes, \dots , -1 aparece m_{-1} vezes, 1 aparece m_1 vezes, \dots , Q aparece m_Q . Este número é dado pelo coeficiente multi-nomial

$$(i; m) = \frac{i!}{(m_{-Q}!) \dots (m_{-1}!) (m_1!) \dots (m_Q!)} \quad (2.25)$$

Por exemplo, seja considerada a heterodinagem $(f_2 + f_2 - f_1)$, que corresponde a $i = 3$ e $m = (m_{-2}, m_{-1}, m_1, m_2) = (0, 1, 0, 2)$, usando (2.25) o número de termos em (2.22) contribuindo para esta heterodinagem é

$$(3; 0, 1, 0, 2) = \frac{3!}{(0!)(1!)(0!)(2!)} = 3. \quad (2.26)$$

Escrevendo as três possibilidades possíveis, tem-se

$$\begin{aligned} (f_2 + f_2 + f_{-1}) &= (f_2 + f_2 - f_1) = 2f_2 - f_1 \\ (f_2 + f_{-1} + f_2) &= (f_2 - f_1 + f_2) = 2f_2 - f_1 \\ (f_{-1} + f_2 + f_2) &= (-f_1 + f_2 + f_2) = 2f_2 - f_1 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Utilizando (2.14), cada uma das três seqüências resultam no mesmo termo

$$\frac{1}{8} E_1^* E_2^2 H_3(-f_1, f_2, f_2) \exp[j2\pi(2f_2 - f_1)t] \quad (2.28)$$

De acordo com (2.25) uma heterodinagem particular, representada pelo vetor m , inclui $(i; m)$ termos idênticos, chamando a soma desses termos de $y_i(t; m)$, tem-se

$$\begin{aligned} y_i(t; m) &= \frac{(i; m)}{2^i} (E_Q^*)^{m_{-Q}} \dots (E_1^*)^{m_{-1}} (E_1)^{m_1} \dots (E_Q)^{m_Q} \\ &\cdot H_i(\underbrace{f_{-Q}, \dots, f_{-Q}}_{m_{-Q}}, \dots, \underbrace{f_{-1}, \dots, f_{-1}}_{m_{-1}}, \underbrace{f_1, \dots, f_1}_{m_1}, \dots, \underbrace{f_Q, \dots, f_Q}_{m_Q}) \\ &\cdot \exp[j2\pi f_m t]. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Nota-se que (2.29) foi obtido usando (2.7) para expressar E_{-q} como E_q^* e (2.23) para definição de f_m . Com referência a (2.29), a forma exponencial do produto de intermodulação $(2f_2 - f_1)$, representado por $m = (0, 1, 0, 2)$, é dado por

$$y_3(t; 0, 1, 0, 2) = \frac{3}{8} E_1^* E_2^2 H_3(-f_1, f_2, f_2) \exp[j2\pi(2f_2 - f_1)t]. \quad (2.30)$$

Forma Senoidal do Componente de Intermodulação

O ponto de partida para determinar um produto de intermodulação na forma senoidal é observar que em (2.14) os termos resultantes existem em pares conjugados, pois cada termo está na forma exponencial. Denota-se m' o vetor de heterodinagem que resulta na frequência de intermodulação $-f_m$. Dado m , este vetor é obtido substituindo cada valor m_k por m_{-k} . Neste caso, dado $m = (m_{-Q}, \dots, m_{-1}, m_1, \dots, m_Q)$, segue-se que

$$m' = (m_Q, \dots, m_1, m_{-1}, \dots, m_{-Q}). \quad (2.31)$$

Como a ordem dos fatores é irrelevante em (2.25), tem-se

$$(i; m) = (i; m'). \quad (2.32)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} y_i(t; m') = & \frac{(i; m)}{2^i} (E_Q)^{m_{-Q}} \dots (E_1)^{m_{-1}} (E_1^*)^{m_1} \dots (E_Q^*)^{m_Q} \\ & \cdot H_i^* \left(\underbrace{f_{-Q}, \dots, f_{-Q}}_{m_{-Q}}, \dots, \underbrace{f_{-1}, \dots, f_{-1}}_{m_{-1}}, \underbrace{f_1, \dots, f_1}_{m_1}, \dots, \underbrace{f_Q, \dots, f_Q}_{m_Q} \right) \\ & \cdot \exp[-j2\pi f_m t]. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Nota-se que (2.33) e (2.29) são complexos conjugados e a soma destas duas equações é denotada por $\hat{y}_i(t; m)$. E ainda, expressando a função de transferência de i -ésima ordem na forma polar tem-se

$$H_i(f_1, \dots, f_i) = |H_i(f_1, \dots, f_i)| \exp[j\psi_i(f_1, \dots, f_i)]. \quad (2.34)$$

Lembrando-se que θ_q é a fase de E_q , segue-se que o componente de intermodulação

na forma senoidal gerado na saída do sistema não-linear é definido como

$$\begin{aligned}
\widehat{y}_i(t; m) &= y_i(t; m) + y_i(t; m') \\
&= y_i(t; m) + y_i^*(t; m) = 2\text{Re}\{y_i(t; m)\} \\
&= \frac{(i; m)}{2^{i-1}} |E_1|^{(m_1+m_{-1})} \dots |E_Q|^{(m_Q+m_{-Q})} |H_i(m)| \\
&\quad \cdot \cos[2\pi f_m t + \theta_m + \psi_i(m)]
\end{aligned} \tag{2.35}$$

onde

$$\begin{aligned}
H_i(m) &= |H_i(m)| \exp[j\psi_i(m)] \\
&= H_i(\underbrace{f_{-Q}, \dots, f_{-Q}}_{m_{-Q}}, \dots, \underbrace{f_{-1}, \dots, f_{-1}}_{m_{-1}}, \underbrace{f_1, \dots, f_1}_{m_1}, \dots, \underbrace{f_Q, \dots, f_Q}_{m_Q})
\end{aligned} \tag{2.36}$$

e

$$\begin{aligned}
\theta_m &= \sum_{\substack{k=-Q \\ k \neq 0}}^Q m_k \theta_k = m_{-Q} \theta_{-Q} + \dots + m_{-1} \theta_{-1} + m_1 \theta_1 + \dots + m_Q \theta_Q \\
&= (m_1 - m_{-1}) \theta_1 + \dots + (m_Q - m_{-Q}) \theta_Q.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Resposta do Sistema em uma Frequência de Intermodulação Particular

Conforme já foi comentado anteriormente, o segredo para a simplificação de $y(t)$ é analisar os componentes de intermodulação que se encontram somente nas frequências de interesse. Denota-se $y(t; f)$ a porção da resposta que se encontra na frequência f . Lembre-se que heterodinagens de frequências diferentes podem contribuir para a mesma frequência de intermodulação. Para se obter a resposta total na frequência f , é necessário combinar cada uma das diversas contribuições.

Considerando a aplicação discutida anteriormente, se um sistema fracamente não-linear é excitado por uma entrada de dois tons e na saída podem ser gerados produtos de intermodulação até quinta ordem, então a saída em $2f_2 - f_1$ é gerada pela soma das contribuições definidas pelas vetores: $m = (0, 1, 0, 2)$, $m = (1, 1, 0, 3)$ e $m = (0, 2, 1, 2)$. Utilizando (2.35), a resposta deste sistema na

freqüência $2f_2 - f_1$ é dada por

$$\begin{aligned}
y(t; 2f_2 - f_1) &= \widehat{y}_3(t; 0, 1, 0, 2) + \widehat{y}_5(t; 1, 1, 0, 3) + \widehat{y}_5(t; 0, 2, 1, 2) \\
&= 0,75|E_1||E_2|^2|H_3(-f_1, f_2, f_2)| \\
&\quad \cdot \cos[2\pi(2f_2 - f_1)t + 2\theta_2 - \theta_1 + \psi_3(-f_1, f_2, f_2)] \\
&\quad + 1,25|E_1||E_2|^4|H_5(-f_2, -f_1, f_2, f_2, f_2)| \\
&\quad \cdot \cos[2\pi(2f_2 - f_1)t + 2\theta_2 - \theta_1 + \psi_5(-f_2, -f_1, f_2, f_2, f_2)] \\
&\quad + 1,875|E_1|^3|E_2|^2|H_5(-f_1, -f_1, f_1, f_2, f_2)| \\
&\quad \cdot \cos[2\pi(2f_2 - f_1)t + 2\theta_2 - \theta_1 + \psi_5(-f_1, -f_1, f_1, f_2, f_2)].
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Como os argumentos das funções de transferência não-lineares de terceira e quinta ordem em (2.38) são diferentes, os ângulos $\psi_3(-f_1, f_2, f_2)$, $\psi_5(-f_2, -f_1, f_2, f_2, f_2)$ e $\psi_5(-f_1, -f_1, f_1, f_2, f_2)$ não são iguais.

2.4 Potência dos Produtos de Intermodulação

A saída de um sistema não-linear é expressa freqüentemente em função de potência. De (2.35) a amplitude em módulo da resposta senoidal correspondente ao vetor m é definida como

$$|E_m| = \frac{(i; m)}{2^{i-1}} |E_1|^{(m_1+m_{-1})} \dots |E_Q|^{(m_Q+m_{-Q})} |H_i(m)| \tag{2.39}$$

onde $H_i(m)$ é dado por (2.36). A potência média dissipada em uma carga, com condutância $G_L(f)$, por um componente de intermodulação com amplitude dada por (2.35) é definida por

$$\begin{aligned}
p_L(f_m) &= \frac{1}{2} |E_m|^2 G_L(f_m) \\
&= \frac{(i; m)^2}{2^{2i-1}} [|E_1|^2]^{(m_1+m_{-1})} \dots [|E_Q|^2]^{(m_Q+m_{-Q})} |H_i(m)|^2 G_L(f_m).
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Se a condutância de entrada do sistema não-linear é $G_{in}(f)$, a potência média do tom de entrada na freqüência f_q é

$$p_S(f_q) = \frac{1}{2} |E_q|^2 G_{in}(f_q) \tag{2.41}$$

isolando $|E_q|^2$ em (2.41), obtém-se

$$|E_q|^2 = \frac{2p_S(f_q)}{G_{in}(f_q)}. \quad (2.42)$$

Substituindo (2.42) em (2.40) e usando (2.24), tem-se

$$p_L(f_m) = [p_S(f_1)]^{(m_1+m_{-1})} \dots [p_S(f_Q)]^{(m_Q+m_{-Q})} c(m) \quad (2.43)$$

onde

$$c(m) = \frac{(i; m)^2}{2^{i-1}} \frac{|H_i(m)|^2 G_L(f_m)}{[G_{in}(f_1)]^{(m_1+m_{-1})} \dots [G_{in}(f_Q)]^{(m_Q+m_{-Q})}}. \quad (2.44)$$

Capítulo 3

Modelo Não-linear Equivalente para Transistor BJT

O modelo não-linear equivalente para o transistor de junção bipolar está ilustrado na Figura 3.1. Este circuito não-linear também é conhecido como modelo T e é usado para realizar a análise dos efeitos não-lineares de um sistema fracamente não-linear. Como sugerido por WIENER [2], ao desenvolver esse modelo realizou-se a distinção entre variáveis totais, dc e incrementais. Por exemplo, a corrente total que circula na junção base-emissor do circuito representado na Figura 3.1 é composta pela soma entre sua parcela dc e incremental, como segue

$$i_{JE} = I_{JE} + i_{je} \quad (3.1)$$

onde i_{JE} , I_{JE} e i_{je} , representam o valor total, dc e incremental, respectivamente, da corrente na junção base-emissor.

Para caracterizar o comportamento não-linear dos elementos inerentes ao modelo T foram realizadas expansões em séries de Taylor. As deduções analíticas destas equações foram baseadas no trabalho de GRAHAM & EHRMAN [1] e no livro de WEINER [2], sendo detalhadas no Anexo A. Cabe destacar que estas deduções não foram realizadas pelo autor, porém achou-se conveniente realizar essa síntese teórica para quem quiser compreender melhor como são originadas as equações matemáticas que representam as não-linearidades dos dispositivos em estado sólido.

Os nove elementos inerentes ao modelo T estão definidos a seguir.

Resistência de Espalhamento da Base: R_B

Resistência de Coletor: R_C

Capacitância Entre os Terminais de Base e Emissor: C_1

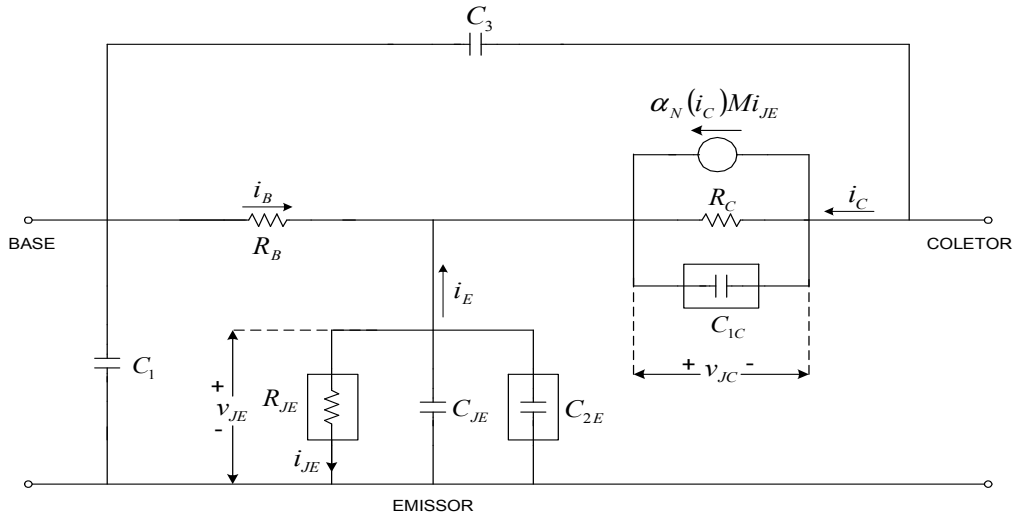


Figura 3.1: Modelo T para o transistor de junção bipolar.

Capacitância Entre os Terminais de Base e Coletor: C_3

Capacitância de Transição da Junção Base-Emissor: C_{JE}

Resistência Não-Linear da Junção Base-Emissor: R_{JE}

Capacitância Não-Linear de Difusão da Junção Base-Emissor: C_{2E}

Capacitância Não-Linear de Transição da Junção Base-Coletor: C_{1C}

Fonte de Corrente Não-Linear de Coletor: $\alpha_N(i_C)Mi_{JE}$

3.1 Circuito Não-Linear Incremental para o Transistor BJT

Dado o modelo T, representado na Figura 3.1, pode-se realizar a implementação do circuito não-linear incremental equivalente. Neste modelo existem cinco não-linearidades que foram caracterizadas através de expansões em séries de Taylor, conforme está descrito a seguir.

3.1.1 Não-Linearidade Resistiva da Junção Base-Emissor

A relação não-linear entre os valores incrementais da tensão desenvolvida no resistor R_{JE} e da corrente que circula pelo mesmo pode ser representada pela expansão

em séries de Taylor, definida como

$$i_{je} = \sum_{z=1}^{\infty} k_z v_{je}^z \quad (3.2)$$

onde, o z -ésimo coeficiente de (3.2) é dado por

$$k_z = \frac{1}{z!} \left[\frac{1}{r_e |I_E|} \right]^z |I_E| \quad (3.3)$$

e ainda, r_e é a resistência linear incremental do emissor, que é definida como

$$r_e = \frac{1}{k_1} = \frac{nkT}{q |I_E|}. \quad (3.4)$$

segue-se que os parâmetros relacionados em (3.4) são denotados por

q	carga elétrica = $1,6 \times 10^{-19} C$;
k	constante de Boltzmann = $1,38 \times 10^{-23} J/K$;
T	temperatura absoluta da junção em graus Kelvin;
n	fator de compensação;
I_E	valor dc da corrente de emissor.

3.1.2 Não-Linearidade da Capacitância de Difusão

O comportamento não-linear da capacitância C_{2E} pode ser representado através da relação entre a corrente incremental que circula por este capacitor e o valor incremental da tensão desenvolvida, definida como

$$i_{c2} = \sum_{z=0}^{\infty} \gamma_{e(z+1)} \frac{d}{dt} \{v_{je}^{z+1}\}. \quad (3.5)$$

A título de notação, o z -ésimo coeficiente de (3.5) foi denotado por

$$\gamma_{e(z+1)} = \frac{c_{2z}}{z+1}. \quad (3.6)$$

e ainda

$$c_{2z} = C_d k_z. \quad (3.7)$$

Segue-se que (3.7) é válida somente para valores de z maiores que zero e a capacitância linear incremental é dada por

$$c_{20} = C_d |I_E|. \quad (3.8)$$

Onde C_d é definido como a constante de capacitância de difusão.

3.1.3 Não-Linearidade da Capacitância de Transição da Junção Base-Coletor

A corrente não-linear incremental que circula por C_{1C} pode ser caracterizada em séries de Taylor como segue

$$i_{c1} = \sum_{z=0}^{\infty} \gamma_{c(z+1)} \frac{d}{dt} \{v_{jc}^{z+1}\}. \quad (3.9)$$

Da mesma forma que em (3.6), o z -ésimo coeficiente de (3.9) foi denotado por

$$\gamma_{c(z+1)} = \frac{c_{1z}}{z+1} \quad (3.10)$$

onde

$$c_{1z} = \frac{(\mu + z - 1)}{z(\phi - V_{JC})} c_{1(z-1)}. \quad (3.11)$$

De forma similar a (3.7), os coeficientes definidos em (3.11) são válidos para valores de z maiores que zero e c_{10} é definida como capacitância linear incremental, sendo representada por

$$c_{10} = \frac{C_C(0)}{\left(1 - \frac{V_{JC}}{\phi}\right)^\mu}. \quad (3.12)$$

Os parâmetros relacionados em (3.11) e (3.12) são denotados como

- ϕ potencial de contato da junção base-coletor;
- μ constante de grade da junção base-coletor;
- $C_C(0)$ capacitância de transição da junção base-coletor para $V_{CB} = 0$;
- V_{JC} valor dc da tensão na junção base-coletor.

3.1.4 Não-Linearidade da Fonte de Corrente de Coletor

As características não-lineares da fonte de corrente de coletor podem ser representadas pela seguinte relação

$$i_c = \sum_{\rho=1}^{\infty} q_{\rho}(v_{cb}, v_{je}). \quad (3.13)$$

Expandindo (3.13) até o termo de terceiro grau, obtém-se

$$i_c = q_1(v_{cb}, v_{je}) + q_2(v_{cb}, v_{je}) + q_3(v_{cb}, v_{je}) + \dots \quad (3.14)$$

Os termos de primeiro, segundo e terceiro graus em (3.14) são dados por

$$\begin{aligned} q_1(v_{cb}, v_{je}) &= \alpha_1 I_{JE} m_1 v_{cb} + \alpha_1 m_0 k_1 v_{je}, \\ q_2(v_{cb}, v_{je}) &= (\alpha_1 I_{JE} m_2 + \alpha_2 I_{JE}^2 m_1^2) v_{cb}^2 \\ &\quad + (\alpha_1 m_1 k_1 + 2\alpha_2 I_{JE} m_0 m_1 k_1) v_{cb} v_{je} \\ &\quad + (\alpha_1 m_0 k_2 + \alpha_2 m_0^2 k_1^2) v_{je}^2, \\ q_3(v_{cb}, v_{je}) &= (\alpha_1 I_{JE} m_3 + 2\alpha_2 I_{JE}^2 m_1 m_2 + \alpha_3 I_{JE}^3 m_1^3) v_{cb}^3 \\ &\quad + (\alpha_1 m_2 k_1 + 2\alpha_2 I_{JE} m_0 m_2 k_1 + 2\alpha_2 I_{JE} m_1^2 k_1) v_{cb}^2 v_{je} \\ &\quad + (\alpha_1 m_1 k_2 + 2\alpha_2 I_{JE} m_0 m_1 k_2 + 2\alpha_2 m_0 m_1 k_1^2) v_{cb} v_{je}^2 \\ &\quad + (\alpha_1 m_0 k_3 + 2\alpha_2 m_0^2 k_1 k_2 + \alpha_3 m_0^3 k_1^3) v_{je}^3. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Os coeficientes α_1 , α_2 e α_3 que aparecem nas expansões em (3.15) são definidos, respectivamente, como

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{f_1}, \\ \alpha_2 &= -\frac{f_2}{f_1^3}, \\ \alpha_3 &= \frac{2f_2^2 - f_1 f_3}{f_1^5}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Onde

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \frac{1}{h_{FE_{max}}} \left[1 + h_{FE_{max}} + a \log_{10}^2 \left(\frac{I_C}{I_{C_{max}}} \right) + 2a \log_{10} \left(\frac{I_C}{I_{C_{max}}} \right) \log_{10}(e) \right], \\
 f_2 &= \frac{a \log_{10}(e)}{h_{FE_{max}} I_C} \left[\log_{10} \left(\frac{I_C}{I_{C_{max}}} \right) + \log_{10}(e) \right], \\
 f_3 &= \frac{a \log_{10}(e)}{3h_{FE_{max}} I_C^2} \log_{10} \left(\frac{I_C}{I_{C_{max}}} \right). \tag{3.17}
 \end{aligned}$$

Os coeficientes m_0 , m_1 , m_2 e m_3 são dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned}
 m_0 &= \left[1 - \left(\frac{V_{CB}}{V_{CBO}} \right)^\eta \right]^{-1} \\
 m_1 &= \frac{\eta}{V_{CBO}^\eta} m_0^2 V_{CB}^{\eta-1}, \\
 m_2 &= \frac{m_1^2}{m_0} + \frac{(\eta-1)m_1}{2V_{CB}}, \\
 m_3 &= \frac{2}{3} m_2 \left[\frac{2m_1}{m_0} + \frac{\eta-1}{2V_{CB}} \right] - \frac{m_1}{3} \left[\frac{m_1^2}{m_0^2} + \frac{(\eta-1)}{2V_{CB}^2} \right]. \tag{3.18}
 \end{aligned}$$

Já os coeficientes k_1 , k_2 e k_3 são obtidos de (3.3), para $z = 1$, $z = 2$ e $z = 3$, respectivamente. Finalmente, a corrente de valor dc que circula pela junção base-emissor é definida por

$$I_{JE} = f_0/m_0 \tag{3.19}$$

onde

$$f_0 = I_C \left[\frac{1 + h_{FE_{max}} + a \log_{10}^2 \left(\frac{I_C}{I_{C_{max}}} \right)}{h_{FE_{max}}} \right]. \tag{3.20}$$

A título de simplificação denotou-se

$$\begin{aligned}
 g_y &= \alpha_1 I_{JE} m_1 \\
 g_x &= \alpha_1 m_0 k_1 \\
 g_{yy} &= \alpha_1 I_{JE} m_2 + \alpha_2 I_{JE}^2 m_1^2 \\
 g_{xy} &= \alpha_1 m_1 k_1 + 2\alpha_2 I_{JE} m_0 m_1 k_1 \\
 g_{xx} &= \alpha_1 m_0 k_2 + \alpha_2 m_0^2 k_1^2 \\
 g_{yyy} &= \alpha_1 I_{JE} m_3 + 2\alpha_2 I_{JE}^2 m_1 m_2 + \alpha_3 I_{JE}^3 m_1^3 \\
 g_{xyy} &= \alpha_1 m_2 k_1 + 2\alpha_2 I_{JE} m_0 m_2 k_1 + 2\alpha_2 I_{JE} m_1^2 k_1 \\
 g_{xxy} &= \alpha_1 m_1 k_2 + 2\alpha_2 I_{JE} m_0 m_1 k_2 + 2\alpha_2 m_0 m_1 k_1^2 \\
 g_{xxx} &= \alpha_1 m_0 k_3 + 2\alpha_2 m_0^2 k_1 k_2 + \alpha_3 m_0^3 k_1^3.
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Substituindo (3.21) em (3.15), obtém-se

$$\begin{aligned}
 q_1(v_{cb}, v_{je}) &= g_y v_{cb} + g_x v_{je} \\
 q_2(v_{cb}, v_{je}) &= g_{yy} v_{cb}^2 + g_{xy} v_{cb} v_{je} + g_{xx} v_{je}^2 \\
 q_3(v_{cb}, v_{je}) &= g_{yyy} v_{cb}^3 + g_{xyy} v_{cb}^2 v_{je} + g_{xxy} v_{cb} v_{je}^2 + g_{xxx} v_{je}^3.
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

O circuito não-linear incremental equivalente para o transistor BJT é derivado diretamente do modelo T ilustrado na Figura 3.1 e das expansões em séries de Taylor. O modelo T não-linear incremental equivalente está ilustrado na Figura 3.2. Os outros parâmetros desse modelo, utilizados nas equações (3.17) a (3.20), são definidos como

- V_{CBO} tensão de breakdown entre base e coletor;
- η expoente do fator de multiplicação de avalanche;
- $h_{FE_{max}}$ valor máximo do ganho de corrente dc;
- $I_{C_{max}}$ valor máximo da corrente dc de coletor;
- I_C valor dc da corrente de coletor;
- V_{CB} valor dc da tensão entre base e coletor;
- a constante.

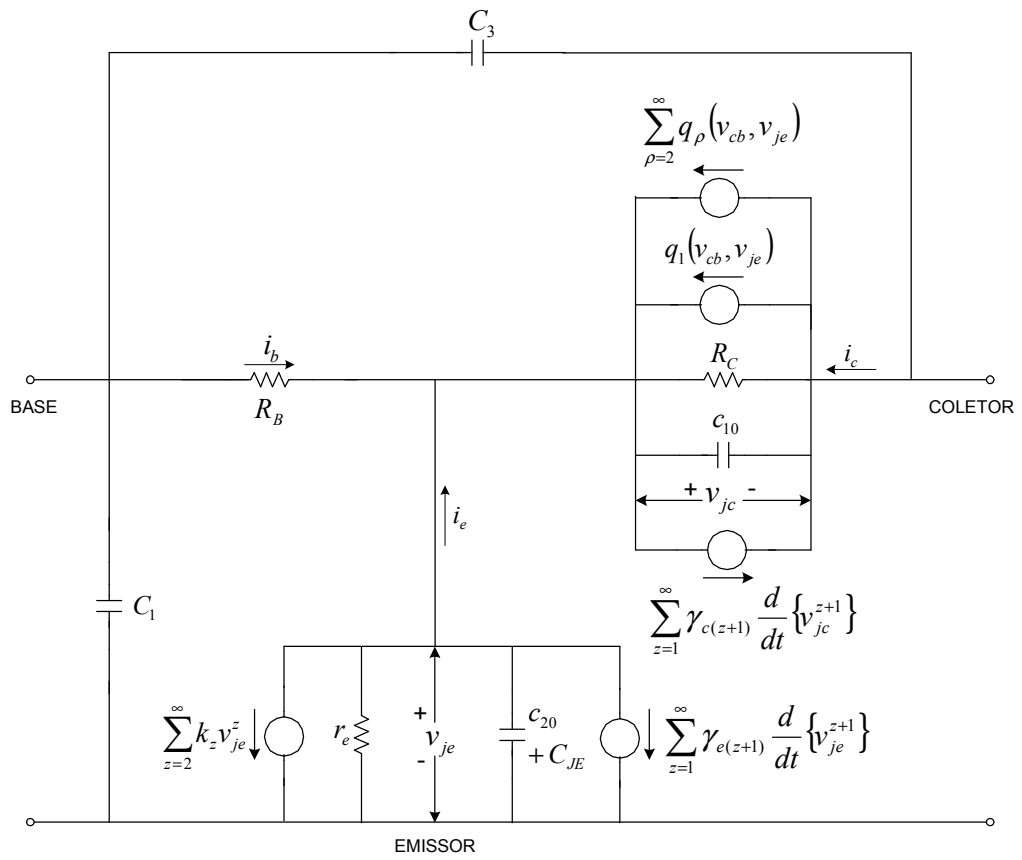


Figura 3.2: Modelo T não-linear incremental para o transistor de junção bipolar.

Capítulo 4

Análise de um Amplificador de RF Utilizando as Séries de Volterra

No intuito de ilustrar a aplicação das séries de Volterra, foi realizado neste capítulo a análise de um amplificador emissor-comum, utilizando o transistor 2N2950. NARAYANAN [4] efetuou a análise de um circuito similar, porém a modelagem matemática deste circuito não foi apresentada e verificou-se que alguns resultados analíticos obtidos por NARAYANAN [4] estavam incorretos.

4.1 Coeficientes das Séries de Taylor Relacionadas às Não-Linearidades Caracterizadas no Modelo T

Antes de entrar especificamente na análise do circuito deve-se determinar os parâmetros práticos extraídos do transistor 2N2950. Conforme citado no Anexo A, esses parâmetros podem ser determinados através de medidas em laboratório ou encontrados em manuais e estão especificados na tabela 4.1. Os valores dos parâmetros apresentados nesta tabela foram baseados no trabalho de GRAHAM & EHRMAN [1], que os especificou a uma temperatura ambiente de 25°C e em torno do ponto de operação dado por $V_C = 10$ V, $I_C = 10$ mA. Nesta Tabela também se encontra o valor da capacitância verificada entre os terminais de coletor e emissor do transistor 2N2950. Essa capacitância é denominada de case-stud

Tabela 4.1: Parâmetros do Transistor 2N2950.

Descrição	Valor
R_B	10,1 Ω
R_C	635 k Ω
C_1	valor desprezível
C_3	1,5 pF
C_{GC}	4,0 pF
C_{JE}	330 pF
C_d	60 pF/mA
n	1,03
$C_C(0)$	34,4 pF
ϕ	0,4 V
μ	0,348
h_{FEmax}	8,2
I_{Cmax}	150 mA
a	0,125
V_{CBO}	140 V
η	4,6

e denotada por C_{GC} .

Com referência a Tabela 4.1 determinou-se os valores dos coeficientes das séries de Taylor relacionadas às não-linearidades caracterizadas no modelo T. A

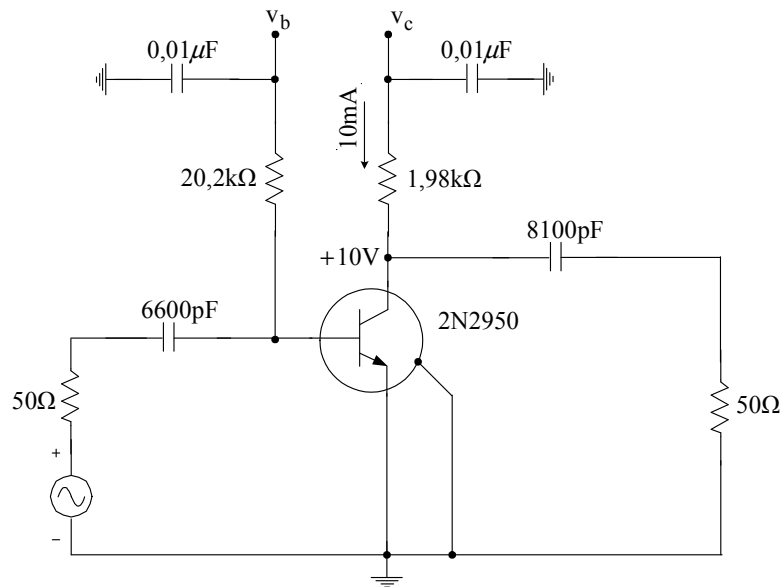


Figura 4.1: Circuito do amplificador emissor-comum [1].

Figura 4.1 ilustra o circuito do amplificador emissor comum, que será analisado com o método de Volterra.

O objetivo agora é modelar matematicamente este circuito, tomando como

base a concepção teórica desenvolvida nos capítulos anteriores. Posteriormente, pretende-se comparar os resultados teóricos com valores experimentais publicados por GRAHAM & EHRMAN [1]. O Modelo do circuito incremental para o amplificador está ilustrado na Figura 4.2. Calculando a impedância e a fonte

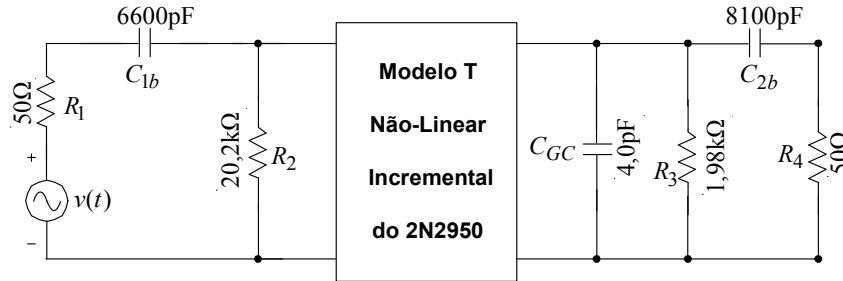


Figura 4.2: Modelo do circuito incremental para o amplificador.

equivalente de Thevenin vistas pelo modelo T, obtém-se

$$Z_S(j\omega) = \frac{R_2 + j\omega C_{1b}R_1R_2}{j\omega C_{1b}(R_1 + R_2) + 1}$$

$$v_S(t) = \frac{j\omega C_{1b}R_2}{j\omega C_{1b}(R_1 + R_2) + 1}v(t). \quad (4.1)$$

Determinando em seguida a impedância equivalente de carga, vista pelo modelo T, resulta em

$$Z_L(j\omega) = \frac{R_3(1 + j\omega C_{2b}R_4)}{(j\omega)^2 C_{GC}C_{2b}R_4R_3 + j\omega(C_{2b}R_4 + C_{2b}R_3 + C_{GC}R_3) + 1}. \quad (4.2)$$

O modelo do circuito incremental com as impedâncias e a fonte equivalente está representado na Figura 4.3. Nota-se que o bloco da Figura 4.3, que representa o

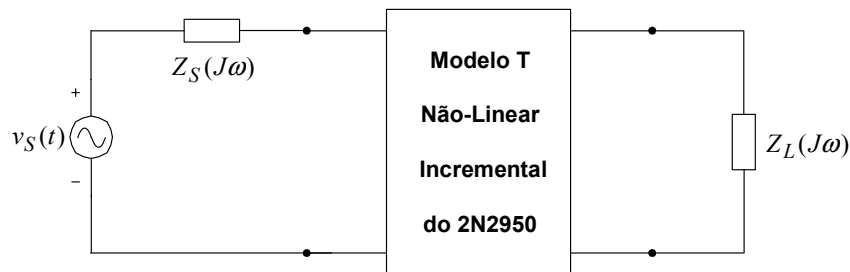


Figura 4.3: Modelo do circuito incremental com as impedâncias e a fonte equivalente.

modelo T não-linear incremental do transistor, foi apresentado na Figura 3.2.

Substituindo o bloco da Figura 4.3 pelo modelo representado na Figura 3.2, obtém-se o circuito não-linear incremental equivalente do amplificador emissor comum. Esse circuito está ilustrado na Figura 4.4. Cabe destacar que neste circuito as tensões referentes aos nós **a**, **b** e **c** são denotadas por $a(t)$, $b(t)$ e $c(t)$, respectivamente.

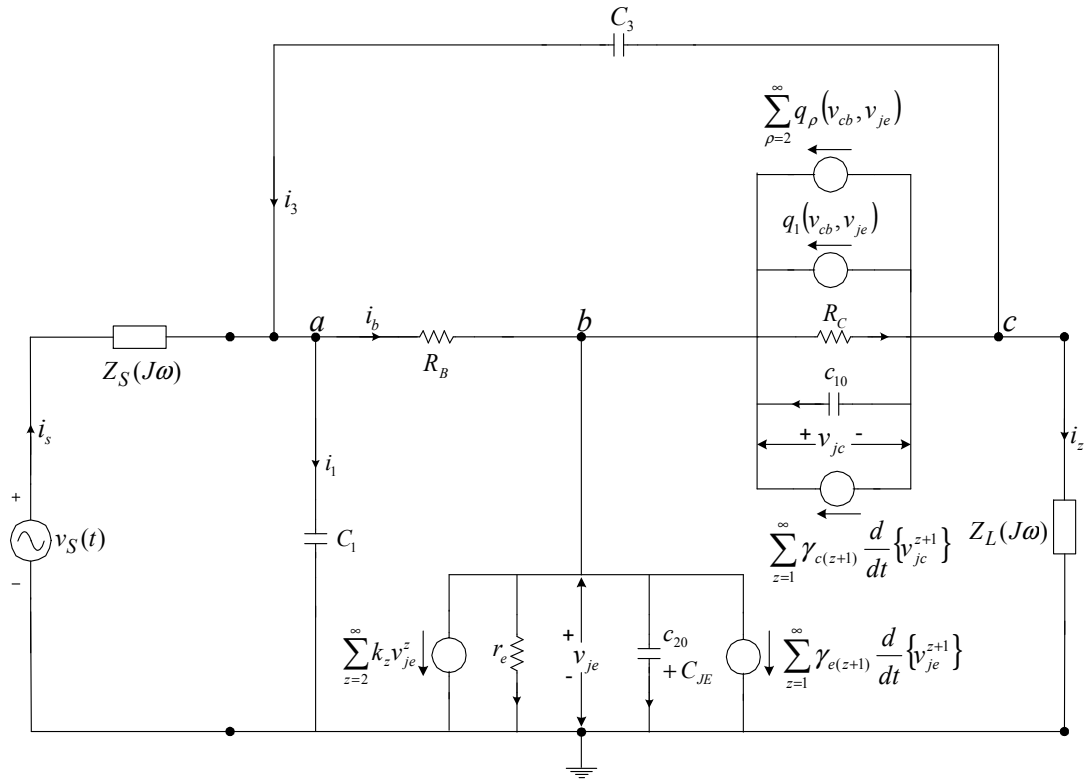


Figura 4.4: Modelo do circuito não-linear incremental equivalente do amplificador emissor comum.

4.1.1 Coeficientes da Não-Linearidade Resistiva da Junção Base-Emissor

Segue-se de (3.2) que a corrente incremental na junção base-emissor pode ser expressa como

$$i_{je} = \sum_{z=1}^{\infty} k_z b^z(t) = k_1 b(t) + k_2 b^2(t) + k_3 b^3(t) + \dots \quad (4.3)$$

De (3.3), os três primeiros coeficientes em (4.3) são dados por

$$k_1 = \frac{1}{r_e}, \quad k_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r_e^2} \cdot \frac{1}{|I_e|}, \quad k_3 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{r_e^3} \cdot \frac{1}{|I_e|^2}. \quad (4.4)$$

De (3.4), tem-se que

$$r_e = \frac{nkT}{q |I_E|}. \quad (4.5)$$

4.1.2 Coeficientes da Não-Linearidade da Fonte de Corrente de Coletor

De (3.13) tem-se,

$$\begin{aligned} i_c &= \sum_{\rho=1}^{\infty} q_{\rho}[c(t) - a(t), b(t)] \\ &= q_1[c(t) - a(t), b(t)] + q_2[c(t) - a(t), b(t)] + q_3[c(t) - a(t), b(t)] + \dots \end{aligned} \quad (4.6)$$

de (3.22), os três primeiros termos em (4.6) são dados por

$$\begin{aligned} q_1[c(t) - a(t), b(t)] &= g_y[c(t) - a(t)] + g_x b(t); \\ q_2[c(t) - a(t), b(t)] &= g_{yy}[c(t) - a(t)]^2 + g_{xy}[c(t) - a(t)]b(t) + g_{xx}b^2(t); \\ q_3[c(t) - a(t), b(t)] &= g_{yyy}[c(t) - a(t)]^3 + g_{xyy}[c(t) - a(t)]^2 b(t) \\ &\quad + g_{xxy}[c(t) - a(t)]b^2(t) + g_{xxx}b^3(t). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Onde os coeficientes envolvendo os termos de primeira, segunda e terceira ordens em (4.7), foram definidos em (3.21).

4.1.3 Coeficientes da Não-Linearidade da Capacitância de Transição

Com referência a (3.9), a outra fonte de corrente não-linear incremental no circuito de coletor é dada por

$$\begin{aligned} i_{c1} = \sum_{z=0}^{\infty} \gamma_{c(z+1)} \frac{d}{dt} [c(t) - b(t)]^{z+1} &= \gamma_{c1} \frac{d}{dt} [c(t) - b(t)] + \gamma_{c2} \frac{d}{dt} [c(t) - b(t)]^2 \\ &\quad + \gamma_{c3} \frac{d}{dt} [c(t) - b(t)]^3 + \dots \end{aligned} \quad (4.8)$$

de (3.10) e (3.12) o primeiro coeficiente, que é a capacitância linear incremental, é dado por

$$\gamma_{c1} = c_{10} = \frac{C_C(0)}{\left(1 - \frac{V_{JC}}{\phi}\right)^\mu}. \quad (4.9)$$

Como a queda de tensão dc sobre R_B é desprezível, pode-se dizer que

$$V_{CB} \approx -V_{JC}. \quad (4.10)$$

Substituindo (4.10) em (4.9), resulta em

$$\gamma_{c1} = c_{10} = \frac{C_C(0)}{\left(1 + \frac{V_{CB}}{\phi}\right)^\mu}. \quad (4.11)$$

De acordo com (3.11) e (4.10), o segundo e o terceiro coeficientes da expansão em (4.8) são dados por

$$\begin{aligned} \gamma_{c2} &= \frac{1}{2} \frac{\mu}{(\phi + V_{CB})} \gamma_{c1} \\ \gamma_{c3} &= \frac{1}{3} \frac{(\mu + 1)}{(\phi + V_{CB})} \gamma_{c2}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

4.1.4 Coeficientes da Não-Linearidade da Capacitância de Difusão

De (3.5) a corrente incremental através da capacitância não-linear de difusão é dada por

$$\begin{aligned} i_{c2} = \sum_{z=0}^{\infty} \gamma_{e(z+1)} \frac{d}{dt} [b(t)]^{z+1} &= \gamma_{e1} \frac{d}{dt} b(t) + \gamma_{e2} \frac{d}{dt} b^2(t) \\ &+ \gamma_{e3} \frac{d}{dt} b^3(t) + \dots \end{aligned} \quad (4.13)$$

com referência a (3.6), (3.7) e (3.8), os três primeiros coeficientes de (4.13) são dados por

$$\begin{aligned}\gamma_{e1} &= c_{20} = C_d |I_E| \\ \gamma_{e2} &= \frac{1}{2} C_d k_1 \\ \gamma_{e3} &= \frac{1}{3} C_d k_2.\end{aligned}\tag{4.14}$$

Da Figura 3.2, nota-se que a capacitância linear equivalente na junção base-emissor é dada pela soma de c_{20} e C_{JE} . O resultado dessa soma é denotado de c_2 , portanto

$$\begin{aligned}c_2 &= C_{JE} + c_{20} \\ &= C_{JE} + \gamma_{e1} \\ &= C_{JE} + C_d |I_E|.\end{aligned}\tag{4.15}$$

4.2 Solução do Circuito Não-Linear Incremental Empregando as Séries de Volterra

Aplicando a lei de Kirchhoff para correntes aos nós **a**, **b**, e **c** do circuito ilustrado na Figura 4.4, resulta em

$$i_s(t) + i_3(t) = i_b(t);$$

$$\begin{aligned}i_b(t) &= k_1 b(t) + \sum_{z=2}^3 k_z b^z(t) + c_2 \frac{d}{dt} b(t) + \sum_{z=1}^2 \gamma_{e(z+1)} \frac{d}{dt} [b(t)]^{z+1} \\ &+ \frac{1}{R_C} [b(t) - c(t)] - c_{10} \frac{d}{dt} [c(t) - b(t)] - \sum_{z=1}^2 \gamma_{c(z+1)} \frac{d}{dt} [c(t) - b(t)]^{z+1} \\ &- q_1 [c(t) - a(t), b(t)] - \sum_{\rho=2}^3 q_\rho [c(t) - a(t), b(t)];\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -c_{10} \frac{d}{dt} [c(t) - b(t)] - \sum_{z=1}^2 \gamma_{c(z+1)} \frac{d}{dt} [c(t) - b(t)]^{z+1} + \frac{1}{R_C} [b(t) - c(t)] \\
 & - q_1 [c(t) - a(t), b(t)] - \sum_{\rho=2}^3 q_\rho [c(t) - a(t), b(t)] = i_3(t) + i_z(t).
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Como a capacitância C_1 foi considerada desprezível no modelo para o transistor 2N2950, esta não aparece no equacionamento em (4.16). Introduzindo o operador diferencial, $p = d/dt$, em (4.16) e representando as correntes $i_s(t)$, $i_b(t)$, $i_z(t)$ e $i_3(t)$ em função das tensões de nó e da tensão da fonte de entrada, obtém-se

$$\frac{1}{Z_S(jw)} [v_S(t) - a(t)] + C_3 p [c(t) - a(t)] = \frac{1}{R_B} [a(t) - b(t)];$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{R_B} [a(t) - b(t)] &= k_1 b(t) + \sum_{z=2}^3 k_z b^z(t) + c_2 p b(t) + \sum_{z=1}^2 \gamma_{e(z+1)} p [b(t)]^{z+1} \\
 &+ \frac{1}{R_C} [b(t) - c(t)] - c_{10} p [c(t) - b(t)] - \sum_{z=1}^2 \gamma_{c(z+1)} p [c(t) - b(t)]^{z+1} \\
 &- g_x b(t) - g_y [c(t) - a(t)] - \sum_{\rho=2}^3 q_\rho [c(t) - a(t), b(t)]; \\
 &- c_{10} p [c(t) - b(t)] - \sum_{z=1}^2 \gamma_{c(z+1)} p [c(t) - b(t)]^{z+1} + \frac{1}{R_C} [b(t) - c(t)] \\
 &- g_x b(t) - g_y [c(t) - a(t)] - \sum_{\rho=2}^3 q_\rho [c(t) - a(t), b(t)] \\
 &= C_3 p [c(t) - a(t)] + \frac{1}{Z_L(jw)} c(t).
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Agrupando as equações em (4.17) tal que somente termos lineares relacionados com as tensões de nó apareçam no lado esquerdo da igualdade, tem-se

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{1}{Z_S(jw)} + \frac{1}{R_B} + pC_3 \right] a(t) - \frac{1}{R_B} b(t) - pC_3 c(t) = \frac{1}{Z_S(jw)} v_S(t); \\
 & \left[g_y - \frac{1}{R_B} \right] a(t) + \left[\frac{1}{R_B} + k_1 + pc_2 + \frac{1}{R_C} + pc_{10} - g_x \right] b(t) \\
 & + \left[-\frac{1}{R_C} - pc_{10} - g_y \right] c(t) = - \sum_{z=2}^3 k_z b^z(t) - \sum_{z=1}^2 \gamma_{e(z+1)} p [b(t)]^{z+1} \\
 & + \sum_{z=1}^2 \gamma_{c(z+1)} p [c(t) - b(t)]^{z+1} + \sum_{\rho=2}^3 q_\rho [c(t) - a(t), b(t)]; \\
 & \left[-g_y - pC_3 \right] a(t) + \left[-pc_{10} - \frac{1}{R_C} + g_x \right] b(t) + \left[pc_{10} + \frac{1}{R_C} + g_y + pC_3 \right. \\
 & \left. + \frac{1}{Z_L(jw)} \right] c(t) = - \sum_{z=1}^2 \gamma_{c(z+1)} p [c(t) - b(t)]^{z+1} - \sum_{\rho=2}^3 q_\rho [c(t) - a(t), b(t)].
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

As equações em (4.18) são simplificadas com a introdução da notação de matriz. Neste caso, define-se

- $[Y(\cdot)]$ matriz admitância $[3 \times 3]$ do circuito;
- $e(t)$ vetor de tensões $[3 \times 1]$, composto pelas tensões de nó;
- $i_g(t)$ vetor de fonte independente $[3 \times 1]$, composto por todas as fontes de excitação independentes;
- $j(t)$ vetor de corrente não-linear $[3 \times 1]$, composto de todos os termos de segunda e terceira ordens, resultantes das expansões em série de Taylor dos elementos não-lineares.

Com a introdução da notação de matriz em (4.18), obtém-se

$$[Y(\cdot)]e(t) = i_g(t) + j(t). \tag{4.19}$$

De acordo com as equações em (4.18), a matriz admitância é dada por

$$[Y(p)] = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{bmatrix}. \tag{4.20}$$

Neste caso os coeficientes de $[Y(p)]$ são definidos como

$$\begin{aligned}
 y_{11} &= \frac{1}{Z_S(jw)} + \frac{1}{R_B} + pC_3; \\
 y_{12} &= -\frac{1}{R_B}; \\
 y_{13} &= -pC_3; \\
 y_{21} &= g_y - \frac{1}{R_B}; \\
 y_{22} &= \frac{1}{R_B} + k_1 + p(c_{10} + c_2) + \frac{1}{R_C} - g_x; \\
 y_{23} &= -\frac{1}{R_C} - pc_{10} - g_y; \\
 y_{31} &= -g_y - pC_3; \\
 y_{32} &= -pc_{10} - \frac{1}{R_C} + g_x; \\
 y_{33} &= \frac{1}{R_C} + g_y + p(c_{10} + C_3) + \frac{1}{Z_L(jw)}.
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

E ainda,

$$e(t) = \begin{bmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{bmatrix}, \quad i_g(t) = \begin{bmatrix} \frac{v_s(t)}{Z_S(jw)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$j(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sum_{z=2}^3 k_z b^z(t) - \sum_{z=1}^2 \gamma_{e(z+1)} p [b(t)]^{z+1} + \sum_{z=1}^2 \gamma_{c(z+1)} p [c(t) - b(t)]^{z+1} \\ + \sum_{\rho=2}^3 q_\rho [c(t) - a(t), b(t)] \\ - \sum_{z=1}^2 \gamma_{c(z+1)} p [c(t) - b(t)]^{z+1} - \sum_{\rho=2}^3 q_\rho [c(t) - a(t), b(t)] \end{bmatrix}.$$

(4.22)

Método de Entradas Harmônicas

Ao utilizar o método de entradas harmônicas para determinar as funções de transferência de Volterra, as funções de ordem mais elevada são obtidas em termos das funções de ordem inferior. Por exemplo, a função de transferência não-linear de segunda ordem é obtida em termos das funções lineares ou de primeira ordem. A função de transferência não-linear de terceira ordem é determinada em função das funções de segunda e primeira ordens e assim por diante.

O circuito ilustrado na Figura 4.4 é primeiramente, excitado por uma exponencial complexa $\exp[j2\pi f_1 t]$, permitindo a determinação das funções de transferências lineares de Volterra. Em seguida, é aplicada a soma de duas exponenciais dadas por $\exp[j2\pi f_1 t] + \exp[j2\pi f_2 t]$, permitindo a determinação das funções de transferência não-lineares de segunda ordem em termos das funções de transferência lineares. O procedimento continua com mais uma exponencial sendo adicionada em cada etapa do processo.

4.2.1 Funções de Transferência Lineares

Conforme já foi comentado, as funções de transferência lineares são determinadas selecionando a tensão de entrada como sendo

$$v(t) = \exp[j2\pi f_1 t]. \quad (4.23)$$

Neste caso, o vetor de fonte independente é dado por

$$i_g(t) = \begin{bmatrix} \frac{j\omega C_{1b} R_2 \exp[j2\pi f_1 t]}{j\omega C_{1b} Z_S(j\omega)(R_1 + R_2) + Z_S(j\omega)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

Observe que (4.23) foi obtido de (2.8), fazendo $Q = 1$, $E_1 = 2$ e omitindo os termos com frequência negativa. Denotando-se as funções de transferência de i -ésima ordem relativa as tensões $a(t)$, $b(t)$ e $c(t)$ por $A_i(f_1, f_2, \dots, f_i)$, $B_i(f_1, f_2, \dots, f_i)$ e $C_i(f_1, f_2, \dots, f_i)$, segue-se de (2.14) e da entrada especificada em (4.23), que os componentes de i -ésima ordem relativos a estas tensões são expressos, respecti-

vamente, por

$$\begin{aligned} a_i(t) &= A_i(f_1, f_1, \dots, f_1) \exp[j2\pi(i f_1)t], \\ b_i(t) &= B_i(f_1, f_1, \dots, f_1) \exp[j2\pi(i f_1)t], \\ c_i(t) &= C_i(f_1, f_1, \dots, f_1) \exp[j2\pi(i f_1)t]. \end{aligned} \quad (4.25)$$

De (2.9) as tensões totais de nó para terra são dadas por

$$a(t) = \sum_{i=1}^n a_i(t), \quad b(t) = \sum_{i=1}^n b_i(t), \quad c(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t). \quad (4.26)$$

Onde os termos acima de ordem n são considerados desprezíveis. Nota-se que as frequências de saída em cada uma das tensões especificadas em (4.26), consistem da frequência fundamental e seus harmônicos.

Substituindo (4.20) e (4.22) em conjunto com (4.21), (4.25) e (4.26) em (4.19) e lembrando-se que o vetor de fonte independente é dado por (4.24), obtém-se

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} Y(p) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} A_1(f_1) \exp[j2\pi(f_1)t] + \dots \\ B_1(f_1) \exp[j2\pi(f_1)t] + \dots \\ C_1(f_1) \exp[j2\pi(f_1)t] + \dots \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} \frac{jwC_{1b}R_2 \exp[j2\pi f_1 t]}{jwC_{1b}Z_S(jw)(R_1 + R_2) + Z_S(jw)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

A aplicação do operador diferencial $p = d/dt$ a um termo do tipo $A \exp[j2\pi ft]$, resulta em

$$p\{A \exp[j2\pi ft]\} = j2\pi f A \exp[j2\pi ft]. \quad (4.28)$$

Conseqüentemente, quando a matriz admitância é multiplicada por um vetor onde os termos estão em função de $\exp[j2\pi ft]$, o efeito é trocar $[Y(p)]$ por $[Y(j2\pi f)]$.

Resolvendo as operações impostas pelo operador diferencial da matriz $[Y(p)]$ em (4.27), conforme foi mostrado em (4.28) e igualando-se os coeficientes de

$\exp[j2\pi f_1 t]$, obtém-se

$$\begin{bmatrix} Y(j2\pi f_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1(f_1) \\ B_1(f_1) \\ C_1(f_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{j2\pi f_1 C_{1b} R_2}{j2\pi f_1 C_{1b} Z_S(j2\pi f_1)(R_1 + R_2) + Z_S(j2\pi f_1)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.29)$$

Finalmente, invertendo-se a matriz admitância em (4.29), as funções de transferência lineares do circuito ilustrado na Figura 4.4 são definidas como

$$\begin{bmatrix} A_1(f_1) \\ B_1(f_1) \\ C_1(f_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y(j2\pi f_1) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{j2\pi f_1 C_{1b} R_2}{j2\pi f_1 C_{1b} Z_S(j2\pi f_1)(R_1 + R_2) + Z_S(j2\pi f_1)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

Ao igualar os coeficientes de $\exp[j2\pi f_1 t]$ nos dois lados da equação em (4.27), o resultado fica em função somente das funções de transferência lineares, conforme foi mostrado em (4.29), pois as funções de transferência de ordens mais elevadas são coeficientes dos harmônicos de $\exp[j2\pi f_1 t]$. Por exemplo, a função de transferência não-linear de segunda ordem, $A_2(f_1, f_1)$, é coeficiente de $\exp[j2\pi(2f_1)t]$ e portanto não aparece em (4.29).

Observe que o vetor que representa as correntes não-lineares, $j(t)$, não tem contribuição no cálculo das funções de transferência lineares, pois não possui o componente fundamental. Pode-se dizer que nesse caso, o vetor $j(t)$ possui somente os harmônicos deste componente.

4.2.2 Funções de Transferência Não-Lineares de Segunda Ordem

Para determinação das funções de transferência não-lineares de segunda ordem, a excitação do circuito é considerada como sendo

$$v(t) = \exp[j2\pi f_1 t] + \exp[j2\pi f_2 t]. \quad (4.31)$$

Observe que (4.31) foi obtida de (2.8) selecionando $Q = 2$, $E_1 = E_2 = 2$ e omitindo os termos com frequência negativa. Com referência a (2.14) os componentes de i -ésima ordem de $a(t)$, $b(t)$ e $c(t)$ são denotados por

$$\begin{aligned} a_i(t) &= \sum_{q_1=1}^2 \dots \sum_{q_i=1}^2 A_i(f_{q_1}, \dots, f_{q_i}) \exp[j2\pi(f_{q_1} + \dots + f_{q_i})t], \\ b_i(t) &= \sum_{q_1=1}^2 \dots \sum_{q_i=1}^2 B_i(f_{q_1}, \dots, f_{q_i}) \exp[j2\pi(f_{q_1} + \dots + f_{q_i})t], \\ c_i(t) &= \sum_{q_1=1}^2 \dots \sum_{q_i=1}^2 C_i(f_{q_1}, \dots, f_{q_i}) \exp[j2\pi(f_{q_1} + \dots + f_{q_i})t]. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Substituindo (4.20) e (4.22) em conjunto com (4.21), (4.32) e (4.26) em (4.19) e escrevendo o resultado de modo que somente os termos de segunda ordem fiquem explícitos, obtém-se

$$\begin{bmatrix} Y(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2(t) + \dots \\ b_2(t) + \dots \\ c_2(t) + \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -k_2 b_1^2(t) - \gamma_{e2} p b_1^2(t) + \gamma_{c2} p [c_1(t) - b_1(t)]^2 \\ + q_2 [c_1(t) - a_1(t), b_1(t)] \\ -\gamma_{c2} p [c_1(t) - b_1(t)]^2 - q_2 [c_1(t) - a_1(t), b_1(t)] \end{bmatrix}. \quad (4.33)$$

Nesse ponto da análise é importante lembrar que o conceito de ordem da resposta de um sistema não-linear foi caracterizado na Seção 2.1. As funções

de transferência não-lineares de segunda ordem são determinadas igualando os coeficientes de $\exp[j2\pi(f_1 + f_2)t]$ em ambos os lados da equação resultante em (4.33).

Como assumiu-se que as frequências f_1 e f_2 do sinal de entrada são positivas e possuem valores diferentes uma das outras, componentes de intermodulação em $f_1 + f_2$ podem ser gerados somente por termos de segunda ordem pertencentes ao vetor de correntes não-lineares $j(t)$ e ao vetor de tensões $e(t)$. De (4.33) pode-se observar que os termos pertencentes aos vetores $j(t)$ e $e(t)$ que não são de segunda ordem foram ignorados. Na avaliação das funções de transferência não-lineares de segunda ordem, o vetor $i_g(t)$ é desconsiderado, pois este não apresenta componentes de segunda ordem, isto é, seus componentes estão na frequência f_1 e f_2 e não em $f_1 + f_2$.

Desenvolvimento da Não-Linearidade Resistiva de Segunda Ordem da Junção Base-Emissor

Com relação a (4.33), o termo que expressa a não-linearidade resistiva da junção base-emissor é dado por

$$k_2 b_1^2(t). \tag{4.34}$$

De (4.32), tem-se

$$b_1(t) = \sum_{q_1=1}^2 B_1(f_{q_1}) \exp[j2\pi f_{q_1} t]. \tag{4.35}$$

Substituindo (4.35) em (4.34), obtém-se

$$\begin{aligned} & k_2 \left\{ \sum_{q_1=1}^2 B_1(f_{q_1}) \exp[j2\pi f_{q_1} t] \right\}^2 \\ &= k_2 \left\{ \sum_{q_1=1}^2 B_1(f_{q_1}) \exp[j2\pi f_{q_1} t] \right\} \left\{ \sum_{q_2=1}^2 B_1(f_{q_2}) \exp[j2\pi f_{q_2} t] \right\} \\ &= k_2 \sum_{q_1=1}^2 \sum_{q_2=1}^2 B_1(f_{q_1}) B_1(f_{q_2}) \exp[j2\pi(f_{q_1} + f_{q_2})t]. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Ao expandir o duplo somatório em (4.36), percebe-se que há dois termos idênticos envolvendo $\exp[j2\pi(f_{q_1} + f_{q_2})t]$. Esses termos são originados da permutação dos índices $q_1 = 1, q_2 = 2$ e $q_1 = 2, q_2 = 1$. Agrupando somente os termos originados na expansão do duplo somatório em (4.36) que possuem $\exp[j2\pi(f_1 + f_2)t]$, obtém-

se

$$\begin{aligned} & k_2 B_1(f_1) B_1(f_2) \exp[j2\pi(f_1 + f_2)t] + k_2 B_1(f_2) B_1(f_1) \exp[j2\pi(f_2 + f_1)t] \\ & = k_2 [B_1(f_1) B_1(f_2) + B_1(f_2) B_1(f_1)] \exp[j2\pi(f_1 + f_2)t]. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Notação em Barra

Nesse ponto da análise é interessante introduzir a notação em barra, para representar a permutação que ocorre entre os índices das frequências. Neste caso denota-se

$$\overline{B_1(f_1) B_1(f_2)} = B_1(f_1) B_1(f_2) + B_1(f_2) B_1(f_1). \quad (4.38)$$

Substituindo (4.38) em (4.37), resulta em

$$k_2 \overline{B_1(f_1) B_1(f_2)} \exp[j2\pi(f_1 + f_2)t]. \quad (4.39)$$

Desenvolvimento da Não-Linearidade de Segunda Ordem da Capacitância de Transição

O termo que expressa a não-linearidade da capacitância de transição em (4.33), é dado por

$$\begin{aligned} \gamma_{c2} p [c_1(t) - b_1(t)]^2 & = \gamma_{c2} p [c_1^2(t) - 2c_1(t)b_1(t) + b_1^2(t)] \\ & = \gamma_{c2} p c_1^2(t) - 2\gamma_{c2} p c_1(t)b_1(t) + \gamma_{c2} p b_1^2(t). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Da mesma forma que em (4.36), para o termo $\gamma_{c2} p c_1^2(t)$ de (4.40), tem-se

$$\begin{aligned} & \gamma_{c2} p \left\{ \sum_{q_1=1}^2 C_1(f_{q_1}) \exp[j2\pi f_{q_1} t] \right\} \left\{ \sum_{q_2=1}^2 C_1(f_{q_2}) \exp[j2\pi f_{q_2} t] \right\} \\ & = \gamma_{c2} \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{q_1=1}^2 \sum_{q_2=1}^2 C_1(f_{q_1}) C_1(f_{q_2}) \exp[j2\pi(f_{q_1} + f_{q_2})t] \right\} \\ & = \gamma_{c2} \sum_{q_1=1}^2 \sum_{q_2=1}^2 j2\pi(f_{q_1} + f_{q_2}) C_1(f_{q_1}) C_1(f_{q_2}) \exp[j2\pi(f_{q_1} + f_{q_2})t]. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Agrupando os termos originados na expansão do duplo somatório em (4.41) que

possuem $\exp[j2\pi(f_1 + f_2)t]$ e colocando o resultado em notação de barra, obtém-se

$$\gamma_{e2}j2\pi(f_1 + f_2)\overline{C_1(f_1)C_1(f_2)} \exp[j2\pi(f_1 + f_2)t]. \quad (4.42)$$

Da mesma forma para os termos $2\gamma_{e2}pc_1(t)b_1(t)$ e $\gamma_{e2}pb_1^2(t)$, respectivamente, obtém-se

$$2\gamma_{e2}j2\pi(f_1 + f_2)\overline{C_1(f_1)B_1(f_2)} \exp[j2\pi(f_1 + f_2)t], \quad (4.43)$$

$$\gamma_{e2}j2\pi(f_1 + f_2)\overline{B_1(f_1)B_1(f_2)} \exp[j2\pi(f_1 + f_2)t]. \quad (4.44)$$

Finalmente, de acordo com (4.42), (4.43) e (4.44) a soma dos componentes resultantes da não-linearidade da capacitância de transição que estão na frequência $f_1 + f_2$ é dada por

$$\begin{aligned} & \gamma_{e2}j2\pi(f_1 + f_2) \left[\overline{C_1(f_1)C_1(f_2)} - 2\overline{C_1(f_1)B_1(f_2)} + \overline{B_1(f_1)B_1(f_2)} \right] \\ & \cdot \exp[j2\pi(f_1 + f_2)t]. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Desenvolvimento da Não-Linearidade de Segunda Ordem da Capacitância de Difusão

Substituindo (4.35) no termo que expressa a não-linearidade da capacitância de difusão em (4.33), resulta em

$$\begin{aligned} \gamma_{e2}pb_1^2(t) &= \gamma_{e2}p \left\{ \sum_{q_1=1}^2 B_1(f_{q_1}) \exp[j2\pi f_{q_1} t] \right\}^2 \\ &= \gamma_{e2}p \left\{ \sum_{q_1=1}^2 B_1(f_{q_1}) \exp[j2\pi f_{q_1} t] \right\} \left\{ \sum_{q_2=1}^2 B_1(f_{q_2}) \exp[j2\pi f_{q_2} t] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \gamma_{e2} \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{q_1=1}^2 \sum_{q_2=1}^2 B_1(f_{q_1}) B_1(f_{q_2}) \exp[j2\pi(f_{q_1} + f_{q_2})t] \right\} \\
 &= \gamma_{e2} \sum_{q_1=1}^2 \sum_{q_2=1}^2 j2\pi(f_{q_1} + f_{q_2}) B_1(f_{q_1}) B_1(f_{q_2}) \exp[j2\pi(f_{q_1} + f_{q_2})t]
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

Novamente, agrupando os termos originados na expansão do duplo somatório em (4.46) que possuem $\exp[j2\pi(f_1 + f_2)t]$ e colocando o resultado em notação de barra, resulta em

$$\gamma_{e2} j2\pi(f_1 + f_2) \overline{B_1(f_1) B_1(f_2)} \exp[j2\pi(f_1 + f_2)t]. \tag{4.47}$$

Desenvolvimento da Não-Linearidade de Segunda Ordem da Fonte de Corrente de Coletor

Com referência a (4.7), pode-se representar o termo que expressa a não-linearidade de segunda ordem da fonte de corrente de coletor em (4.33) como

$$q_2[c_1(t) - a_1(t), b_1(t)] = g_{yy}[c_1(t) - a_1(t)]^2 + g_{xy}[c_1(t) - a_1(t)]b_1(t) + g_{xx}b_1^2(t). \tag{4.48}$$

Substituindo (4.35) no termo $g_{xx}b_1^2(t)$, obtém-se

$$\begin{aligned}
 &g_{xx} \left\{ \sum_{q_1=1}^2 B_1(f_{q_1}) \exp[j2\pi f_{q_1} t] \right\}^2 \\
 &= g_{xx} \left\{ \sum_{q_1=1}^2 B_1(f_{q_1}) \exp[j2\pi f_{q_1} t] \right\} \left\{ \sum_{q_2=1}^2 B_1(f_{q_2}) \exp[j2\pi f_{q_2} t] \right\} \\
 &= g_{xx} \sum_{q_1=1}^2 \sum_{q_2=1}^2 B_1(f_{q_1}) B_1(f_{q_2}) \exp[j2\pi(f_{q_1} + f_{q_2})t].
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

Expandindo o somatório duplo em (4.49), agrupando os termos resultantes que possuem $\exp[j2\pi(f_1 + f_2)t]$ e colocando o resultado em notação de barra, obtém-se

$$g_{xx} \overline{B_1(f_1) B_1(f_2)} \exp[j2\pi(f_1 + f_2)t]. \tag{4.50}$$

Repetindo o mesmo procedimento para os termos $g_{xy}[c_1(t) - a_1(t)]b_1(t)$ e $g_{yy}[c_1(t) - a_1(t)]^2$ obtém-se, respectivamente, o seguinte resultado

$$g_{xy} \left[\overline{B_1(f_1)C_1(f_2)} - \overline{A_1(f_1)B_1(f_2)} \right] \exp[j2\pi(f_1 + f_2)t], \quad (4.51)$$

$$g_{yy} \left[\overline{C_1(f_1)C_1(f_2)} - 2\overline{A_1(f_1)C_1(f_2)} + \overline{A_1(f_1)A_1(f_2)} \right] \exp[j2\pi(f_1 + f_2)t]. \quad (4.52)$$

Portanto, com referência a (4.52), (4.51) e (4.50), a soma dos termos resultantes da não-linearidade da fonte de corrente de coletor que estão na frequência $f_1 + f_2$ é dada por

$$\left\{ g_{xx} \overline{B_1(f_1)B_1(f_2)} + g_{yy} \left[\overline{C_1(f_1)C_1(f_2)} - 2\overline{A_1(f_1)C_1(f_2)} + \overline{A_1(f_1)A_1(f_2)} \right] + g_{xy} \left[\overline{B_1(f_1)C_1(f_2)} - \overline{A_1(f_1)B_1(f_2)} \right] \right\} \exp[j2\pi(f_1 + f_2)t]. \quad (4.53)$$

Desenvolvimento das Tensões de Segunda Ordem do Vetor $e(t)$

Usando (4.32), a tensão de segunda ordem do nó \mathbf{a} é definida como

$$a_2(t) = \sum_{q_1=1}^2 \sum_{q_2=1}^2 A_2(f_{q_1}, f_{q_2}) \exp[j2\pi(f_{q_1} + f_{q_2})t]. \quad (4.54)$$

Expandindo (4.54), evidenciando os coeficientes de $\exp[j2\pi(f_1 + f_2)t]$ gerados na expansão e levando-se em consideração a simetria das funções de transferência não-lineares especificada na Seção 2.2, obtém-se

$$a_2(t) = 2A_2(f_1, f_2) \exp[j2\pi(f_1 + f_2)t] + \dots \quad (4.55)$$

De forma análoga, para as tensões $b_2(t)$ e $c_2(t)$ tem-se, respectivamente

$$b_2(t) = 2B_2(f_1, f_2) \exp[j2\pi(f_1 + f_2)t] + \dots \quad (4.56)$$

$$c_2(t) = 2C_2(f_1, f_2) \exp[j2\pi(f_1 + f_2)t] + \dots \quad (4.57)$$

Substituindo (4.57), (4.56) e (4.55) em (4.33) e resolvendo as operações impostas pelo operador diferencial da matriz $[Y(p)]$, resulta em

$$\begin{bmatrix} Y[j2\pi(f_1 + f_2)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2A_2(f_1, f_2) \exp[j2\pi(f_1 + f_2)t] + \dots \\ 2B_2(f_1, f_2) \exp[j2\pi(f_1 + f_2)t] + \dots \\ 2C_2(f_1, f_2) \exp[j2\pi(f_1 + f_2)t] + \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{1S} + \dots \\ L_{2S} + \dots \\ L_{3S} + \dots \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

onde

$$L_{1S} = 0;$$

$$\begin{aligned} L_{2S} = & \left\{ -k_2 \overline{B_1(f_1)B_1(f_2)} - \gamma_{e2} j2\pi(f_1 + f_2) \overline{B_1(f_1)B_1(f_2)} \right. \\ & + \gamma_{e2} j2\pi(f_1 + f_2) \left[\overline{C_1(f_1)C_1(f_2)} - 2\overline{C_1(f_1)B_1(f_2)} + \overline{B_1(f_1)B_1(f_2)} \right] \\ & + g_{xx} \overline{B_1(f_1)B_1(f_2)} + g_{xy} \left[\overline{B_1(f_1)C_1(f_2)} - \overline{A_1(f_1)B_1(f_2)} \right] \\ & \left. + g_{yy} \left[\overline{C_1(f_1)C_1(f_2)} - 2\overline{A_1(f_1)C_1(f_2)} + \overline{A_1(f_1)A_1(f_2)} \right] \right\} \\ & \cdot \exp[j2\pi(f_1 + f_2)t]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{3S} = & \left\{ -\gamma_{e2} j2\pi(f_1 + f_2) \left[\overline{C_1(f_1)C_1(f_2)} - 2\overline{C_1(f_1)B_1(f_2)} + \overline{B_1(f_1)B_1(f_2)} \right] \right. \\ & - g_{xx} \overline{B_1(f_1)B_1(f_2)} - g_{xy} \left[\overline{B_1(f_1)C_1(f_2)} - \overline{A_1(f_1)B_1(f_2)} \right] \\ & \left. - g_{yy} \left[\overline{C_1(f_1)C_1(f_2)} - 2\overline{A_1(f_1)C_1(f_2)} + \overline{A_1(f_1)A_1(f_2)} \right] \right\} \\ & \cdot \exp[j2\pi(f_1 + f_2)t]. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Finalmente, igualando os coeficientes de $\exp[j2\pi(f_1 + f_2)t]$ em ambos os lados da igualdade em (4.58) e invertendo a matriz admitância desta equação, as funções de transferência não-lineares de segunda ordem são definidas como

$$\begin{bmatrix} A_2(f_1, f_2) \\ B_2(f_1, f_2) \\ C_2(f_1, f_2) \end{bmatrix} = \left[Y[j2\pi(f_1 + f_2)] \right]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\xi_{1S} \\ \frac{1}{2}\xi_{2S} \\ \frac{1}{2}\xi_{3S} \end{bmatrix}. \quad (4.60)$$

Onde, ξ_{1S} , ξ_{2S} e ξ_{3S} são os coeficientes de $\exp[j2\pi(f_1 + f_2)t]$. Segue-se que ξ_{1S} , ξ_{2S} e ξ_{3S} são dados por

$$\begin{aligned} \xi_{1S} &= 0; \\ \xi_{2S} &= -k_2 \overline{B_1(f_1)B_1(f_2)} - \gamma_{e2} j 2\pi(f_1 + f_2) \overline{B_1(f_1)B_1(f_2)} \\ &\quad + \gamma_{e2} j 2\pi(f_1 + f_2) \left[\overline{C_1(f_1)C_1(f_2)} - 2\overline{C_1(f_1)B_1(f_2)} + \overline{B_1(f_1)B_1(f_2)} \right] \\ &\quad + g_{xx} \overline{B_1(f_1)B_1(f_2)} + g_{xy} \left[\overline{B_1(f_1)C_1(f_2)} - \overline{A_1(f_1)B_1(f_2)} \right] \\ &\quad + g_{yy} \left[\overline{C_1(f_1)C_1(f_2)} - 2\overline{A_1(f_1)C_1(f_2)} + \overline{A_1(f_1)A_1(f_2)} \right]; \\ \xi_{3S} &= -\gamma_{e2} j 2\pi(f_1 + f_2) \left[\overline{C_1(f_1)C_1(f_2)} - 2\overline{C_1(f_1)B_1(f_2)} + \overline{B_1(f_1)B_1(f_2)} \right] \\ &\quad - g_{xx} \overline{B_1(f_1)B_1(f_2)} - g_{xy} \left[\overline{B_1(f_1)C_1(f_2)} - \overline{A_1(f_1)B_1(f_2)} \right] \\ &\quad - g_{yy} \left[\overline{C_1(f_1)C_1(f_2)} - 2\overline{A_1(f_1)C_1(f_2)} + \overline{A_1(f_1)A_1(f_2)} \right]. \end{aligned} \quad (4.61)$$

De (4.61) e (4.60), pode-se comprovar que as funções de transferência não-lineares de segunda ordem são determinadas em termos das funções de transferência lineares, como foi comentado na definição do método de entradas harmônicas.

4.2.3 Funções de Transferência Não-Lineares de Terceira Ordem

Na avaliação das funções de transferência não-lineares de terceira ordem a excitação do amplificador foi definida por

$$v(t) = \sum_{q_1=1}^3 \exp[j2\pi f_{q_1} t]. \quad (4.62)$$

Assim como no caso das funções de segunda ordem, assume-se que as frequências dos tons de excitação são positivas e diferentes entre si. Cabe destacar que (4.62) foi obtida de (2.8) selecionando $Q = 3$, $E_1 = E_2 = E_3 = 2$ e omitindo os termos com frequência negativa. Segue-se de (2.14) e de (4.62) que os componentes de i -ésima ordem referentes as tensões $a(t)$, $b(t)$ e $c(t)$ são definidos por

$$\begin{aligned} a_i(t) &= \sum_{q_1=1}^3 \dots \sum_{q_i=1}^3 A_i(f_{q_1}, \dots, f_{q_i}) \exp[j2\pi(f_{q_1} + \dots + f_{q_i})t], \\ b_i(t) &= \sum_{q_1=1}^3 \dots \sum_{q_i=1}^3 B_i(f_{q_1}, \dots, f_{q_i}) \exp[j2\pi(f_{q_1} + \dots + f_{q_i})t], \\ c_i(t) &= \sum_{q_1=1}^3 \dots \sum_{q_i=1}^3 C_i(f_{q_1}, \dots, f_{q_i}) \exp[j2\pi(f_{q_1} + \dots + f_{q_i})t]. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Ao substituir (4.20) e (4.22) em conjunto com (4.21), (4.63) e (4.26) em (4.19) e escrevendo o resultado tal que os termos de terceira ordem fiquem evidentes, obtém-se

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} Y(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3(t) + \dots \\ b_3(t) + \dots \\ c_3(t) + \dots \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\sum_{z=2}^3 k_z b^z(t) - \sum_{z=1}^2 \gamma_{e(z+1)} p[b(t)]^{z+1} + \sum_{z=1}^2 \gamma_{c(z+1)} p[c(t) - b(t)]^{z+1} \\ \quad + \sum_{\rho=2}^3 q_\rho [c(t) - a(t), b(t)] \\ -\sum_{z=1}^2 \gamma_{c(z+1)} p[c(t) - b(t)]^{z+1} - \sum_{\rho=2}^3 q_\rho [c(t) - a(t), b(t)] \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

As funções de transferência não-lineares de terceira ordem, $A_3(f_1, f_2, f_3)$, $B_3(f_1, f_2, f_3)$ e $C_3(f_1, f_2, f_3)$ são determinadas igualando os coeficientes de

$\exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]$ em ambos os lados de (4.64). Novamente, como assumiu-se que as frequências f_1 , f_2 e f_3 do sinal de entrada são positivas e possuem valores diferentes entre si, os componentes de intermodulação na frequência $f_1 + f_2 + f_3$ podem ser gerados somente em termos de terceira ordem pertencentes ao vetor de correntes não-lineares $j(t)$ e ao vetor de tensões $e(t)$. Os termos de terceira ordem no vetor $j(t)$ são gerados ao selecionar

$$\begin{aligned} a(t) &= a_1(t) + a_2(t) \\ b(t) &= b_1(t) + b_2(t) \\ c(t) &= c_1(t) + c_2(t). \end{aligned} \tag{4.65}$$

No entanto, ao escolher

$$\begin{aligned} a(t) &= a_1(t) + a_2(t) + a_3(t) + \dots \\ b(t) &= b_1(t) + b_2(t) + b_3(t) + \dots \\ c(t) &= c_1(t) + c_2(t) + c_3(t) + \dots, \end{aligned} \tag{4.66}$$

os termos de terceira ordem resultantes no vetor $j(t)$ serão os mesmos, porém os termos de ordens mais elevadas irão aparecer em $j(t)$. Como no momento o que interessa são somente os termos de terceira ordem e não de ordem mais elevadas, o desenvolvimento realizado em (4.65) é suficiente. É importante lembrar que as tensões totais dos nós são compostas de componentes de várias ordens, conforme foi especificado em (4.66). O vetor $i_g(t)$ é desconsiderado novamente, pois seus componentes estão na frequência f_1 , f_2 e f_3 e não em $f_1 + f_2 + f_3$.

Desenvolvimento da Não-Linearidade Resistiva de Terceira Ordem da Junção Base-Emissor

Com referência a (4.64), o termo que expressa a não-linearidade resistiva é dado por

$$\sum_{z=2}^3 k_z b^z(t), \tag{4.67}$$

substituindo a segunda equação de (4.65) em (4.67), tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{z=2}^3 k_z b^z(t) &= k_2 [b_1(t) + b_2(t)]^2 + k_3 [b_1(t) + b_2(t)]^3 \\ &= k_2 [b_1^2(t) + 2b_1(t)b_2(t) + b_2^2(t)] + k_3 [b_1^3(t) + 3b_1^2(t)b_2(t) \\ &\quad + 3b_1(t)b_2^2(t) + b_2^3(t)]. \end{aligned} \tag{4.68}$$

De acordo com o conceito de ordem da resposta de um sistema não-linear, especificado na Seção 2.1, segue-se que os termos de terceira ordem em (4.68) são dados por

$$2k_2b_1(t)b_2(t) + k_3b_1^3(t). \quad (4.69)$$

Com referência ao primeiro termo de (4.69), substituindo em $b_1(t)b_2(t)$ a segunda equação de (4.63) para $i = 1$ e $i = 2$, obtém-se

$$\begin{aligned} 2k_2b_1(t)b_2(t) &= 2k_2 \left\{ \sum_{q_1=1}^3 B_1(f_{q_1}) \exp[j2\pi f_{q_1}t] \right\} \\ &\quad \cdot \left\{ \sum_{q_1=1}^3 \sum_{q_2=1}^3 B_2(f_{q_1}, f_{q_2}) \exp[j2\pi(f_{q_1} + f_{q_2})t] \right\} \\ &= 2k_2 \sum_{q_1=1}^3 \sum_{q_2=1}^3 \sum_{q_3=1}^3 B_1(f_{q_1})B_2(f_{q_2}, f_{q_3}) \exp[j2\pi(f_{q_1} + f_{q_2} + f_{q_3})t]. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Expandindo o somatório triplo em (4.70), agrupando os termos resultantes que possuem $\exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]$ e colocando o resultado em notação de barra resulta em

$$2k_2 \overline{B_1(f_1)B_2(f_2, f_3)} \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]. \quad (4.71)$$

De acordo com a definição de notação em barra, tem-se que

$$\begin{aligned} \overline{B_1(f_1)B_2(f_2, f_3)} &= B_1(f_1)B_2(f_2, f_3) + B_1(f_1)B_2(f_3, f_2) + B_1(f_2)B_2(f_1, f_3) \\ &\quad + B_1(f_2)B_2(f_3, f_1) + B_1(f_3)B_2(f_1, f_2) + B_1(f_3)B_2(f_2, f_1). \end{aligned} \quad (4.72)$$

Efetuando-se no segundo termo de (4.69), $k_3b_1^3(t)$, o mesmo desenvolvimento realizado anteriormente, obtém-se

$$k_3 \overline{B_1(f_1)B_1(f_2)B_1(f_3)} \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]. \quad (4.73)$$

Denota-se a soma dos termos que contém $\exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]$, resultantes da não-linearidade resistiva de terceira ordem da junção base-emissor de ζ_R . Portanto, somando-se (4.71) e (4.73) resulta em

$$\zeta_R = \left[2k_2 \overline{B_1(f_1)B_2(f_2, f_3)} + k_3 \overline{B_1(f_1)B_1(f_2)B_1(f_3)} \right] \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]. \quad (4.74)$$

Desenvolvimento da Não-Linearidade de Terceira Ordem da Capacitância de Transição

O termo que expressa a não-linearidade da capacitância de transição em (4.64) é dado por

$$\sum_{z=1}^2 \gamma_{c(z+1)} p [c(t) - b(t)]^{z+1} = \gamma_{c2} p [c(t) - b(t)]^2 + \gamma_{c3} p [c(t) - b(t)]^3, \quad (4.75)$$

já o termo resultante do somatório em (4.75) quando $z = 1$ é

$$\gamma_{c2} p [c(t) - b(t)]^2 = \gamma_{c2} p [c^2(t) - 2c(t)b(t) + b^2(t)]. \quad (4.76)$$

Substituindo a segunda e terceira equações de (4.65) em (4.76), tem-se

$$\gamma_{c2} p \left\{ [c_1(t) + c_2(t)]^2 - 2[c_1(t) + c_2(t)][b_1(t) + b_2(t)] + [b_1(t) + b_2(t)]^2 \right\}. \quad (4.77)$$

Efetuada-se as multiplicações e desenvolvendo os quadrados perfeitos em (4.77) e, em seguida, separando os termos de terceira ordem resultantes, obtém-se

$$2\gamma_{c2} p c_1(t)c_2(t) - 2\gamma_{c2} p c_1(t)b_2(t) - 2\gamma_{c2} p c_2(t)b_1(t) + 2\gamma_{c2} p b_1(t)b_2(t) \quad (4.78)$$

Com referência ao primeiro termo de (4.78), substituindo em $c_1(t)c_2(t)$ a terceira equação de (4.63) para $i = 1$ e $i = 2$ resulta em

$$2\gamma_{c2} p c_1(t)c_2(t) = 2\gamma_{c2} p \left\{ \sum_{q_1=1}^3 C_1(f_{q_1}) \exp[j2\pi f_{q_1} t] \right\} \left\{ \sum_{q_1=1}^3 \sum_{q_2=1}^3 C_2(f_{q_1}, f_{q_2}) \exp[j2\pi(f_{q_1} + f_{q_2})t] \right\}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\gamma_{c2}p \left\{ \sum_{q_1=1}^3 \sum_{q_2=1}^3 \sum_{q_3=1}^3 C_1(f_{q_1})C_2(f_{q_2}, f_{q_3}) \exp[j2\pi(f_{q_1} + f_{q_2} + f_{q_3})t] \right\} \\
 &= 2\gamma_{c2} \sum_{q_1=1}^3 \sum_{q_2=1}^3 \sum_{q_3=1}^3 j2\pi(f_{q_1} + f_{q_2} + f_{q_3})C_1(f_{q_1})C_2(f_{q_2}, f_{q_3}) \\
 &\quad \cdot \exp[j2\pi(f_{q_1} + f_{q_2} + f_{q_3})t].
 \end{aligned} \tag{4.79}$$

Expandindo o somatório triplo em (4.79), agrupando os termos que possuem $\exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]$ e colocando o resultado em notação de barra, resulta em

$$2\gamma_{c2}j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)\overline{C_1(f_1)C_2(f_2, f_3)} \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]. \tag{4.80}$$

Novamente, aplicando-se aos termos $-2\gamma_{c2}pc_1(t)b_2(t)$, $-2\gamma_{c2}pc_2(t)b_1(t)$ e $2\gamma_{c2}pb_1(t)b_2(t)$ de (4.78) o mesmo procedimento realizado anteriormente para o termo $2\gamma_{c2}pc_1(t)c_2(t)$ resulta, respectivamente, em

$$\begin{aligned}
 &-2\gamma_{c2}j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)\overline{C_1(f_1)B_2(f_2, f_3)} \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t], \\
 &-2\gamma_{c2}j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)\overline{B_1(f_1)C_2(f_2, f_3)} \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t], \\
 &2\gamma_{c2}j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)\overline{B_1(f_1)B_2(f_2, f_3)} \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t].
 \end{aligned} \tag{4.81}$$

Somando (4.80) junto com as três equações em (4.81) obtém-se o conjunto dos termos que contém $\exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]$, resultantes da não-linearidade de terceira ordem da capacitância de transição para $z = 1$. O resultado dessa soma é expresso por

$$\begin{aligned}
 &2\gamma_{c2}j2\pi(f_1 + f_2 + f_3) \left\{ \overline{C_1(f_1)C_2(f_2, f_3)} - \overline{C_1(f_1)B_2(f_2, f_3)} \right. \\
 &\quad \left. - \overline{B_1(f_1)C_2(f_2, f_3)} + \overline{B_1(f_1)B_2(f_2, f_3)} \right\} \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t].
 \end{aligned} \tag{4.82}$$

Dando atenção ao termo resultante em (4.75) para $z=2$, obtém-se

$$\gamma_{c3}p[c(t) - b(t)]^3 = \gamma_{c3}p[c^3(t) - 3c^2(t)b(t) + 3c(t)b^2(t) - b^3(t)]. \tag{4.83}$$

Substituindo a segunda e terceira equações de (4.65) em (4.83), resulta em

$$\begin{aligned} & \gamma_{c3}p \left\{ [c_1(t) + c_2(t)]^3 - 3[c_1(t) + c_2(t)]^2[b_1(t) + b_2(t)] \right. \\ & \left. + 3[c_1(t) + c_2(t)][b_1(t) + b_2(t)]^2 - [b_1(t) + b_2(t)]^3 \right\}. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Efetuando as operações algébricas em (4.84) e em seguida selecionando os termos de terceira ordem resultantes, tem-se

$$\gamma_{c3}p \left\{ c_1^3(t) - 3c_1^2(t)b_1(t) + 3c_1(t)b_1^2(t) - b_1^3(t) \right\}. \quad (4.85)$$

Com referência ao primeiro termo de (4.85), substituindo em $c_1^3(t)$ a terceira equação de (4.63) para $i = 1$ resulta em

$$\begin{aligned} & \gamma_{c3}pc_1^3(t) = \\ & \gamma_{c3} \sum_{q_1=1}^3 \sum_{q_2=1}^3 \sum_{q_3=1}^3 pC_1(f_{q_1})C_1(f_{q_2})C_1(f_{q_3}) \exp[j2\pi(f_{q_1} + f_{q_2} + f_{q_3})t] \\ & = \gamma_{c3} \sum_{q_1=1}^3 \sum_{q_2=1}^3 \sum_{q_3=1}^3 j2\pi(f_{q_1} + f_{q_2} + f_{q_3})C_1(f_{q_1})C_1(f_{q_2})C_1(f_{q_3}) \\ & \quad \cdot \exp[j2\pi(f_{q_1} + f_{q_2} + f_{q_3})t]. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Expandindo o somatório triplo em (4.86), agrupando os termos que possuem $\exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]$ e colocando o resultado em notação de barra obtém-se

$$\gamma_{c3}j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)\overline{C_1(f_1)C_1(f_2)C_1(f_3)} \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]. \quad (4.87)$$

Aplicando-se aos termos $-3\gamma_{c3}pc_1^2(t)b_1(t)$, $3\gamma_{c3}pc_1(t)b_1^2(t)$, $-\gamma_{c3}pb_1^3(t)$ de (4.85), o mesmo procedimento realizado anteriormente para o termo $\gamma_{c3}pc_1^3(t)$ resulta, respectivamente, em

$$\begin{aligned} & -3\gamma_{c3}j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)\overline{B_1(f_1)C_1(f_2)C_1(f_3)} \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t], \\ & 3\gamma_{c3}j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)\overline{C_1(f_1)B_1(f_2)B_1(f_3)} \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t], \\ & \gamma_{c3}j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)\overline{B_1(f_1)B_1(f_2)B_1(f_3)} \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]. \end{aligned} \quad (4.88)$$

Ao somar (4.87) junto com as três equações em (4.88) obtém-se o conjunto dos

termos que contém $\exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]$, resultantes da não-linearidade de terceira ordem da capacitância de transição para $z = 2$. O resultado dessa soma é dada por

$$\begin{aligned} & \gamma_{e3} j2\pi(f_1 + f_2 + f_3) \left\{ \overline{C_1(f_1)C_1(f_2)C_1(f_3)} - 3\overline{B_1(f_1)C_1(f_2)C_1(f_3)} \right. \\ & \left. + 3\overline{C_1(f_1)B_1(f_2)B_1(f_3)} - \overline{B_1(f_1)B_1(f_2)B_1(f_3)} \right\} \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Finalmente, somando (4.82) e (4.89) tem-se o conjunto de todos os termos que contém $\exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]$, resultantes da não-linearidade de terceira ordem da capacitância de transição. O resultado dessa soma é denominada de ζ_{CC} e é definida como

$$\begin{aligned} \zeta_{CC} = & j2\pi(f_1 + f_2 + f_3) \left\{ 2\gamma_{e2} \left[\overline{C_1(f_1)C_2(f_2, f_3)} - \overline{C_1(f_1)B_2(f_2, f_3)} \right. \right. \\ & \left. \left. - \overline{B_1(f_1)C_2(f_2, f_3)} + \overline{B_1(f_1)B_2(f_2, f_3)} \right] + \gamma_{e3} \left[\overline{C_1(f_1)C_1(f_2)C_1(f_3)} \right. \right. \\ & \left. \left. - 3\overline{B_1(f_1)C_1(f_2)C_1(f_3)} + 3\overline{C_1(f_1)B_1(f_2)B_1(f_3)} - \overline{B_1(f_1)B_1(f_2)B_1(f_3)} \right] \right\} \\ & \cdot \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]. \end{aligned} \quad (4.90)$$

Desenvolvimento da Não-Linearidade de Terceira Ordem da Fonte de Corrente de Coletor

De acordo com (4.64), o termo que expressa a não-linearidade da fonte de corrente de coletor é representado como

$$\sum_{\rho=2}^3 q_{\rho}[c(t) - a(t), b(t)] = q_2[c(t) - a(t), b(t)] + q_3[c(t) - a(t), b(t)]. \quad (4.91)$$

Com referência a (4.7), o termo resultante do somatório em (4.91) para $\rho = 2$ é expresso por

$$q_2[c(t) - a(t), b(t)] = g_{yy}[c(t) - a(t)]^2 + g_{xy}[c(t) - a(t)]b(t) + g_{xx}b^2(t). \quad (4.92)$$

Substituindo (4.65) em (4.92), obtém-se

$$\begin{aligned}
 q_2[c(t) - a(t), b(t)] &= g_{yy}[c_1(t) + c_2(t) - a_1(t) - a_2(t)]^2 \\
 &\quad + g_{xy}[c_1(t) + c_2(t) - a_1(t) - a_2(t)][b_1(t) + b_2(t)] \\
 &\quad + g_{xx}[b_1(t) + b_2(t)]^2.
 \end{aligned} \tag{4.93}$$

Efetuada as operações algébricas em (4.93) e em seguida selecionando somente os termos de terceira ordem resultantes, tem-se

$$\begin{aligned}
 &g_{yy}[2c_1(t)c_2(t) - 2c_1(t)a_2(t) - 2c_2(t)a_1(t) + 2a_1(t)a_2(t)] \\
 &+ g_{xy}[b_1(t)c_2(t) + b_2(t)c_1(t) - b_1(t)a_2(t) - b_2(t)a_1(t)] \\
 &+ g_{xx}[2b_1(t)b_2(t)].
 \end{aligned} \tag{4.94}$$

Com referência ao primeiro termo de (4.94), substituindo em $c_1(t)c_2(t)$ a terceira equação de (4.63) para $i = 1$ e $i = 2$, resulta em

$$\begin{aligned}
 &2g_{yy}c_1(t)c_2(t) = \\
 &2g_{yy} \left\{ \sum_{q_1=1}^3 C_1(f_{q_1}) \exp[j2\pi f_{q_1} t] \right\} \left\{ \sum_{q_1=1}^3 \sum_{q_2=1}^3 C_2(f_{q_1}, f_{q_2}) \exp[j2\pi(f_{q_1} + f_{q_2})t] \right\} \\
 &= 2g_{yy} \sum_{q_1=1}^3 \sum_{q_2=1}^3 \sum_{q_3=1}^3 C_1(f_{q_1})C_2(f_{q_2}, f_{q_3}) \exp[j2\pi(f_{q_1} + f_{q_2} + f_{q_3})t]
 \end{aligned} \tag{4.95}$$

Expandindo o somatório triplo em (4.95), agrupando os termos resultantes que possuem $\exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]$ e colocando o resultado em notação de barra, obtém-se

$$2g_{yy} \overline{C_1(f_1)C_2(f_2, f_3)} \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]. \tag{4.96}$$

Aplicando-se aos termos $-2g_{yy}c_1(t)a_2(t)$, $-2g_{yy}c_2(t)a_1(t)$, $2g_{yy}a_1(t)a_2(t)$, $g_{xy}b_1(t)c_2(t)$, $g_{xy}b_2(t)c_1(t)$, $-g_{xy}b_1(t)a_2(t)$, $-g_{xy}b_2(t)a_1(t)$, $2g_{xx}b_1(t)b_2(t)$ de (4.94), o mesmo procedimento realizado anteriormente para o termo $2g_{yy}c_1(t)c_2(t)$ resulta, respectivamente, em

$$\begin{aligned}
 & -2g_{yy}\overline{C_1(f_1)A_2(f_2, f_3)} \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t], \\
 & -2g_{yy}\overline{A_1(f_1)C_2(f_2, f_3)} \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t], \\
 & 2g_{yy}\overline{A_1(f_1)A_2(f_2, f_3)} \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t], \\
 & g_{xy}\overline{B_1(f_1)C_2(f_2, f_3)} \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t], \\
 & g_{xy}\overline{C_1(f_1)B_2(f_2, f_3)} \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t], \\
 & -g_{xy}\overline{B_1(f_1)A_2(f_2, f_3)} \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t], \\
 & -g_{xy}\overline{A_1(f_1)B_2(f_2, f_3)} \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t], \\
 & 2g_{xx}\overline{B_1(f_1)B_2(f_2, f_3)} \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]. \tag{4.97}
 \end{aligned}$$

Ao somar (4.96) junto com as oito equações em (4.97) tem-se o conjunto dos termos que contém $\exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]$, resultantes da não-linearidade de terceira ordem da fonte de corrente de coletor para $\rho = 2$. O resultado dessa soma é expressa por

$$\begin{aligned}
 & \left\{ 2g_{xx}\overline{B_1(f_1)B_2(f_2, f_3)} + 2g_{yy}\left[\overline{C_1(f_1)C_2(f_2, f_3)} - \overline{C_1(f_1)A_2(f_2, f_3)}\right. \right. \\
 & \left. \left. - \overline{A_1(f_1)C_2(f_2, f_3)} + \overline{A_1(f_1)A_2(f_2, f_3)}\right] + g_{xy}\left[\overline{B_1(f_1)C_2(f_2, f_3)}\right. \right. \\
 & \left. \left. + \overline{C_1(f_1)B_2(f_2, f_3)} - \overline{B_1(f_1)A_2(f_2, f_3)} - \overline{A_1(f_1)B_2(f_2, f_3)}\right]\right\} \\
 & \cdot \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]. \tag{4.98}
 \end{aligned}$$

Com referência a (4.7), o termo originado no somatório em (4.91) quando $\rho = 3$ é expresso como

$$\begin{aligned}
 q_3[c(t) - a(t), b(t)] & = g_{yyy}[c(t) - a(t)]^3 + g_{xyy}[c(t) - a(t)]^2b(t) \\
 & + g_{xxy}[c(t) - a(t)]b^2(t) + g_{xxx}b^3(t). \tag{4.99}
 \end{aligned}$$

Novamente, substituindo (4.65) em (4.99), tem-se

$$\begin{aligned}
 q_3[c(t) - a(t), b(t)] & = g_{yyy}[c_1(t) + c_2(t) - a_1(t) - a_2(t)]^3 \\
 & + g_{xyy}[c_1(t) + c_2(t) - a_1(t) - a_2(t)]^2[b_1(t) + b_2(t)] \\
 & + g_{xxy}[c_1(t) + c_2(t) - a_1(t) - a_2(t)][b_1(t) + b_2(t)]^2 \\
 & + g_{xxx}[b_1(t) + b_2(t)]^3. \tag{4.100}
 \end{aligned}$$

Efetuando as operações algébricas em (4.100) e em seguida selecionando somente

os termos de terceira ordem originados, obtém-se

$$\begin{aligned}
 & g_{xxx}b_1^3(t) + g_{xxy} \left[b_1^2(t)c_1(t) - b_1^2(t)a_1(t) \right] \\
 & + g_{xyy} \left[b_1(t)c_1^2(t) - 2b_1(t)c_1(t)a_1(t) + b_1(t)a_1^2(t) \right] \\
 & + g_{yyy} \left[c_1^3(t) - 3c_1^2(t)a_1(t) + 3c_1(t)a_1^2(t) - a_1^3(t) \right]. \quad (4.101)
 \end{aligned}$$

Com referência ao primeiro termo de (4.101), substituindo em $b_1^3(t)$ a segunda equação de (4.63) para $i = 1$ resulta em

$$\begin{aligned}
 & g_{xxx}b_1^3(t) \\
 & = g_{xxx} \left\{ \sum_{q_1=1}^3 B_1(f_{q_1}) \exp[j2\pi f_{q_1}t] \right\}^3 \\
 & = g_{xxx} \left\{ \sum_{q_1=1}^3 B_1(f_{q_1}) \exp[j2\pi f_{q_1}t] \right\} \left\{ \sum_{q_1=1}^3 B_1(f_{q_1}) \exp[j2\pi f_{q_1}t] \right\} \\
 & \quad \cdot \left\{ \sum_{q_1=1}^3 B_1(f_{q_1}) \exp[j2\pi f_{q_1}t] \right\} \\
 & = g_{xxx} \sum_{q_1=1}^3 \sum_{q_2=1}^3 \sum_{q_3=1}^3 B_1(f_{q_1})B_1(f_{q_2})B_1(f_{q_3}) \exp[j2\pi(f_{q_1} + f_{q_2} + f_{q_3})t] \quad (4.102)
 \end{aligned}$$

Expandindo o somatório triplo em (4.102), agrupando os termos resultantes que possuem $\exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]$ e colocando o resultado em notação de barra, tem-se

$$\overline{g_{xxx}B_1(f_1)B_1(f_2)B_1(f_3)} \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]. \quad (4.103)$$

Aplicando-se aos termos $g_{xxy}b_1^2(t)c_1(t)$, $-g_{xxy}b_1^2(t)a_1(t)$, $g_{xyy}b_1(t)c_1^2(t)$, $-2g_{xyy}b_1(t)c_1(t)a_1(t)$, $g_{xyy}b_1(t)a_1^2(t)$, $g_{yyy}c_1^3(t)$, $-3g_{yyy}c_1^2(t)a_1(t)$, $3g_{yyy}c_1(t)a_1^2(t)$, $-g_{yyy}a_1^3(t)$ de (4.101), o mesmo procedimento realizado anteriormente para o termo $g_{xxx}b_1^3(t)$ resulta, respectivamente, em

$$\begin{aligned}
& g_{xxy} \overline{C_1(f_1)B_1(f_2)B_1(f_3)} \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t], \\
& -g_{xxy} \overline{A_1(f_1)B_1(f_2)B_1(f_3)} \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t], \\
& g_{xyy} \overline{B_1(f_1)C_1(f_2)C_1(f_3)} \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t], \\
& -2g_{xyy} \overline{B_1(f_1)C_1(f_2)A_1(f_3)} \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t], \\
& g_{xyy} \overline{B_1(f_1)A_1(f_2)A_1(f_3)} \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t], \\
& g_{yyy} \overline{C_1(f_1)C_1(f_2)C_1(f_3)} \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t], \\
& -3g_{yyy} \overline{A_1(f_1)C_1(f_2)C_1(f_3)} \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t], \\
& 3g_{yyy} \overline{C_1(f_1)A_1(f_2)A_1(f_3)} \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t], \\
& -g_{yyy} \overline{A_1(f_1)A_1(f_2)A_1(f_3)} \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t].
\end{aligned} \tag{4.104}$$

Somando (4.103) junto com as nove equações em (4.104) obtém-se o conjunto dos termos que contém $\exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]$, resultantes da não-linearidade de terceira ordem da fonte de corrente de coletor com $\rho = 3$. O resultado dessa soma é expressa por

$$\begin{aligned}
& \left\{ g_{xxx} \overline{B_1(f_1)B_1(f_2)B_1(f_3)} + g_{xxy} \left[\overline{C_1(f_1)B_1(f_2)B_1(f_3)} - \overline{A_1(f_1)B_1(f_2)B_1(f_3)} \right] \right. \\
& + g_{xyy} \left[\overline{B_1(f_1)C_1(f_2)C_1(f_3)} - 2\overline{B_1(f_1)C_1(f_2)A_1(f_3)} + \overline{B_1(f_1)A_1(f_2)A_1(f_3)} \right] \\
& + g_{yyy} \left[\overline{C_1(f_1)C_1(f_2)C_1(f_3)} - 3\overline{A_1(f_1)C_1(f_2)C_1(f_3)} + 3\overline{C_1(f_1)A_1(f_2)A_1(f_3)} \right. \\
& \left. \left. - \overline{A_1(f_1)A_1(f_2)A_1(f_3)} \right] \right\} \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t].
\end{aligned} \tag{4.105}$$

Finalmente, somando (4.98) e (4.105) obtém-se o conjunto de todos os termos que contém $\exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]$, resultantes da não-linearidade de terceira ordem da fonte de corrente. O resultado dessa soma é denominada de ζ_A e é dada por

$$\begin{aligned}
 \zeta_A = & \left\{ 2g_{xx} \overline{B_1(f_1)B_2(f_2, f_3)} + 2g_{yy} \left[\overline{C_1(f_1)C_2(f_2, f_3)} - \overline{C_1(f_1)A_2(f_2, f_3)} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \overline{A_1(f_1)C_2(f_2, f_3)} + \overline{A_1(f_1)A_2(f_2, f_3)} \right] + g_{xy} \left[\overline{B_1(f_1)C_2(f_2, f_3)} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \overline{C_1(f_1)B_2(f_2, f_3)} - \overline{B_1(f_1)A_2(f_2, f_3)} - \overline{A_1(f_1)B_2(f_2, f_3)} \right] \right. \\
 & \left. + g_{xxx} \overline{B_1(f_1)B_1(f_2)B_1(f_3)} + g_{xxy} \left[\overline{C_1(f_1)B_1(f_2)B_1(f_3)} - \overline{A_1(f_1)B_1(f_2)B_1(f_3)} \right] \right. \\
 & \left. + g_{xyy} \left[\overline{B_1(f_1)C_1(f_2)C_1(f_3)} - 2\overline{B_1(f_1)C_1(f_2)A_1(f_3)} + \overline{B_1(f_1)A_1(f_2)A_1(f_3)} \right] \right. \\
 & \left. + g_{yyy} \left[\overline{C_1(f_1)C_1(f_2)C_1(f_3)} - 3\overline{A_1(f_1)C_1(f_2)C_1(f_3)} + 3\overline{C_1(f_1)A_1(f_2)A_1(f_3)} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \overline{A_1(f_1)A_1(f_2)A_1(f_3)} \right] \right\} \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]. \tag{4.106}
 \end{aligned}$$

Desenvolvimento da Não-Linearidade de Terceira Ordem da Capacitância de Difusão

Finalmente, a última não-linearidade de terceira ordem do circuito ilustrado na Figura 4.4 a ser analisada é a não-linearidade da capacitância de difusão. Com referência a (4.64), o termo que expressa essa não-linearidade é definido como

$$\sum_{z=1}^2 \gamma_{e(z+1)} p[b(t)]^{z+1} = \gamma_{e2} p b^2(t) + \gamma_{e3} p b^3(t). \tag{4.107}$$

Substituindo a segunda equação de (4.65) em (4.107), tem-se

$$\begin{aligned}
 \sum_{z=1}^2 \gamma_{e(z+1)} p[b(t)]^{z+1} &= \gamma_{e2} p [b_1(t) + b_2(t)]^2 + \gamma_{e3} p [b_1(t) + b_2(t)]^3 \\
 &= \gamma_{e2} p [b_1^2(t) + 2b_1(t)b_2(t) + b_2^2(t)] + \gamma_{e3} p [b_1^3(t) + 3b_1^2(t)b_2(t) \\
 &\quad + 3b_1(t)b_2^2(t) + b_2^3(t)]. \tag{4.108}
 \end{aligned}$$

Segue-se que os termos de terceira ordem em (4.108) são dados por

$$2\gamma_{e2} p b_1(t)b_2(t) + \gamma_{e3} p b_1^3(t). \tag{4.109}$$

Com referência ao primeiro termo de (4.109), substituindo em $b_1(t)b_2(t)$ a segunda

equação de (4.63) para $i = 1$ e $i = 2$, obtém-se

$$\begin{aligned}
 2\gamma_{e2}pb_1(t)b_2(t) &= 2\gamma_{e2}p\left\{\sum_{q_1=1}^3 B_1(f_{q_1}) \exp[j2\pi f_{q_1}t]\right\} \\
 &\quad \cdot \left\{\sum_{q_1=1}^3 \sum_{q_2=1}^3 B_2(f_{q_1}, f_{q_2}) \exp[j2\pi(f_{q_1} + f_{q_2})t]\right\} \\
 &= 2\gamma_{e2}\frac{d}{dt} \sum_{q_1=1}^3 \sum_{q_2=1}^3 \sum_{q_3=1}^3 B_1(f_{q_1})B_2(f_{q_2}, f_{q_3}) \\
 &\quad \cdot \exp[j2\pi(f_{q_1} + f_{q_2} + f_{q_3})t]. \\
 &= 2\gamma_{e2} \sum_{q_1=1}^3 \sum_{q_2=1}^3 \sum_{q_3=1}^3 j2\pi(f_{q_1} + f_{q_2} + f_{q_3})B_1(f_{q_1})B_2(f_{q_2}, f_{q_3}) \\
 &\quad \cdot \exp[j2\pi(f_{q_1} + f_{q_2} + f_{q_3})t]. \tag{4.110}
 \end{aligned}$$

Expandindo o somatório triplo em (4.110), agrupando os termos resultantes que possuem $\exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]$ e colocando o resultado em notação de barra resulta em

$$2\gamma_{e2}j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)\overline{B_1(f_1)B_2(f_2, f_3)} \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]. \tag{4.111}$$

Efetuada-se no segundo termo de (4.109), $\gamma_{e3}pb_1^3(t)$, o mesmo desenvolvimento realizado anteriormente, obtém-se

$$\gamma_{e3}j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)\overline{B_1(f_1)B_1(f_2)B_1(f_3)} \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]. \tag{4.112}$$

Denota-se a soma dos termos que contém $\exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]$, resultantes da não-linearidade de terceira ordem da capacitância de difusão de ζ_{CE} . Portanto, somando-se (4.111) e (4.112), obtém-se

$$\begin{aligned}
 \zeta_{CE} = j2\pi(f_1 + f_2 + f_3) &\left[2\gamma_{e2}\overline{B_1(f_1)B_2(f_2, f_3)} + \gamma_{e3}\overline{B_1(f_1)B_1(f_2)B_1(f_3)}\right] \\
 &\cdot \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]. \tag{4.113}
 \end{aligned}$$

Desenvolvimento das Tensões de Terceira Ordem do Vetor $e(t)$

Usando (4.63), as tensões de terceira ordem referentes aos nós **a**, **b** e **c** são dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned}
 a_3(t) &= \sum_{q_1=1}^3 \sum_{q_2=1}^3 \sum_{q_3=1}^3 A_3(f_{q_1}, f_{q_2}, f_{q_3}) \exp[j2\pi(f_{q_1} + f_{q_2} + f_{q_3})t] \\
 b_3(t) &= \sum_{q_1=1}^3 \sum_{q_2=1}^3 \sum_{q_3=1}^3 B_3(f_{q_1}, f_{q_2}, f_{q_3}) \exp[j2\pi(f_{q_1} + f_{q_2} + f_{q_3})t] \\
 c_3(t) &= \sum_{q_1=1}^3 \sum_{q_2=1}^3 \sum_{q_3=1}^3 C_3(f_{q_1}, f_{q_2}, f_{q_3}) \exp[j2\pi(f_{q_1} + f_{q_2} + f_{q_3})t].
 \end{aligned} \tag{4.114}$$

Expandindo os somatórios referentes as três equações em (4.114), evidenciando somente os coeficientes de $\exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]$ gerados nas expansões e levando-se em consideração a simetria das funções de transferência não-lineares especificada na Seção 2.2, obtém-se

$$\begin{aligned}
 a_3(t) &= 6A_3(f_1, f_2, f_3) \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t] + \dots \\
 b_3(t) &= 6B_3(f_1, f_2, f_3) \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t] + \dots \\
 c_3(t) &= 6C_3(f_1, f_2, f_3) \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t] + \dots
 \end{aligned} \tag{4.115}$$

Substituindo (4.115) em (4.64) e resolvendo as operações impostas pelo operador diferencial da matriz $[Y(p)]$, resulta em

$$\begin{aligned}
 & \left[Y[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t] \right] \begin{bmatrix} 6A_3(f_1, f_2, f_3) \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t] + \dots \\ 6B_3(f_1, f_2, f_3) \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t] + \dots \\ 6C_3(f_1, f_2, f_3) \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t] + \dots \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} L_{1T} + \dots \\ L_{2T} + \dots \\ L_{3T} + \dots \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.116}$$

onde

$$\begin{aligned}
 L_{1T} &= 0; \\
 L_{2T} &= -\zeta_R - \zeta_{CE} + \zeta_{CC} + \zeta_A; \\
 L_{3T} &= -\zeta_{CC} - \zeta_A.
 \end{aligned} \tag{4.117}$$

Finalmente, igualando os coeficientes de $\exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]$ em ambos os lados da igualdade em (4.116) e invertendo a matriz admitância desta equação, as funções de transferência não-lineares de terceira ordem são dadas por

$$\begin{bmatrix} A_3(f_1, f_2, f_3) \\ B_3(f_1, f_2, f_3) \\ C_3(f_1, f_2, f_3) \end{bmatrix} = \left[Y[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)] \right]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{6}\xi_{1T} \\ \frac{1}{6}\xi_{2T} \\ \frac{1}{6}\xi_{3T} \end{bmatrix}. \tag{4.118}$$

Onde ξ_{1T} , ξ_{2T} e ξ_{3T} representam os coeficientes de $\exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]$ e são definidos como

$$\begin{aligned}
 \xi_{1T} &= L_{1T} \cdot \exp[-j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t] \\
 &= 0; \\
 \xi_{2T} &= L_{2T} \cdot \exp[-j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t] \\
 &= (-\zeta_R - \zeta_{CE} + \zeta_{CC} + \zeta_A) \cdot \exp[-j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]; \\
 \xi_{3T} &= L_{3T} \cdot \exp[-j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t] \\
 &= (-\zeta_{CC} - \zeta_A) \cdot \exp[-j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t].
 \end{aligned} \tag{4.119}$$

De (4.118) e (4.119) e com referência a (4.74), (4.90), (4.106) e (4.113) nota-se que as funções de transferência não-lineares de terceira ordem são determinadas em termos das funções de transferência lineares e das funções de transferência não-lineares de segunda ordem. Esse conceito também pode ser observado através dos resultados analíticos apresentados por KUSUNOKI & KAWAKAMI [8], LI & PILEGGI [10] e AHMED et al. [13].

A condição de que as freqüências de entrada sejam positivas e diferentes entre si foi introduzida para garantir que heterodinagens de freqüências distintas produzam freqüências de intermodulação distintas, embora essa condição simplifique a análise, isso não é necessário. Portanto, as expressões analíticas obtidas para as funções de transferência não-lineares são válidas mesmo quando essa condição

não é satisfeita.

Por exemplo, assim como foi realizado por AHN et al. [9], pode-se avaliar $C_3(f_2, f_2, -f_2)$ de (4.118) fazendo $f_1 = f_2$ e $f_3 = -f_2$.

4.3 Valores Numéricos das Funções de Transferência

O objetivo dessa Seção foi obter valores numéricos das funções de transferência não-lineares de primeira, segunda e terceira ordens concebidas analiticamente na Seção 5.2. Com esse propósito foi desenvolvido um programa utilizando o software MATLAB [16]. A listagem do programa está disponível no Anexo D.

Os parâmetros da Tabela 4.1 e os valores dos elementos do circuito ilustrado na Figura 4.1 formam os dados de entrada do programa. Os resultados numéricos obtidos para as funções de transferência não-lineares com a implementação do programa estão descritos na Tabela 4.2 para as frequências $f_1 = 2,5\text{MHz}$, $f_2 = 3\text{MHz}$ e $f_3 = 3\text{MHz}$ e na Tabela 4.3 considerando $f_1 = 30\text{MHz}$, $f_2 = 51,4\text{MHz}$ e $f_3 = 51,4\text{MHz}$.

Tabela 4.2: Funções de Transferência Lineares e Não-Lineares do Amplificador em $f_1 = 2,5\text{MHz}$, $f_2 = 3\text{MHz}$, $f_3 = f_2$.

Função de Transferência	Magnitude em Valor Absoluto	Magnitude em dB	Fase em Graus	Frequência em MHz
$A_1(f_1)$	0,35	-9	2,05	2,5
$B_1(f_1)$	0,23	-12,67	9,48	2,5
$C_1(f_1)$	4,51	13,08	-161,04	2,5
$A_1(f_2)$	0,35	-9,12	-4,73	3
$B_1(f_2)$	0,23	-12,77	-13,64	3
$C_1(f_2)$	4,43	12,93	158,17	3
$A_2(-f_1, f_2)$	0,71	-2,97	162,93	0,5
$B_2(-f_1, f_2)$	0,79	-2,05	168,13	0,5
$C_2(-f_1, f_2)$	6,88	16,75	160,73	0,5
$A_3(-f_1, f_2, f_2)$	2,26	7,08	-29,10	3,5
$B_3(-f_1, f_2, f_2)$	2,71	8,66	-27,93	3,5
$C_3(-f_1, f_2, f_2)$	21,15	26,51	-32,42	3,5
$A_3(f_2, f_2, -f_2)$	2,14	6,61	-18,52	3
$B_3(f_2, f_2, -f_2)$	2,57	8,19	-18,64	3
$C_3(f_2, f_2, -f_2)$	20,07	26,05	-20,71	3

Tabela 4.3: Funções de Transferência Lineares e Não-Lineares do Amplificador em $f_1 = 30\text{MHz}$, $f_2 = 51,4\text{MHz}$, $f_3 = f_2$.

Função de Transferência	Magnitude em Valor Absoluto	Magnitude em dB	Fase em Graus	Frequência em MHz
$A_1(f_1)$	0,19	-14,42	15,75	30
$B_1(f_1)$	0,07	-23,09	71,99	30
$C_1(f_1)$	1,26	2,00	-98,12	30
$A_1(f_2)$	0,18	-14,89	-10,48	51,4
$B_1(f_2)$	0,04	-27,96	-77,57	51,4
$C_1(f_2)$	0,75	-2,499	86,52	51,4
$A_2(-f_1, f_2)$	0,03	-30,46	175,33	21,4
$B_2(-f_1, f_2)$	0,04	-27,96	174,78	21,4
$C_2(-f_1, f_2)$	0,28	-11,06	167,08	21,4
$A_3(-f_1, f_2, f_2)$	0,02	-33,98	-82,59	72,8
$B_3(-f_1, f_2, f_2)$	0,023	-32,77	-84,77	72,8
$C_3(-f_1, f_2, f_2)$	0,16	-15,92	-99,45	72,8
$A_3(f_2, f_2, -f_2)$	0,011	-39,17	-78,15	51,4
$B_3(f_2, f_2, -f_2)$	0,013	-37,72	-79,87	51,4
$C_3(f_2, f_2, -f_2)$	0,094	-20,54	-88,38	51,4

Capítulo 5

Análise dos Efeitos de Distorções Empregando as Funções de Transferência Não-Lineares

As funções de transferência não-lineares do circuito ilustrado na Figura 4.1 foram utilizadas neste capítulo com objetivo de verificar os efeitos de distorção de intermodulação de segunda e terceira ordem, os efeitos de distorção relacionados ao ganho de compressão e a resposta em frequência do sistema.

5.1 Distorção de Intermodulação de Segunda e Terceira Ordens para Dois Tons de Excitação

As potências dos componentes de intermodulação $(f_2 - f_1)$ e $(2f_2 - f_1)$ e do componente fundamental em f_1 dissipadas na saída do amplificador apresentado na Figura 4.1 são definidas, respectivamente, como

$$\begin{aligned} P_L[f_{(0,0,1,0)}] &= P_{AS} + 20\log_{10}[|H_1(f_1)|] + 6\text{dBm} \\ P_L[f_{(0,1,0,1)}] &= 2P_{AS} + 20\log_{10}[|H_2(-f_1, f_2)|] + 2\text{dBm} \\ P_L[f_{(0,1,0,2)}] &= 3P_{AS} + 20\log_{10}[|H_3(-f_1, f_2, f_2)|] - 4, 4\text{dBm}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Onde, P_{AS} é a potência disponível de cada tom de excitação. Segue-se que a potência disponível dos tons de excitação em f_1 e f_2 foram ajustados em valores iguais. Ainda, $P_L(f_m)$ é a potência dos componentes gerados na saída do circuito.

Nota-se que para o componente fundamental $f_m = f_{(0,0,1,0)}$, para o componente de intermodulação de segunda ordem $f_m = f_{(0,1,0,1)}$ e para o componente de intermodulação de terceira ordem $f_m = f_{(0,1,0,2)}$.

Cabe destacar que a dedução (5.1) foi baseada no livro de WIENER [2] e está detalhada no Anexo B.

As funções de transferência que relacionam a saída e a entrada do circuito foram denotadas na Seção 4.2 por $C_1(f_1)$, $C_2(f_1, f_2)$ e $C_3(f_1, f_2, f_3)$. Neste caso, é evidente que em (5.1),

$$\begin{aligned} H_1(f_1) &= C_1(f_1) \\ H_2(-f_1, f_2) &= C_2(-f_1, f_2) \\ H_3(-f_1, f_2, f_2) &= C_3(-f_1, f_2, f_2). \end{aligned} \quad (5.2)$$

No intuito de caracterizar a distorção de segunda e terceira ordens do circuito, primeiramente, considera-se os tons de excitação nas frequências $f_1 = 2,5\text{MHz}$ e $f_2 = 3\text{MHz}$. Ao substituir os valores de $|C_1(f_1)|$, $|C_2(-f_1, f_2)|$ e $|C_3(-f_1, f_2, f_2)|$ da Tabela 4.2 em (5.1), tem-se

$$\begin{aligned} P_L[f_{(0,0,1,0)}] &= P_{AS} + 13,08 + 6 \\ &= P_{AS} + 19,08 \text{ dBm} \\ P_L[f_{(0,1,0,1)}] &= 2P_{AS} + 16,75 + 2 \\ &= 2P_{AS} + 18,75 \text{ dBm} \\ P_L[f_{(0,1,0,2)}] &= 3P_{AS} + 26,51 - 4,4 \\ &= 3P_{AS} + 22,11 \text{ dBm}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

As três equações de (5.3) foram traçadas na Figura 5.1 e também foram lançadas nesta Figura os resultados experimentais das potências dissipadas na carga para os componentes de primeira, segunda e terceira ordens, publicados por GRAHAM & EHRMAN [1]. A relação entre os valores medidos e calculados se aproximaram para sinais de entrada com potência disponível até aproximadamente -16 dBm. Acima de -16 dBm os resultados experimentais começam a se afastar dos valores teóricos, pois o circuito começa a entrar na região de saturação e o ganho começa a cair.

Neste caso, o modelo teórico não consegue prever com precisão esse tipo de não-linearidade, que é caracterizada como uma não-linearidade forte. Isto porque, a modelagem matemática realizada para o dispositivo levou em consideração o cálculo das funções de transferência não-lineares até a terceira ordem.

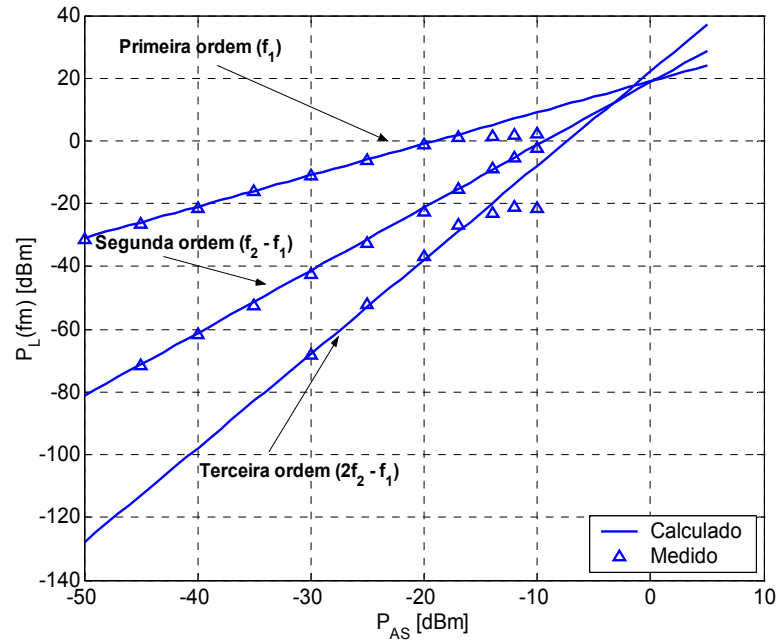


Figura 5.1: Valores medidos e calculados dos produtos de distorção de dois tons ($f_1 = 2,5\text{MHz}$, $f_2 = 3\text{MHz}$).

Para prever as distorções no sistema oriundas de não-linearidades fortes teria que se implementar, no modelo teórico, o cálculo das funções de transferência não-lineares acima de terceira ordem. No entanto, este não é o foco desse trabalho, que se restringe a desenvolver um modelo teórico para um sistema, levando em consideração somente as não-linearidades fracas.

Considerou-se também os tons de excitação nas frequências $f_1 = 30\text{MHz}$ e $f_2 = 51,4\text{MHz}$. Substituindo $|C_1(f_1)|$, $|C_2(-f_1, f_2)|$ e $|C_3(-f_1, f_2, f_2)|$ da Tabela 4.3 em (5.1), tem-se

$$\begin{aligned}
 P_L[f_{(0,0,1,0)}] &= P_{AS} + 2 + 6 \\
 &= P_{AS} + 8 \text{ dBm} \\
 P_L[f_{(0,1,0,1)}] &= 2P_{AS} - 11,06 + 2 \\
 &= 2P_{AS} - 9,06 \text{ dBm} \\
 P_L[f_{(0,1,0,2)}] &= 3P_{AS} - 15,92 - 4,4 \\
 &= 3P_{AS} - 20,32 \text{ dBm.}
 \end{aligned}$$

(5.4)

Similarmente, as equações em (5.4) foram traçadas na Figura 5.2 e novamente os resultados experimentais obtidos por GRAHAM & EHRMAN [1] também

foram lançados nesta Figura. Verificou-se que os valores medidos e calculados

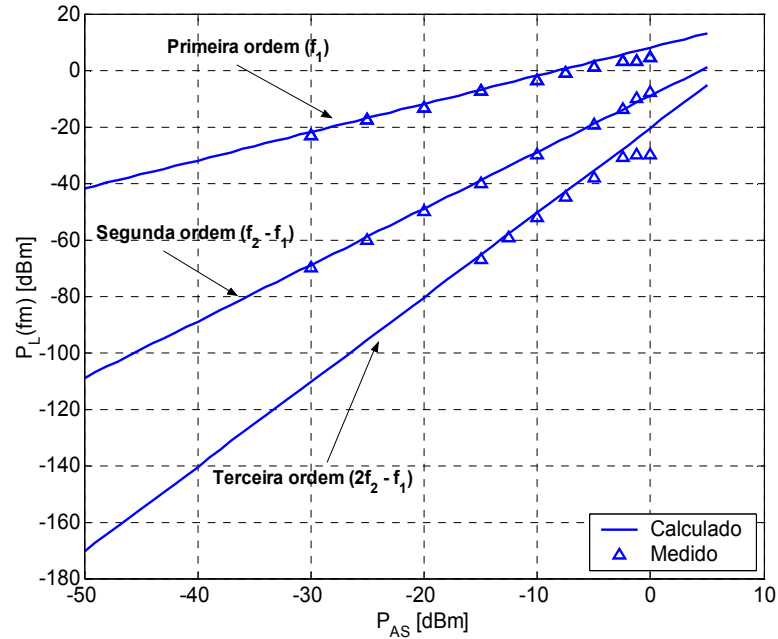


Figura 5.2: Valores medidos e calculados dos produtos de distorção de dois tons ($f_1 = 30\text{MHz}$, $f_2 = 51,4\text{MHz}$).

se aproximaram para sinais de entrada com potência disponível até -5dBm .

5.1.1 Ponto de Interceptação de Terceira Ordem

Analisando o gráfico ilustrado na Figura 5.1, define-se que o ponto de interceptação de terceira ordem denotado por $I_3(f_m)$ é a potência média de saída em que a curva de terceira ordem intercepta a curva de primeira ordem. Baseado na teoria de WIENER [2], o ponto de interceptação de terceira ordem do circuito apresentado na Figura 4.1 é dado por

$$I_3(f_m) = 10\log_{10} \left[\frac{|H_1(f_1)|^3}{|H_3(-f_1, f_2, f_2)|} \right] + 11,2 \text{ dBm}. \quad (5.5)$$

Segue-se que a dedução de (5.5) foi apresentada no Anexo B. Substituindo $|C_1(f_1)|$ e $|C_3(-f_1, f_2, f_2)|$ da Tabela 4.2 em (5.5), o valor numérico do ponto de interceptação para os tons de entrada em $f_1 = 2,5\text{MHz}$ e $f_2 = 3\text{MHz}$ é

$$I_3[f_{(0,1,0,2)}] = 17,57 \text{ dBm}. \quad (5.6)$$

Note que o valor obtido em (5.6) está de acordo com o ponto de interceptação de terceira ordem, que pode ser verificado a partir do gráfico apresentado na Figura 5.1.

De forma análoga, considerando os tons de excitação em $f_1 = 30\text{MHz}$ e $f_2 = 51,4\text{MHz}$, o valor numérico de $I_3(f_m)$ é dado por

$$I_3[f_{(0,1,0,2)}] = 22,29 \text{ dBm.} \quad (5.7)$$

5.2 Efeitos de Compressão no Ganho de um Amplificador

Ao receber uma excitação suficientemente elevada todo amplificador entra em saturação, ocasionando assim a compressão ou a expansão de seu ganho. A potência disponível dos tons de excitação necessária para produzir uma quantidade específica de compressão ou expansão é definida como

$$P_{AS} = 10 \log_{10} \left[GCE \operatorname{Re} \left\{ \frac{H_1(f_1)}{H_3(-f_1, f_1, f_1)} \right\} \right] + 10 \log_{10} \left[\frac{19,4}{R_S} \right] \text{ dBm.} \quad (5.8)$$

Onde GCE é definido como a razão de compressão/expansão no ganho e R_S é a parte real da impedância da fonte de excitação do circuito. A dedução matemática de (5.8), realizada por WIENER [2], também foi apresentada no Anexo B.

Considerando 1 dB de compressão o erro em calcular P_{AS} utilizando (5.8) não passa de 0,25 dB. Ao estudar a linearidade dos circuitos esta compressão de 1 dB, ou melhor dizendo, o ponto de compressão de 1 dB é freqüentemente empregado como base de comparação.

Com o intuito de obter as características teóricas de compressão no ganho do amplificador de RF mostrado na Figura 4.1, substituiu-se $C_1(f_2)$, $C_3(f_2, f_2, -f_2)$, da Tabela 4.2 e $R_S = 50 \Omega$ em (5.8). Os dados práticos da característica de ganho de compressão deste amplificador também foram obtidos de GRAHAM & EHRMAN [1] e comparados com os cálculos teóricos. Os resultados obtidos fazendo $f_2 = 3\text{MHz}$ estão ilustrados na Figura 5.3.

Da mesma forma, os valores experimentais da característica de ganho de compressão do amplificador em $f_2 = 51,4 \text{ MHz}$ e calculados ao substituir $C_1(f_2)$ e $C_3(f_2, f_2, -f_2)$ da Tabela 4.3 e $R_S = 50 \Omega$ em (5.8) estão ilustrados na Figura 5.4.

Verificou-se que o erro existente entre as curvas teóricas e as características experimentais de ganho de compressão está dentro do previsto pelo modelo teórico,

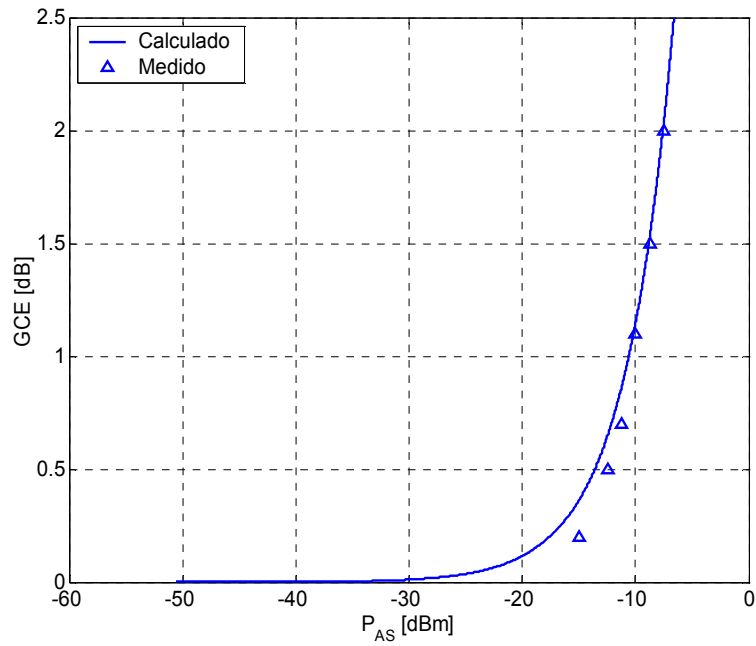


Figura 5.3: Curva de ganho de compressão para o amplificador em $f_2 = 3\text{MHz}$.

que é de aproximadamente $1/4$ dB para a razão de compressão de até 1 dB.

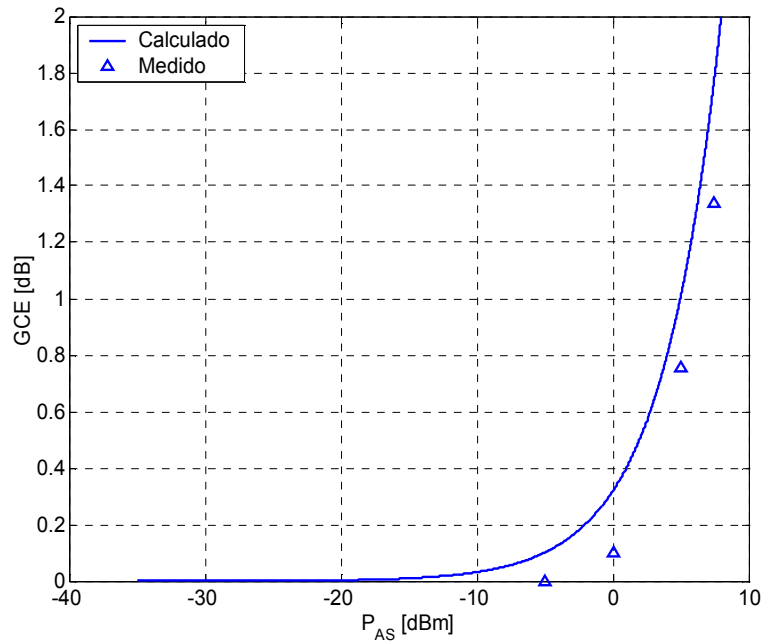


Figura 5.4: Curva de ganho de compressão para o amplificador em $f_2 = 51,4\text{MHz}$.

5.2.1 Resposta em Frequência das Funções de Transferência de Volterra

Nesta Seção analisou-se a variação das funções de transferência de Volterra com relação a frequência. As curvas teóricas da resposta em frequência tanto para a função de transferência de primeira ordem, quanto para a função de transferência não-linear de segunda e terceira ordens foram determinadas programando suas respectivas equações, obtidas da modelagem matemática realizada no Capítulo 4 em função das frequências dos tons de entrada.

Para se obter a resposta das funções de transferência realizou-se uma varredura nas frequências dos tons de entrada. Cabe destacar que a listagem dos programas implementados em MATLAB [16] para traçar as curvas teóricas foi apresentado no Anexo D.

5.2.1.1 Resposta em Frequência da Função de Transferência Linear

A magnitude da função de transferência linear $C_1(f)$, do circuito ilustrado na Figura 4.1 foi apresentada na Figura 5.5. Nota-se que os valores teóricos se aproximaram dos resultados experimentais, obtidos de GRAHAM & EHRMAN [1], considerando uma varredura entre 1 MHz e 100MHz.

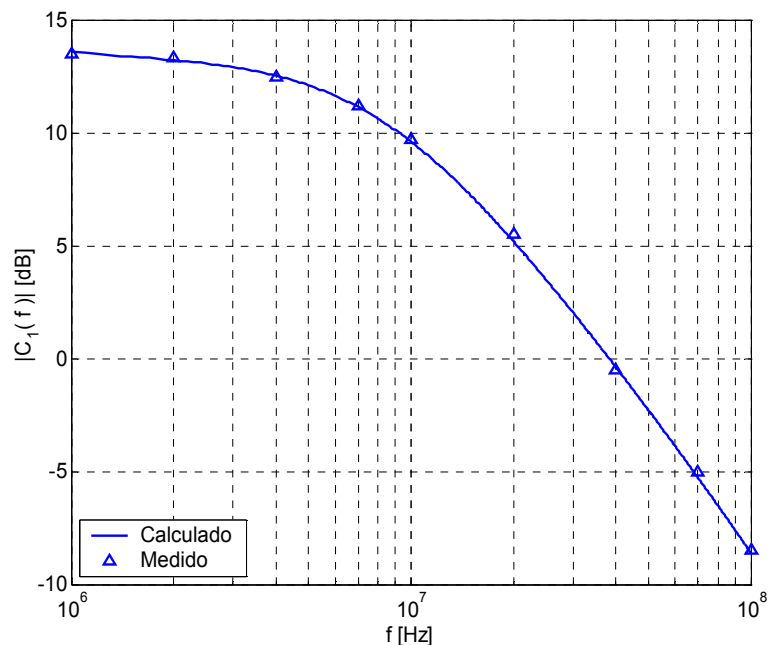


Figura 5.5: Magnitude da função de transferência linear.

Da Figura 5.5 pode-se notar que a resposta linear em frequências mais al-

tas, que vai de 10 a 100MHz, cai de 20dB/dec. Isto sugere que $C_1(f)$ torna-se inversamente proporcional a f em frequências elevadas.

5.2.1.2 Resposta em Frequência da Função de Transferência Não-Linear de Segunda Ordem

A resposta da função de transferência não-linear de segunda ordem foi ilustrada na Figura 5.6, onde o componente de intermodulação em $f_2 - f_1$ foi de interesse. Para obter essa resposta variou-se a frequência f_2 de 3 a 50MHz e obteve-se f_1 em função de f_2 , de acordo com a seguinte relação

$$f_2 - f_1 = 0,5 \text{ MHz.} \quad (5.9)$$

Neste caso os dois tons que excitam o amplificador foram separados de 0,5MHz e a frequência de intermodulação permanece fixa à medida em que as frequências são variadas. Da Figura 5.6, note que na região de frequências elevadas, $|C_2(-f_1, f_2)|$ cai com uma inclinação de 40dB/dec. Verificou-se que os resultados experimentais de GRAHAM & EHRMAN [1] e os valores calculados tiveram razoável aproximação em toda a faixa de varredura.

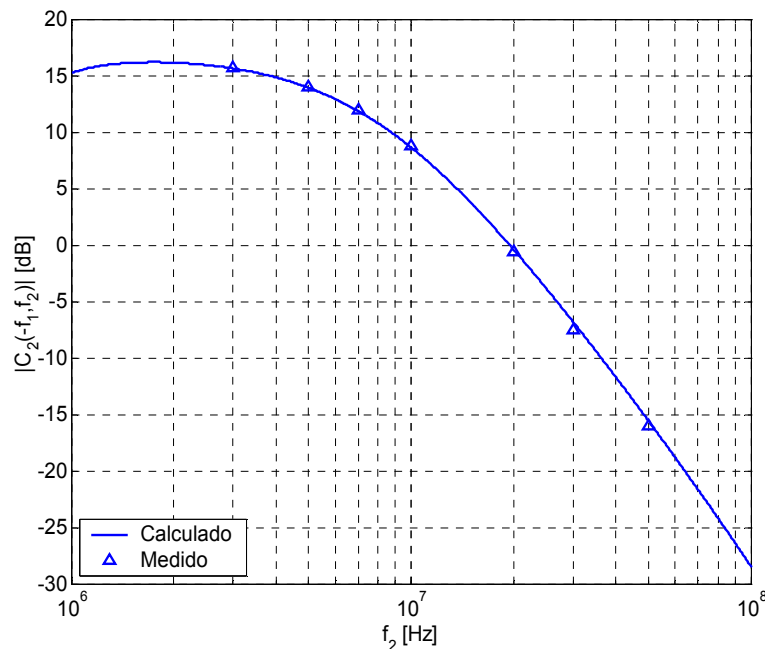


Figura 5.6: Magnitude da função de transferência não-linear de segunda ordem.

Como a função de transferência não-linear de segunda ordem está em função de duas frequências, seria interessante traçar a resposta em frequência desta função

em três dimensões. Isto possibilita analisar a magnitude da função nas frequências f_1 e f_2 ao mesmo tempo. O gráfico da função de transferência não-linear de segunda ordem em três dimensões está ilustrado na Figura 5.7. Verificou-se nesta

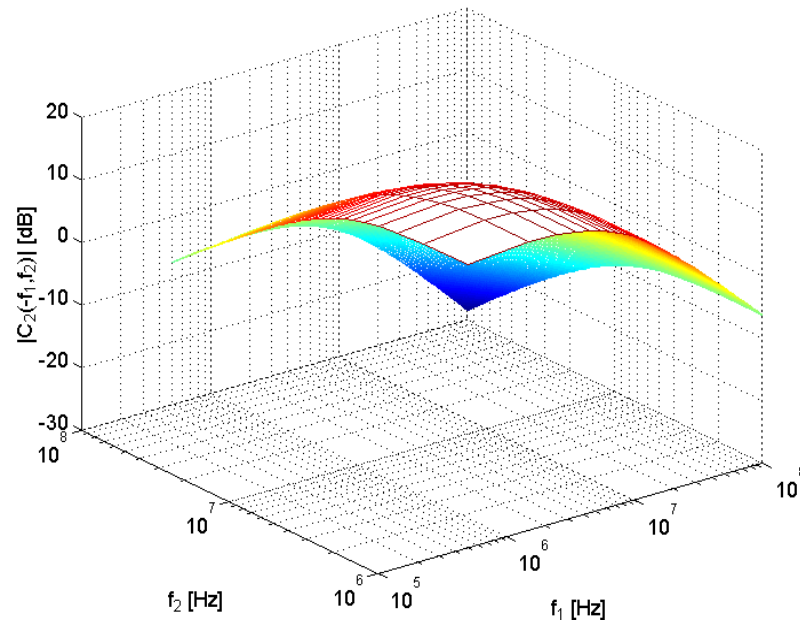


Figura 5.7: Magnitude da função de transferência não-linear de segunda ordem em três dimensões.

Figura que a variação da resposta em f_1 é bastante similar à variação em f_2 , pois a diferença entre as frequências f_1 e f_2 é muito pequena.

5.2.1.3 Resposta em Frequência da Função de Transferência Não-Linear de Terceira Ordem

Os dados experimentais de GRAHAM & EHRMAN [1] e os valores calculados para a função de transferência não-linear de terceira ordem do amplificador, considerando o componente de intermodulação ($2f_2 - f_1$) foram apresentados na Figura 5.8. A relação entre as frequências de entrada continua sendo a mesma que foi imposta em (5.9). Aparentemente o gráfico de $|C_3(-f_1, f_2, f_2)|$ tem o mesmo formato geral que os gráficos de magnitude da função de transferência linear e de segunda ordem, no entanto $|C_3(-f_1, f_2, f_2)|$ cai com uma taxa de aproximadamente 60dB/dec na região de frequências elevadas, entre 10 e 100MHz.

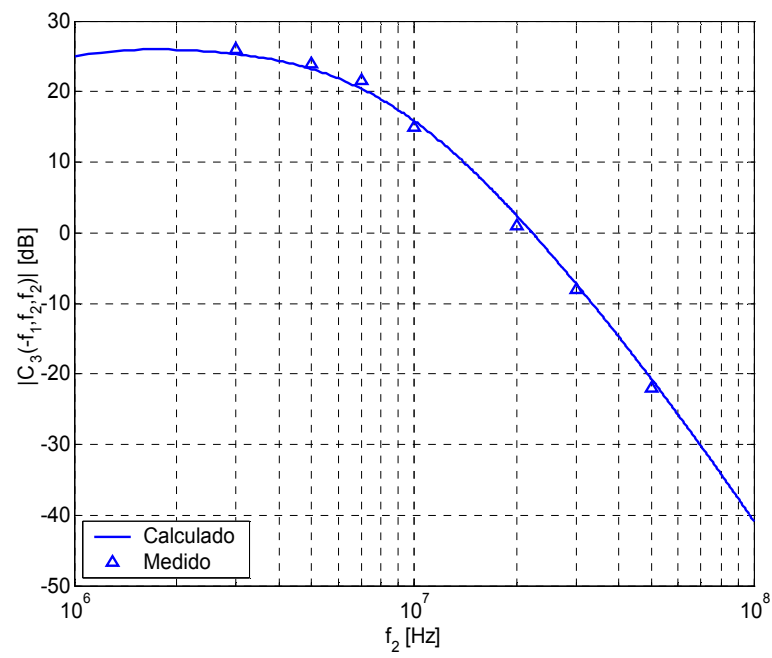


Figura 5.8: Magnitude da função de transferência não-linear de terceira ordem.

Capítulo 6

Efeitos de Distorções

Não-Lineares em um

Amplificador de Microondas

Empregando as séries de Volterra realizou-se neste capítulo a modelagem de um amplificador de microondas. O propósito é determinar o nível dos produtos de intermodulação na saída do circuito não-linear e a variação do ponto de interceptação de terceira ordem com relação a frequência.

6.1 Modelagem do Amplificador

O circuito a ser analisado utiliza um transistor GaAs MESFET Avantek AT10650, um dispositivo similar em estrutura e desempenho a vários transistores MESFET's comerciais.

A Figura 6.1 ilustra o diagrama esquemático do amplificador. O modelo não-linear incremental equivalente do transistor GaAs MESFET foi baseado nos trabalhos de MAAS [3], MAAS & CROSMUN [11] e CROSMUN & MAAS [12] e está apresentado na Figura 6.2. HUANG & CHU [15] empregaram um dispositivo ativo de modelo não-linear similar, para realizar a análise dos efeitos não-lineares em osciladores por meio das séries de Volterra. Os parâmetros internos deste modelo são definidos como:

R_g Resistência de gate;

R_s Resistência de contato de fonte;

R_d Resistência de contato de dreno;

R_i Resistência intrínseca da região semi-condutora;

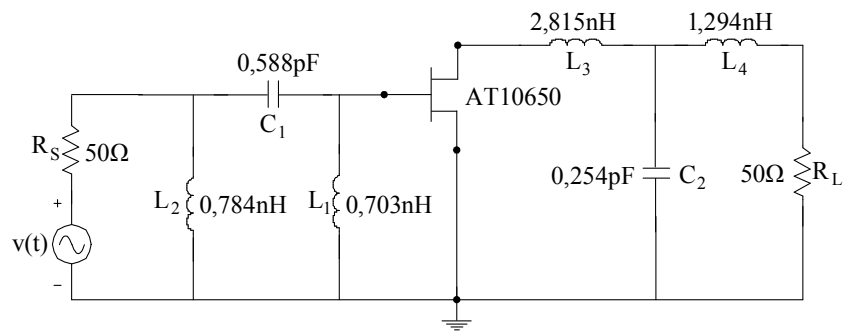


Figura 6.1: Diagrama esquemático do circuito de amplificador com transistor GaAs MESFET.

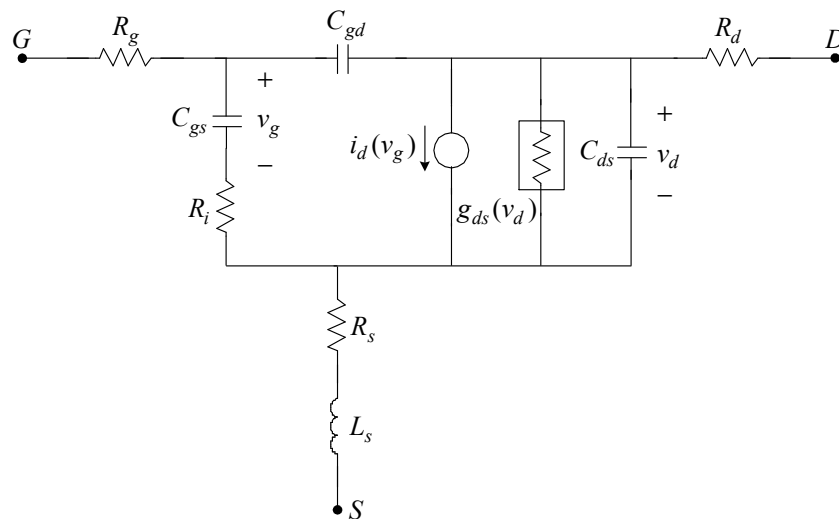


Figura 6.2: Modelo não-linear incremental equivalente do transistor GaAs MESFET.

- C_{ds} Capacitância entre dreno e fonte;
- C_{gs} Capacitância entre gate e fonte;
- C_{gd} Capacitância de realimentação existente entre dreno e gate;
- L_s Indutância do terminal de fonte;
- $i_d(v_g)$ Fonte de corrente não-linear controlada por tensão;
- $g_{ds}(v_d)$ Condutância não-linear.

Segue-se que o dispositivo ilustrado na Figura 6.2 apresenta dois elementos não-lineares, a fonte de corrente não-linear controlada por tensão $i_d(v_g)$ e a condutância não-linear de dreno $g_{ds}(v_d)$.

A não-linearidade da fonte de corrente controlada por tensão é caracterizada

por uma expansão em séries de Taylor, definida por

$$i_d(v_g) = g_{s1}v_g + g_{s2}v_g^2 + g_{s3}v_g^3. \quad (6.1)$$

O comportamento não-linear da condutância $g_{ds}(v_d)$ também é caracterizado por expansão em séries de Taylor, da seguinte forma

$$i_{ds}(v_d) = g_{d1}v_d + g_{d2}v_d^2 + g_{d3}v_d^3. \quad (6.2)$$

Note que (6.1) e (6.2) foram truncadas no termo de terceiro grau.

Os valores dos parâmetros lineares e dos coeficientes das séries de Taylor em (6.1) e (6.2) para o transistor AT10650 estão apresentados na Tabela 6.1. Cabe destacar que estes dados foram obtidos por MAAS [3].

Tabela 6.1: Parâmetros do Transistor AT10650.

Descrição	Valor
R_g	2Ω
R_s	$1,5 \Omega$
R_d	$1,5 \Omega$
R_i	2Ω
C_{ds}	$0,1 \text{ pF}$
C_{gs}	$0,25 \text{ pF}$
C_{gd}	$0,03 \text{ pF}$
L_s	$0,04 \text{ nF}$
g_{s1}	$0,03311$
g_{s2}	$0,00401$
g_{s3}	$-0,00426$
g_{d1}	$0,00367$
g_{d2}	$-0,00370$
g_{d3}	$0,000144$

Calculando no circuito da Figura 6.1 a impedância e a fonte de Thevenin equivalente vistas pelo transistor, resulta em

$$Z_S(jw) = \frac{(jw)^3 C_1 L_1 L_2 R_S + (jw)^2 L_1 L_2 + jw L_1 R_S}{(jw)^3 C_1 L_1 L_2 + (jw)^2 C_1 R_S (L_1 + L_2) + jw L_2 + R_S}. \quad (6.3)$$

$$v_S(t) = \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} v(t). \quad (6.4)$$

Onde,

$$\vartheta_1 = (jw)^5 C_1^2 L_1^2 L_2 + (jw)^3 C_1 L_1 L_2,$$

$$\begin{aligned} \vartheta_2 = & (jw)^5 C_1^2 L_1^2 L_2 + (jw)^4 C_1^2 L_1 R_S (L_1 + L_2) + 2(jw)^3 C_1 L_1 L_2 \\ & + (jw)^2 C_1 R_S (2L_1 + L_2) + jw L_2 + R_S. \end{aligned}$$

Calculando, também, a impedância de carga no circuito da Figura 6.1 obtém-se

$$Z_L(jw) = \frac{jwL_A + R_L}{(jw)^2 C_2 L_A + jw C_2 R_L + 1}. \quad (6.5)$$

Utilizando (6.3), (6.4) e (6.5) no circuito da Figura 6.1 e substituindo o transistor GaAs MESFET pelo seu modelo não-linear equivalente, obtém-se o circuito apresentado na Figura 6.3.

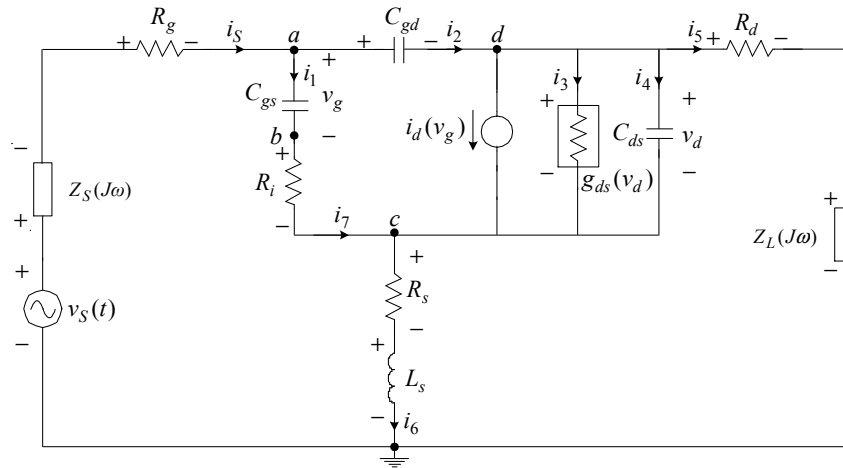


Figura 6.3: Modelo não-linear incremental equivalente do amplificador com transistor GaAs MESFET.

6.2 Solução do Circuito Não-linear Empregando as Séries de Volterra

Aplicando a lei de Kirchhoff para correntes aos nós **a**, **b**, **c** e **d** do circuito ilustrado na Figura 6.3, obtém-se

$$\begin{aligned}
 i_S(t) &= i_1(t) + i_2(t) \\
 i_1(t) &= i_7(t) \\
 i_7(t) + i_d(t) + i_3(t) + i_4(t) &= +i_6(t) \\
 i_2(t) &= i_d(t) + i_3(t) + i_4(t) + i_5(t)
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Representando as correntes de (6.6) em termos das tensões de nó e da tensão da fonte de excitação, obtém-se

$$\begin{aligned}
 \frac{v_S(t) - a(t)}{Z_S(j\omega) + Rg} &= C_{gs} \frac{d}{dt}[a(t) - b(t)] + C_{gd} \frac{d}{dt}[a(t) - d(t)] \\
 C_{gs} \frac{d}{dt}[a(t) - b(t)] &= \frac{b(t) - c(t)}{R_i} \\
 \frac{b(t) - c(t)}{R_i} + g_{s1}[a(t) - b(t)] + \sum_{k=2}^3 g_{sk}[a(t) - b(t)]^k + g_{d1}[d(t) - c(t)] \\
 + \sum_{k=2}^3 g_{dk}[d(t) - c(t)]^k + C_{ds} \frac{d}{dt}[d(t) - c(t)] &= \frac{c(t)}{R_S + j\omega L} \\
 C_{gd} \frac{d}{dt}[a(t) - d(t)] &= g_{s1}[a(t) - b(t)] + \sum_{k=2}^3 g_{sk}[a(t) - b(t)]^k + g_{d1}[d(t) - c(t)] \\
 + \sum_{k=2}^3 g_{dk}[d(t) - c(t)]^k + C_{ds} \frac{d}{dt}[d(t) - c(t)] + \frac{d(t)}{R_d + Z_L(j\omega)}.
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

Onde $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ e $d(t)$ representam as tensões dos nós **a**, **b**, **c** e **d**, respectivamente. Agrupando as equações em (6.7) de modo que somente os termos lineares relacionados com as tensões de nó apareçam no lado esquerdo da igualdade e

introduzindo o operador diferencial $p = d/dt$, tem-se

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{Z_S(jw) + R_g} + pC_{gs} + pC_{gd} \right] a(t) + [-pC_{gs}]b(t) + [-pC_{gd}]d(t) \\
& = \left[\frac{1}{Z_S(jw) + R_g} \right] v_S(t) \\
& [pC_{gs}]a(t) + \left[-pC_{gs} - \frac{1}{R_i} \right] b(t) + \left[\frac{1}{R_i} \right] c(t) = 0 \\
& [g_{s1}]a(t) + \left[\frac{1}{R_i} - g_{s1} \right] b(t) + \left[-\frac{1}{R_i} - g_{d1} - pC_{ds} - \frac{1}{R_s + jwL} \right] c(t) \\
& + [g_{d1} + pC_{ds}]d(t) = - \sum_{k=2}^3 g_{sk} [a(t) - b(t)]^k - \sum_{k=2}^3 g_{dk} [d(t) - c(t)]^k \\
& [pC_{gd} - g_{s1}]a(t) + [g_{s1}]b(t) + [g_{d1} + pC_{ds}]c(t) \\
& + \left[-pC_{gd} - g_{d1} - pC_{ds} - \frac{1}{R_d + Z_L(jw)} \right] d(t) = \sum_{k=2}^3 g_{sk} [a(t) - b(t)]^k \\
& + \sum_{k=2}^3 g_{dk} [d(t) - c(t)]^k. \tag{6.8}
\end{aligned}$$

Com a introdução de notação de matriz em (6.8), obtém-se

$$[Y(p)]e(t) = u(t) + j(t) \tag{6.9}$$

onde, define-se

$[Y(p)]$ matriz admitância [4x4] do circuito;
 $e(t)$ vetor de tensões [4x1], composto pelas tensões de nó;
 $u(t)$ vetor de fonte independente [4x1], composto por todas as fontes de excitação independentes;
 $j(t)$ vetor de corrente não-linear [4x1], composto de todos os termos de segunda e terceira ordens, resultantes das expansões em séries de Taylor dos elementos não-lineares.

De acordo com as equações em (6.8), a matriz admitância é dada por

$$[Y(p)] = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} & y_{44} \end{bmatrix}. \tag{6.10}$$

Os coeficientes de $[Y(p)]$ são definidos como

$$\begin{aligned}
y_{11} &= \frac{1}{Z_S(jw) + R_g} + pC_{gs} + pC_{gd}; \\
y_{12} &= -pC_{gs}; \\
y_{13} &= 0; \\
y_{14} &= -pC_{gd}; \\
y_{21} &= pC_{gs}; \\
y_{22} &= -pC_{gs} - \frac{1}{R_i}; \\
y_{23} &= \frac{1}{R_i}; \\
y_{24} &= 0; \\
y_{31} &= g_{s1}; \\
y_{32} &= \frac{1}{R_i} - g_{s1}; \\
y_{33} &= -\frac{1}{R_i} - g_{d1} - pC_{ds} - \frac{1}{R_s + jwL}; \\
y_{34} &= g_{d1} + pC_{ds}; \\
y_{41} &= pC_{gd} - g_{s1}; \\
y_{42} &= g_{s1}; \\
y_{43} &= g_{d1} + pC_{ds}; \\
y_{44} &= -pC_{gd} - g_{d1} - pC_{ds} - \frac{1}{R_d + Z_L(jw)}. \tag{6.11}
\end{aligned}$$

E ainda,

$$e(t) = \begin{bmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \\ d(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} \frac{v_S(t)}{Z_S(jw) + R_g} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$j(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sum_{k=2}^3 g_{sk}[a(t) - b(t)]^k - \sum_{k=2}^3 g_{dk}[d(t) - c(t)]^k \\ \sum_{k=2}^3 g_{sk}[a(t) - b(t)]^k + \sum_{k=2}^3 g_{dk}[d(t) - c(t)]^k \end{bmatrix}. \quad (6.12)$$

6.2.1 Funções de Transferência Lineares

As funções de transferência de *i*-ésima ordem de $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ e $d(t)$ são denotadas por $A_i(f_1, f_2, \dots, f_i)$, $B_i(f_1, f_2, \dots, f_i)$, $C_i(f_1, f_2, \dots, f_i)$ e $D_i(f_1, f_2, \dots, f_i)$. Segue-se que as funções de transferência lineares do circuito apresentado na Figura 6.1, são dadas por

$$\begin{bmatrix} A_1(f_1) \\ B_1(f_1) \\ C_1(f_1) \\ D_1(f_1) \end{bmatrix} = \left[Y(j2\pi f_1) \right]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2[Z_S(jw) + R_g]} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.13)$$

6.2.2 Funções de Transferência Não-Lineares de Segunda Ordem

As funções de transferência não-lineares de segunda ordem do circuito são

$$\begin{bmatrix} A_2(f_1, f_2) \\ B_2(f_1, f_2) \\ C_2(f_1, f_2) \\ D_2(f_1, f_2) \end{bmatrix} = \left[Y[j2\pi(f_1 + f_2)] \right]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\xi_{1S} \\ \frac{1}{2}\xi_{2S} \\ \frac{1}{2}\xi_{3S} \\ \frac{1}{2}\xi_{4S} \end{bmatrix}. \quad (6.14)$$

Segue-se que ξ_{1S} , ξ_{2S} , ξ_{3S} e ξ_{4S} são definidos como

$$\begin{aligned}
 \xi_{1S} &= 0; \\
 \xi_{2S} &= 0; \\
 \xi_{3S} &= -g_{s2} \left[\overline{A_1(f_1)A_1(f_2)} - 2\overline{A_1(f_1)B_1(f_2)} + \overline{B_1(f_1)B_1(f_2)} \right] \\
 &\quad - g_{d2} \left[\overline{D_1(f_1)D_1(f_2)} - 2\overline{C_1(f_1)D_1(f_2)} + \overline{C_1(f_1)C_1(f_2)} \right]; \\
 \xi_{4S} &= g_{s2} \left[\overline{A_1(f_1)A_1(f_2)} - 2\overline{A_1(f_1)B_1(f_2)} + \overline{B_1(f_1)B_1(f_2)} \right] \\
 &\quad + g_{d2} \left[\overline{D_1(f_1)D_1(f_2)} - 2\overline{C_1(f_1)D_1(f_2)} + \overline{C_1(f_1)C_1(f_2)} \right]; \quad (6.15)
 \end{aligned}$$

6.2.3 Funções de Transferência Não-Lineares de Terceira Ordem

As funções de transferência não-lineares de terceira ordem do circuito são expressas como

$$\begin{bmatrix} A_3(f_1, f_2, f_3) \\ B_3(f_1, f_2, f_3) \\ C_3(f_1, f_2, f_3) \\ D_3(f_1, f_2, f_3) \end{bmatrix} = \left[Y[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)] \right]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{6}\xi_{1T} \\ \frac{1}{6}\xi_{2T} \\ \frac{1}{6}\xi_{3T} \\ \frac{1}{6}\xi_{4T} \end{bmatrix}. \quad (6.16)$$

Onde,

$$\begin{aligned}
\xi_{1T} &= 0; \\
\xi_{2T} &= 0; \\
\xi_{3T} &= -2g_{s2} \left[\overline{A_1(f_1)A_2(f_2, f_3)} - \overline{A_1(f_1)B_2(f_2, f_3)} - \overline{B_1(f_1)A_2(f_2, f_3)} \right. \\
&\quad \left. + \overline{B_1(f_1)B_2(f_2, f_3)} \right] - g_{s3} \left[\overline{A_1(f_1)A_1(f_2)A_1(f_3)} - 3\overline{B_1(f_1)A_1(f_2)A_1(f_3)} \right. \\
&\quad \left. + 3\overline{A_1(f_1)B_1(f_2)B_1(f_3)} - \overline{B_1(f_1)B_1(f_2)B_1(f_3)} \right] \\
&\quad - 2g_{d2} \left[\overline{D_1(f_1)D_2(f_2, f_3)} - \overline{D_1(f_1)C_2(f_2, f_3)} - \overline{C_1(f_1)D_2(f_2, f_3)} \right. \\
&\quad \left. + \overline{C_1(f_1)C_2(f_2, f_3)} \right] - g_{d3} \left[\overline{D_1(f_1)D_1(f_2)D_1(f_3)} - 3\overline{C_1(f_1)D_1(f_2)D_1(f_3)} \right. \\
&\quad \left. + 3\overline{D_1(f_1)C_1(f_2)C_1(f_3)} - \overline{C_1(f_1)C_1(f_2)C_1(f_3)} \right]; \\
\xi_{4T} &= 2g_{s2} \left[\overline{A_1(f_1)A_2(f_2, f_3)} - \overline{A_1(f_1)B_2(f_2, f_3)} - \overline{B_1(f_1)A_2(f_2, f_3)} \right. \\
&\quad \left. + \overline{B_1(f_1)B_2(f_2, f_3)} \right] + g_{s3} \left[\overline{A_1(f_1)A_1(f_2)A_1(f_3)} - 3\overline{B_1(f_1)A_1(f_2)A_1(f_3)} \right. \\
&\quad \left. + 3\overline{A_1(f_1)B_1(f_2)B_1(f_3)} - \overline{B_1(f_1)B_1(f_2)B_1(f_3)} \right] \\
&\quad + 2g_{d2} \left[\overline{D_1(f_1)D_2(f_2, f_3)} - \overline{D_1(f_1)C_2(f_2, f_3)} - \overline{C_1(f_1)D_2(f_2, f_3)} \right. \\
&\quad \left. + \overline{C_1(f_1)C_2(f_2, f_3)} \right] + g_{d3} \left[\overline{D_1(f_1)D_1(f_2)D_1(f_3)} - 3\overline{C_1(f_1)D_1(f_2)D_1(f_3)} \right. \\
&\quad \left. + 3\overline{D_1(f_1)C_1(f_2)C_1(f_3)} - \overline{C_1(f_1)C_1(f_2)C_1(f_3)} \right]. \tag{6.17}
\end{aligned}$$

Como a demonstração matemática das equações (6.13) a (6.17) é bastante extensa, optou-se por realizá-la no Anexo C, uma vez que demonstrações semelhantes já foram realizadas no Capítulo 4 para o amplificador de RF.

Para obter os valores numéricos das funções de transferência do circuito ilustrado na Figura 6.1 foi realizado um outro programa em MATLAB [16], que é fruto da modelagem matemática efetuada neste Capítulo para o amplificador de microondas. Este programa calcula não só os valores numéricos das funções de transferência, como também a potência dos produtos de intermodulação dissipada na carga e o ponto de interceptação de terceira ordem. Os dados de entrada deste programa são os parâmetros internos do transistor, os coeficientes das séries de Taylor apresentados na Tabela 6.1 e os componentes lineares do circuito em análise. A listagem desse programa está disponível no Anexo E.

6.3 Potência Média dos Produtos de Intermodulação

O objetivo desta Seção foi determinar a variação da potência dos produtos de intermodulação dissipada na carga em função da frequência dos tons de entrada. Para tal, o amplificador apresentado na Figura 6.1 foi excitado com dois tons nas frequências f_1 e f_2 , onde $f_2 > f_1$ e a diferença entre as duas frequências é de 0,1 GHz. A potência disponível de cada tom de excitação possui valor de -20 dBm.

6.3.1 Potência dos Componentes (f_2) , $(f_2 - f_1)$ e $(2f_2 - f_1)$

Segue-se do Anexo B e de (B.7) que a potência de um componente de intermodulação dissipado na carga em termos da potência disponível dos tons de entrada é definida como

$$p_L(f_m) = 2^{i+1}(i; m)^2 [p_{AS}(f_1)]^{(m_1+m_{-1})} \dots [p_{AS}(f_Q)]^{(m_Q+m_{-Q})} |H_i(m)|^2 \cdot [R_S(f_1)]^{(m_1+m_{-1})} \dots [R_S(f_Q)]^{(m_Q+m_{-Q})} G_L(f_m). \quad (6.18)$$

Para o componente de primeira ordem, (f_2) , tem-se $i = 1$ e o vetor de heterodinagem é definido como $m = (0, 0, 0, 1)$. Portanto, o coeficiente multi-nomial é dado por

$$(i; m) = \frac{i!}{m_{-2}! m_{-1}! m_1! m_2!}$$

$$(1; 0, 0, 0, 1) = \frac{1!}{0! 0! 0! 1!} = 1. \quad (6.19)$$

Resolvendo (6.18) para $i = 1$, $m = (0, 0, 0, 1)$ e $(i; m) = 1$, obtém-se

$$p_L(f_2) = 4p_{AS}|H_1(f_2)|^2 R_S G_L(f_2). \quad (6.20)$$

Como a potência disponível é igual para os dois tons,

$$p_{AS}(f_1) = p_{AS}(f_2) = p_{AS}. \quad (6.21)$$

A impedância da fonte de excitação do circuito ilustrado na Figura 6.1 é igual a

50 Ω . Neste caso, a parte real desta impedância em f_1 é igual em f_2 . Portanto,

$$R_S(f_1) = R_S(f_2) = R_S. \quad (6.22)$$

E ainda, $G_L(f_2)$ é a parte real da admitância de carga na frequência f_2 .

De forma análoga ao resultado obtido em (6.20), as potências dos componentes de segunda e terceira ordens ($f_2 - f_1$) e ($2f_2 - f_1$) são definidas, respectivamente, por

$$p_L(f_2 - f_1) = 32p_{AS}^2 |H_2(-f_1, f_2)|^2 R_S^2 G_L(f_2 - f_1), \quad (6.23)$$

$$p_L(2f_2 - f_1) = 144p_{AS}^3 |H_3(-f_1, f_2, f_2)|^2 R_S^3 G_L(2f_2 - f_1). \quad (6.24)$$

A Figura 6.4 ilustra os valores calculados teoricamente com o programa implementado em MATLAB [16] e os resultados simulados com o software Microwave Office para as potências dos componentes de primeira e segunda ordens, definidas em (6.20) e (6.23). Os valores descritos neste gráfico estão em dBm. A potência em dBm dos produtos de intermodulação é definida como

$$P_L(f_m) = 10 \log_{10} \left[\frac{p_L(f_m)}{p_r} \right], \quad (6.25)$$

onde, $p_r = 1$ mW. A Figura 6.5 apresenta os resultados calculados e simulados para a potência do produto de intermodulação de terceira ordem ($2f_2 - f_1$).

6.3.2 Potência dos Componentes (f_1), ($f_2 + f_1$) e ($2f_1 - f_2$)

Novamente, utilizando (B.7) as potências dissipadas na carga dos componentes (f_1), ($f_2 + f_1$) e ($2f_1 - f_2$) são definidas, respectivamente, por

$$p_L(f_1) = 4p_{AS} |H_1(f_1)|^2 R_S G_L(f_1). \quad (6.26)$$

$$p_L(f_2 + f_1) = 32p_{AS}^2 |H_2(f_1, f_2)|^2 R_S^2 G_L(f_2 + f_1), \quad (6.27)$$

$$p_L(2f_1 - f_2) = 144p_{AS}^3 |H_3(f_1, f_1, -f_2)|^2 R_S^3 G_L(2f_1 - f_2). \quad (6.28)$$

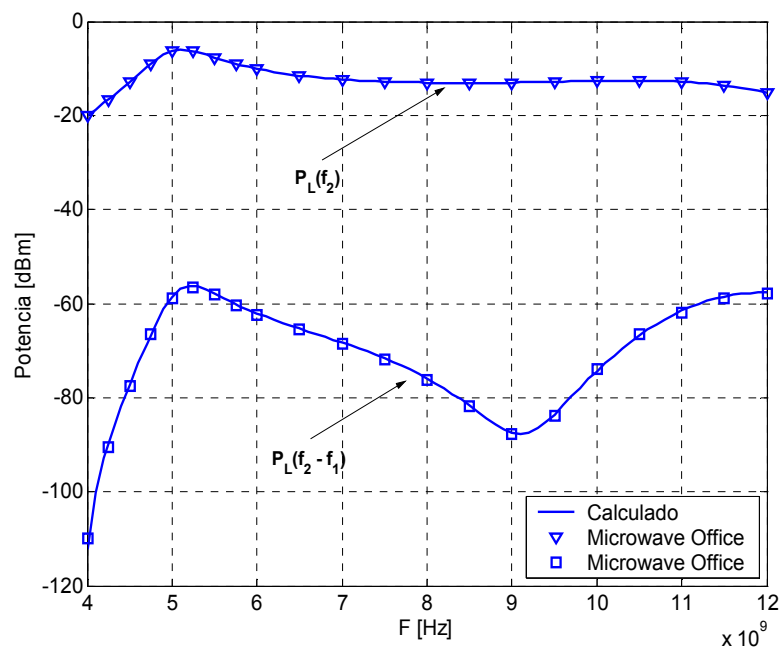


Figura 6.4: Potência dos componentes (f_2) e $(f_2 - f_1)$ variando com a freqüência.

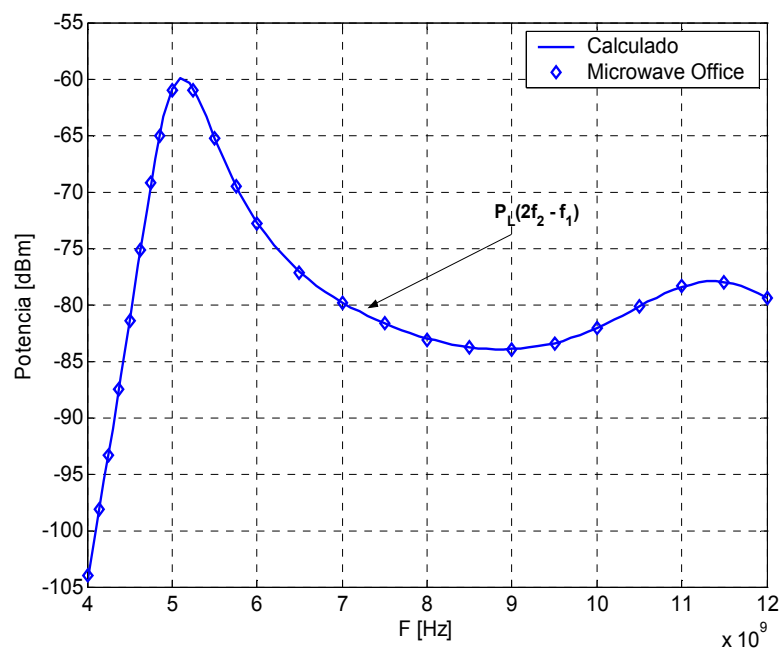


Figura 6.5: Potência do produto de intermodulação $(2f_2 - f_1)$ variando com a freqüência.

A Figura 6.6 ilustra os valores resultantes da simulação em Microwave Office e calculados com o modelo teórico para as potências dos componentes de primeira e segunda ordens, definidas em (6.26) e (6.27). Já a Figura 6.7 apresenta o resultado teórico e simulado para a componente de terceira ordem. Note que a variação com relação a frequência dos níveis dos componentes de intermodulação $(2f_1 - f_2)$ e $(2f_2 - f_1)$ é similar. Isso acontece, porque a diferença de frequência entre os dois tons de excitação é pequena.

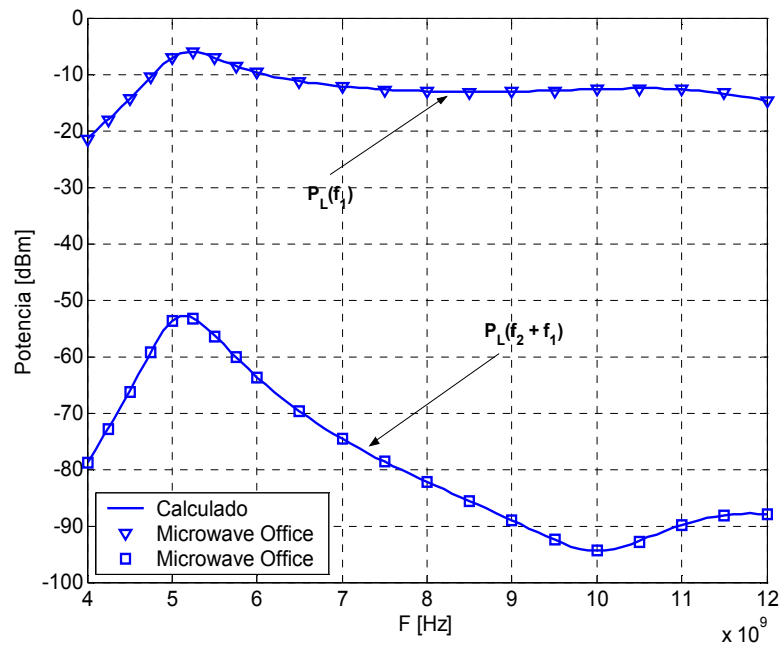


Figura 6.6: Potência dos componentes (f_1) e $(f_2 + f_1)$ variando com a frequência.

6.3.3 Potência dos Produtos de Intermodulação de Terceira Ordem $(2f_2 + f_1)$ e $(2f_1 + f_2)$

Com referência a (B.7), as potências dos componentes $(2f_2 + f_1)$ e $(2f_1 + f_2)$ são definidas, respectivamente, como

$$p_L(2f_1 + f_2) = 144p_{AS}^3 |H_3(f_1, f_1, f_2)|^2 R_S^3 G_L(2f_1 + f_2). \quad (6.29)$$

$$p_L(2f_2 + f_1) = 144p_{AS}^3 |H_3(f_1, f_2, f_2)|^2 R_S^3 G_L(2f_2 + f_1). \quad (6.30)$$

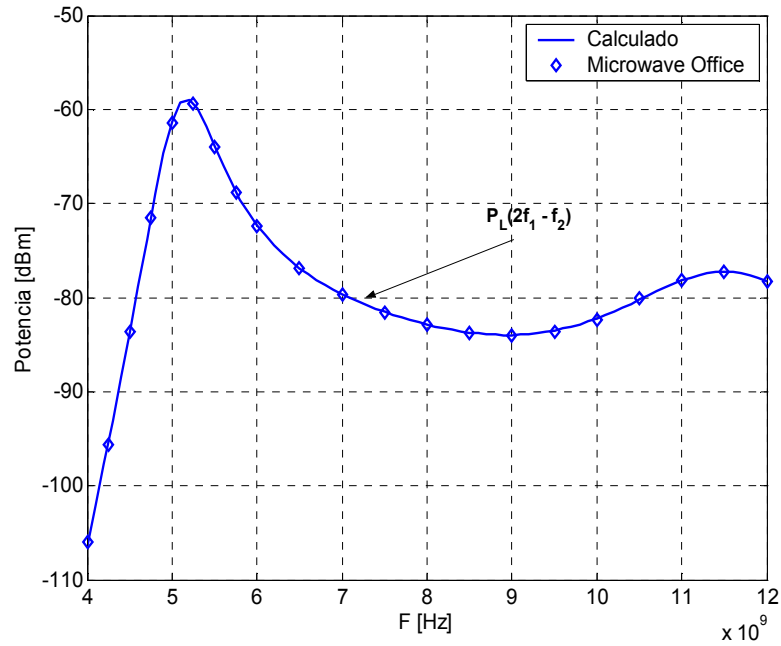


Figura 6.7: Potência do produto de intermodulação ($2f_1 - f_2$) variando com a frequência.

As Figuras 6.8 e 6.9 apresentam os valores simulados e os resultados obtidos com o modelo teórico para os componentes de terceira ordem definidos em (6.29) e (6.30), respectivamente.

6.3.4 Potência dos Componentes Harmônicos de Segunda e Terceira Ordens

Utilizando (B.7) para $i = 2$ e considerando o vetor de heterodinagem $m = (0, 0, 2, 0)$, a potência do componente harmônico ($2f_1$) é definida como

$$p_L(2f_1) = 8p_{AS}^2 |H_2(f_1, f_1)|^2 R_S^2 G_L(2f_1) \quad (6.31)$$

Da mesma forma, considerando em (B.7) $i = 3$ e $m = (0, 0, 3, 0)$, segue-se que a potência do componente ($3f_1$) é expressa por

$$p_L(3f_1) = 16p_{AS}^3 |H_3(f_1, f_1, f_1)|^2 R_S^3 G_L(3f_1). \quad (6.32)$$

Os resultados simulação e calculados para os componentes harmônicos definidos em (6.31) e (6.32) foram traçados nas Figuras 6.10 e 6.11, respectivamente.

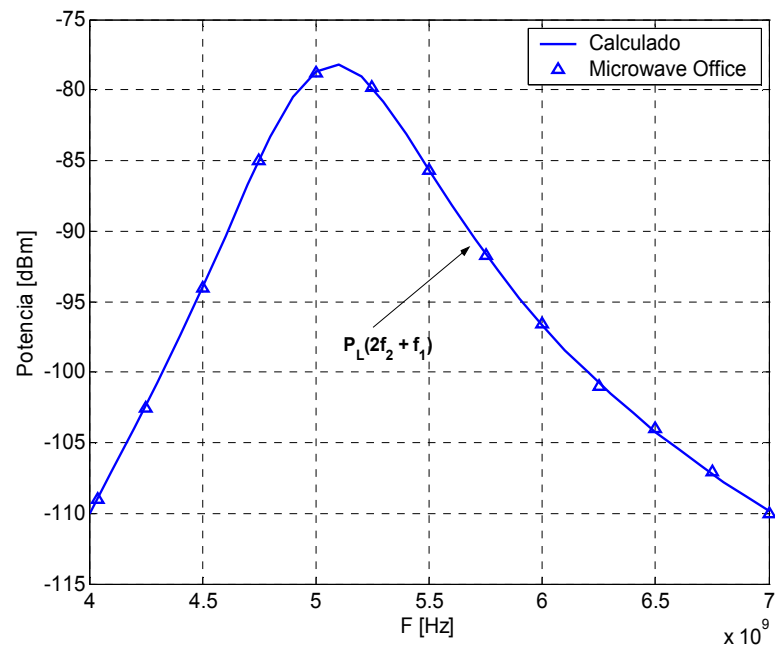


Figura 6.8: Potência do produto de intermodulação ($2f_2 + f_1$) variando com a frequência.

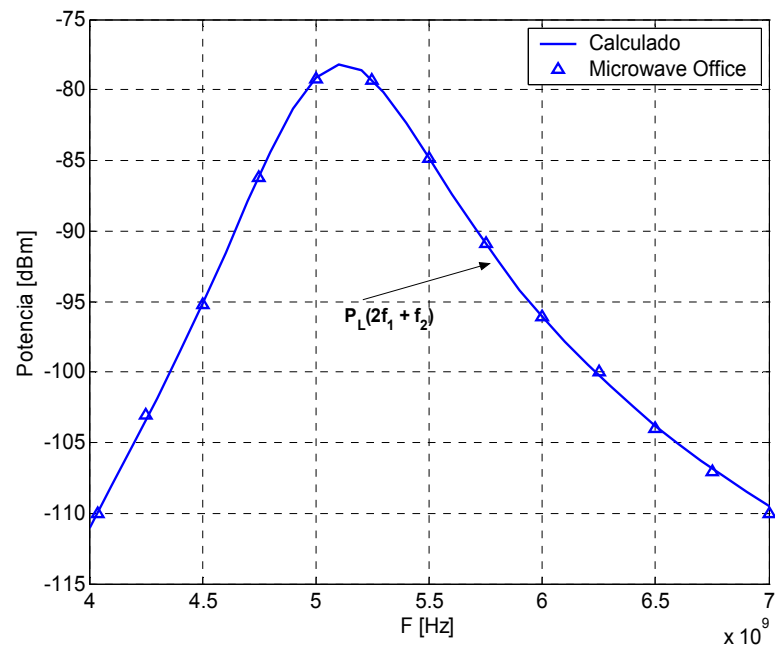


Figura 6.9: Potência do produto de intermodulação ($2f_1 + f_2$) variando com a frequência.

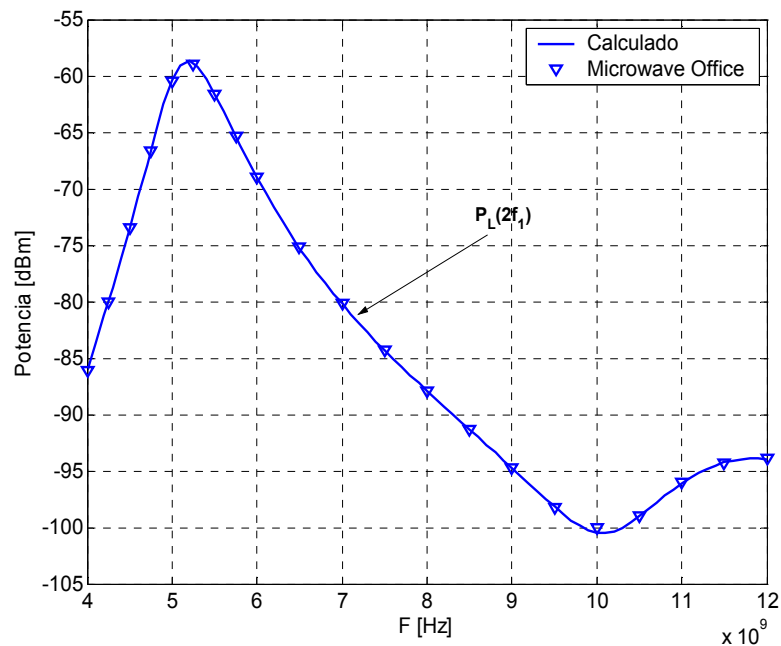


Figura 6.10: Potência do componente harmônica de segunda ordem ($2f_1$) variando com a frequência.

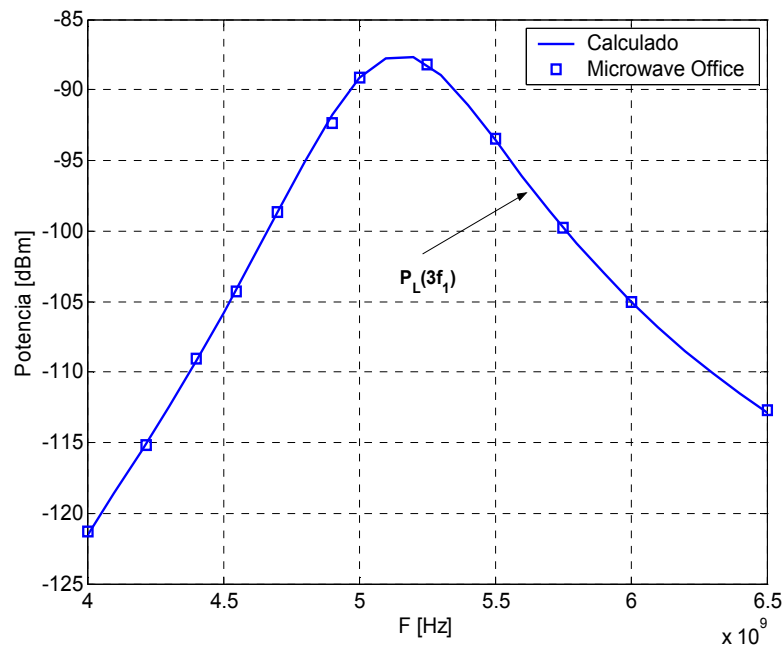


Figura 6.11: Potência do componente harmônica de terceira ordem ($3f_1$) variando com a frequência.

6.4 Ponto de Interceptação de Terceira Ordem

Analisou-se nessa seção a variação do ponto de interceptação de terceira ordem com a frequência, para vários produtos de intermodulação. Em seguida, comparou-se os resultados obtidos teoricamente para o amplificador da Figura 6.1 com simulações realizadas no Microwave Office.

6.4.1 Dedução do Ponto de Interceptação de Terceira Ordem para o Amplificador

Primeiramente, foi considerado o produto de intermodulação de terceira ordem ($2f_1 - f_2$). Com referência ao Anexo B, utilizando (B.14) para $i = 1$ e $m = (0, 0, 1, 0)$, tem-se

$$\begin{aligned} INTR_1(f_1) &= 20\log_{10}\{|E_r|^0|H_1(f_1)|\} + 10\log_{10}\{4R_S G_L(f_1)G_r^0\} \\ &= 20\log_{10}\{|H_1(f_1)|\} + 10\log_{10}\{4R_S G_L(f_1)\}. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Novamente, com referência a (B.14) e considerando $i = 3$ e $m = (1, 0, 2, 0)$, obtém-se

$$\begin{aligned} INTR_3(2f_1 - f_2) &= 20\log_{10}\{|E_r|^2|H_3(f_1, f_1, -f_2)|\} \\ &\quad + 10\log_{10}\{36R_S^3 G_L(2f_1 - f_2)G_r^2\}. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Selecionando a tensão e a potência de referência como 1 V e 1 mW, respectivamente, de (B.12) o cálculo da condutância de referência resulta em $G_r = 2$ mS. Substituindo $|E_r| = 1$ e $G_r = 2$ mS em (6.34), tem-se

$$\begin{aligned} INTR_3(2f_1 - f_2) &= 20\log_{10}\{|H_3(f_1, f_1, -f_2)|\} \\ &\quad + 10\log_{10}\{144 \cdot 10^{-6} R_S^3 G_L(2f_1 - f_2)\}. \end{aligned} \quad (6.35)$$

De acordo com (B.23), o ponto de interceptação de terceira ordem para o componente ($2f_1 - f_2$) é definido como

$$I_3(2f_1 - f_2) = \frac{3}{2}INTR_1(f_1) - \frac{1}{2}INTR_3(2f_1 - f_2). \quad (6.36)$$

Similarmente, os pontos de interceptação de terceira ordem para os componentes $(2f_2 - f_1)$, $(2f_1 + f_2)$ e $(2f_2 + f_1)$ são definidos, respectivamente, por

$$I_3(2f_2 - f_1) = \frac{3}{2}INTR_1(f_1) - \frac{1}{2}INTR_3(2f_2 - f_1), \quad (6.37)$$

$$I_3(2f_1 + f_2) = \frac{3}{2}INTR_1(f_1) - \frac{1}{2}INTR_3(2f_1 + f_2), \quad (6.38)$$

$$I_3(2f_2 + f_1) = \frac{3}{2}INTR_1(f_1) - \frac{1}{2}INTR_3(2f_2 + f_1). \quad (6.39)$$

Onde, $INTR_3(2f_2 - f_1)$, $INTR_3(2f_1 + f_2)$ e $INTR_3(2f_2 + f_1)$ são dados por

$$\begin{aligned} INTR_3(2f_2 - f_1) &= 20\log_{10}\{|H_3(-f_1, f_2, f_2)|\} \\ &+ 10\log_{10}\{144 \cdot 10^{-6}R_S^3G_L(2f_2 - f_1)\}, \end{aligned} \quad (6.40)$$

$$\begin{aligned} INTR_3(2f_1 + f_2) &= 20\log_{10}\{|H_3(f_1, f_1, f_2)|\} \\ &+ 10\log_{10}\{144 \cdot 10^{-6}R_S^3G_L(2f_1 + f_2)\}, \end{aligned} \quad (6.41)$$

$$\begin{aligned} INTR_3(2f_2 + f_1) &= 20\log_{10}\{|H_3(f_1, f_2, f_2)|\} \\ &+ 10\log_{10}\{144 \cdot 10^{-6}R_S^3G_L(2f_2 + f_1)\}. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Os valores dos pontos de interceptação de terceira ordem, definidos de (6.36) a (6.39), calculados a partir do modelo teórico do amplificador e os resultados obtidos com simulação em Microwave Office estão representados nas Figuras 6.12, 6.13, 6.14 e 6.15, respectivamente. Estes valores foram traçados para uma faixa de frequência de 1 a 12 GHz.

Foi verificado que o ponto de interceptação de terceira ordem tem uma forte dependência das frequências dos tons de excitação do sistema. Observou-se também, que esse ponto não assume valores elevados próximo a frequência de operação do circuito.

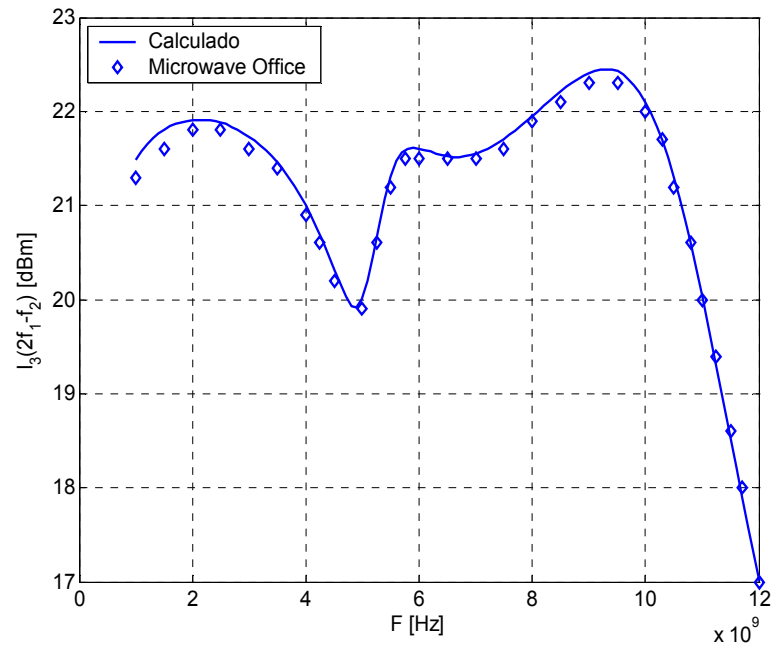


Figura 6.12: Ponto de interceptação de terceira ordem em função do produto de intermodulação $(2f_1 - f_2)$, variando com a frequência.

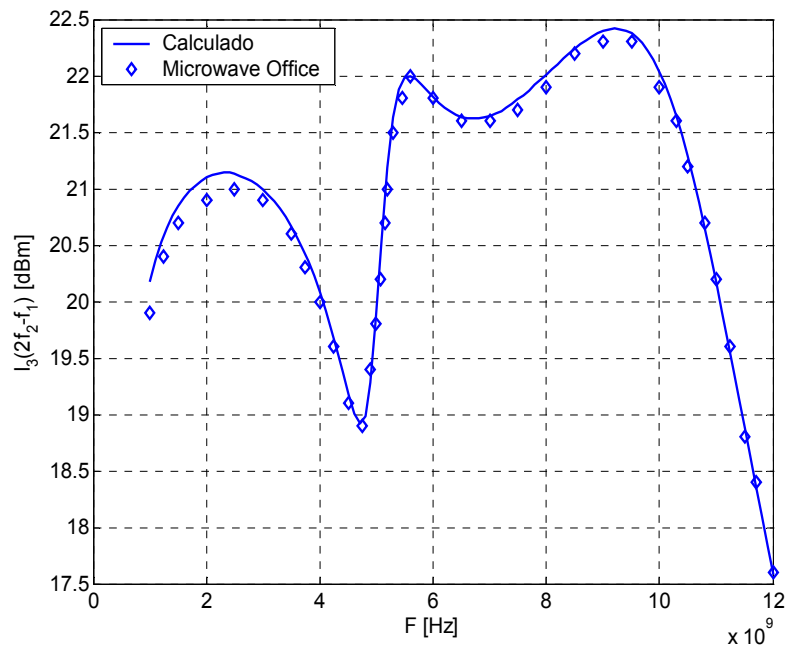


Figura 6.13: Ponto de interceptação de terceira ordem em função do produto de intermodulação $(2f_2 - f_1)$, variando com a frequência.

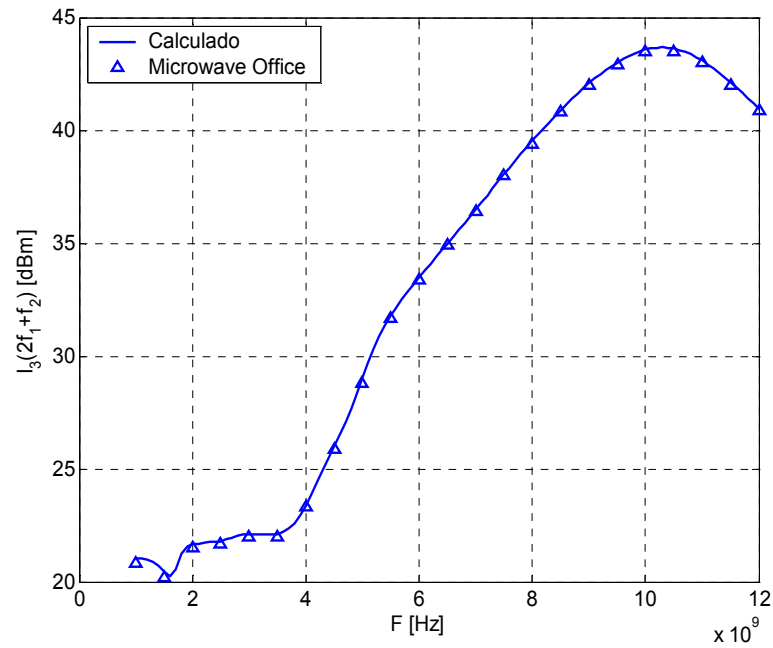


Figura 6.14: Ponto de interceptação de terceira ordem em função do produto de intermodulação ($2f_1 + f_2$), variando com a frequência.

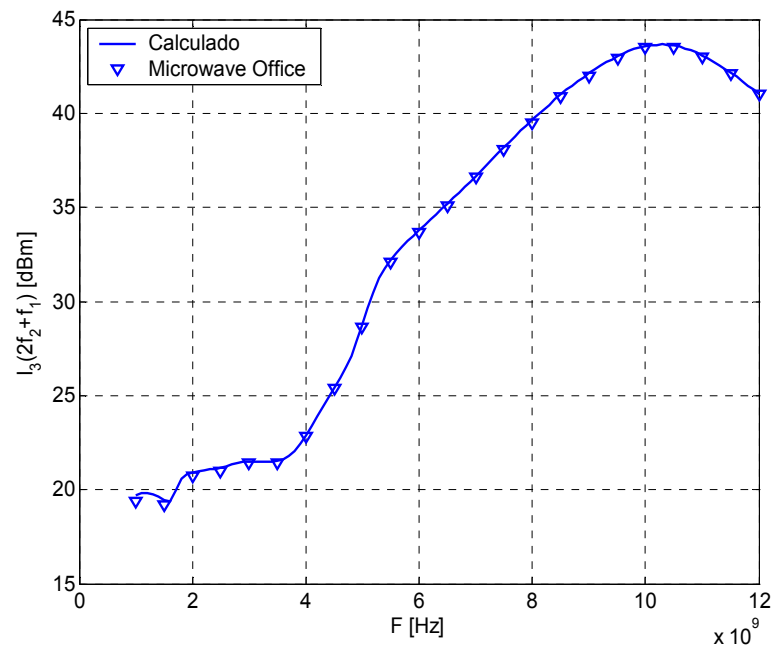


Figura 6.15: Ponto de interceptação de terceira ordem em função do produto de intermodulação ($2f_2 + f_1$), variando com a frequência.

6.5 Influência das Não-Linearidades nos Níveis de Intermodulação

Verificou-se nesta seção a influência da fonte de corrente não-linear e da condutância não-linear de dreno nos níveis dos componentes de intermodulação de segunda e terceira ordens.

6.5.1 Efeito da Não-Linearidade da Condutância de Dreno

Com o intuito de verificar o efeito que a condutância não-linear de dreno provoca nos níveis dos produtos de intermodulação de segunda e terceira ordens gerados na saída do circuito representado na Figura 6.1, considerou-se os coeficientes dos termos de segundo e terceiro grau em (6.2) iguais a zero. Tomou-se como base de comparação a potência das componentes de primeira, segunda e terceira ordens traçadas nas Figuras 6.4 e 6.5.

Ao se anular os coeficientes dos termos de segundo e terceiro grau em (6.2), a condutância de dreno tornou-se linear, neste caso o único elemento não-linear existente no dispositivo ilustrado na Figura 6.2 passa a ser a fonte de corrente controlada por tensão. As Figuras 6.16 e 6.17 apresentam os resultados de simulação em Microwave Office e calculados a partir do modelo teórico para as potências dos componentes (f_2) , $(f_2 - f_1)$ e $(2f_2 - f_1)$, geradas somente pela não-linearidade da fonte de corrente.

Ao se comparar as Figuras 6.16 e 6.4, observou-se que o nível do componente linear não sofreu alterações. Isso já era de se esperar, pois os termos de segundo e terceiro grau em (6.2) ou (6.1) não têm contribuição no nível de qualquer componente linear na saída do circuito. No entanto, o nível do produto de intermodulação de segunda ordem $(f_2 - f_1)$, teve uma considerável alteração em seu comportamento ao longo de quase toda a faixa de frequência. Em 5 GHz por exemplo, a diferença entre os níveis de potência ilustrados nas Figuras 6.16 e 6.4 é de aproximadamente 8,95 dB, mas em outras frequências essa diferença ainda é maior.

Analisando a variação da potência do produto de intermodulação de terceira ordem com a frequência, apresentada nas Figuras 6.17 e 6.5, verificou-se que o comportamento das funções são similares até aproximadamente 10 GHz, contudo existe uma diferença entre os níveis da potência nos dois gráficos. Em 5 GHz essa diferença é de 8,92 dB.

Da análise realizada anteriormente, nota-se que a condutância não-linear de dreno têm uma forte influência nos níveis de intermodulação de segunda e terceira ordens.

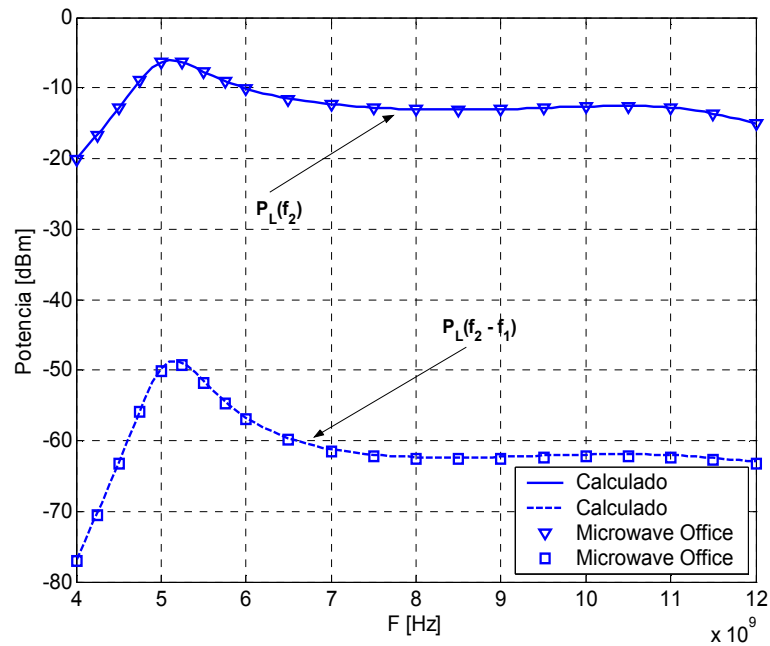


Figura 6.16: Potência dos componentes (f_2) e $(f_2 - f_1)$ variando com a freqüência.

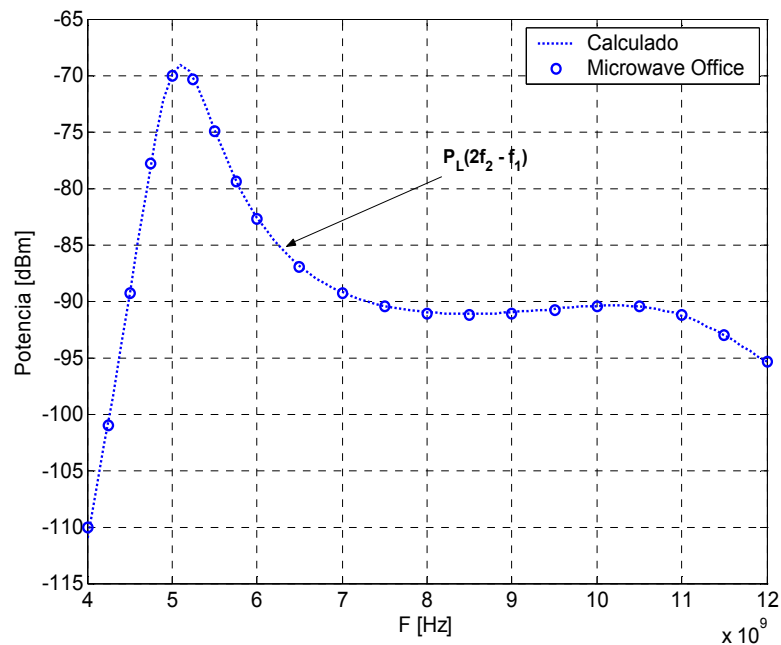


Figura 6.17: Potência do componente $(2f_2 - f_1)$ variando com a freqüência.

6.5.2 Efeito da Não-Linearidade da Fonte de Corrente Controlada por Tensão

Similarmente, para verificar somente o efeito da fonte de corrente não-linear no nível dos produtos de intermodulação, esta deve ser considerada linear. Podendo

assim, examinar o contraste com os resultados apresentados nas Figuras 6.16 e 6.4, onde considerou-se a fonte de corrente e a condutância como elementos não-lineares. Para considerar o elemento em questão como sendo linear, os coeficientes dos termos de segundo e terceiro grau de (6.1) devem ser nulos. Os valores obtidos com simulação e calculados para as potências dos componentes (f_2), ($f_2 - f_1$) e ($2f_2 - f_1$), geradas devido a não-linearidade da condutância de dreno, foram traçados nas Figuras 6.18 e 6.19.

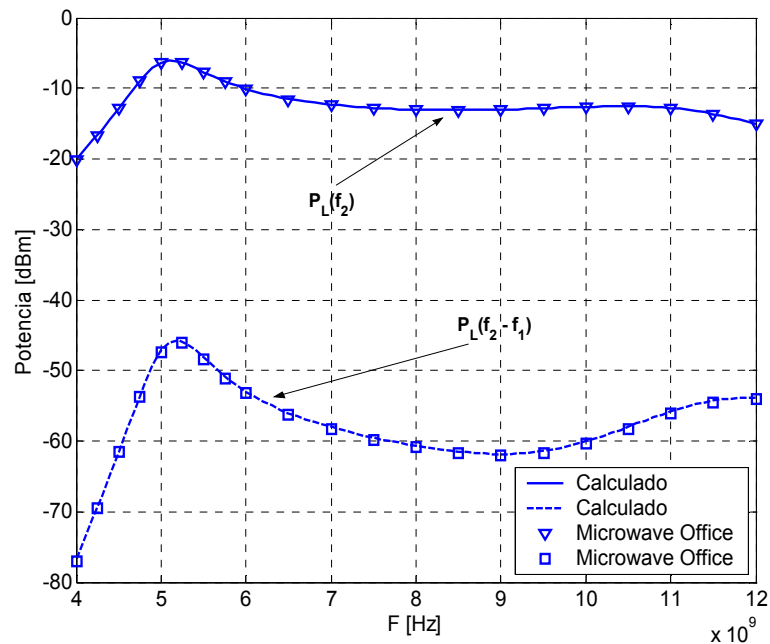


Figura 6.18: Potência dos componentes (f_2) e ($f_2 - f_1$) variando com a freqüência.

Novamente, comparando-se os gráficos representados nas Figuras 6.18 e 6.4, nota-se que o nível do componente linear não sofreu alterações, devido aos mesmos motivos já levantados na Seção 6.5.1. Já o nível de intermodulação de segunda ordem teve alterações em toda faixa de freqüência. Em 5 GHz a diferença de potência entre os dois gráficos para o componente de segunda ordem foi de 11,66 dB. Analisando novamente a variação de potência do componente de terceira ordem com a freqüência apresentada nas Figuras 6.19 e 6.5, verificou-se que o comportamento das curvas são similares em toda faixa de freqüência e a diferença entre os níveis de potência foi menor. Em 5 GHz, por exemplo, a diferença foi de 4,38 dB.

De acordo com a análise realizada anteriormente, observou-se que o nível do produto de intermodulação de segunda ordem tem uma forte dependência da não-linearidade da fonte de corrente controlada por tensão. No entanto, a fonte de corrente não teve tanta influência no nível do componente de intermodulação

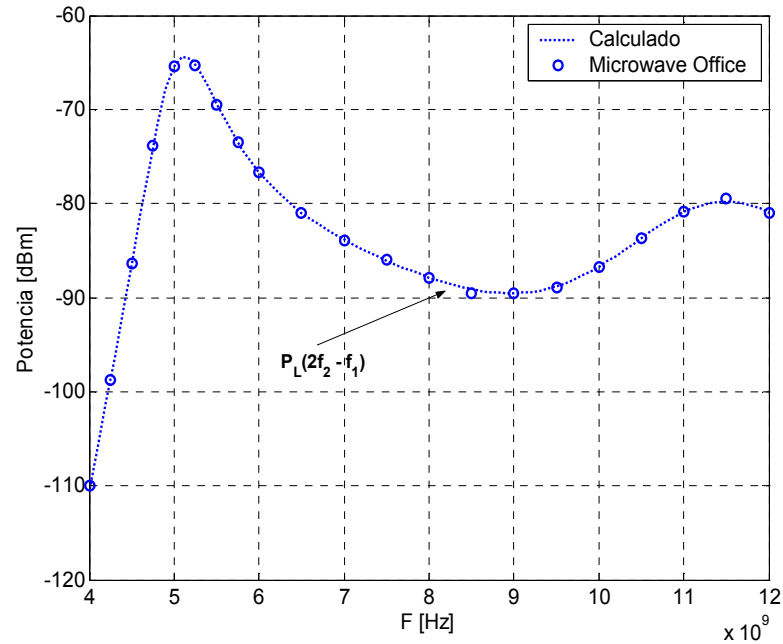


Figura 6.19: Potência do componente $(2f_2 - f_1)$ variando com a freqüência.

de terceira ordem, pois este não sofreu grandes alterações em seu comportamento ao longo da faixa de freqüência, devido a ausência da característica não-linear desse elemento.

Conforme a análise efetuada nas Seções 6.5.1 e 6.5.2 para o dispositivo ilustrado na Figura 6.2, conclui-se que as duas não-linearidades levadas em consideração têm efeitos semelhantes sobre o produto de intermodulação de segunda ordem $(f_2 - f_1)$, embora a influência da fonte de corrente não-linear controlada por tensão tenha sido maior. Por outro lado, o componente de terceira ordem $(2f_2 - f_1)$ sofreu maior influência da condutância não-linear de dreno do que da fonte de corrente não-linear. A tabela 6.2 apresenta os dados da diferença entre os níveis dos produtos intermodulação em 5 GHz, gerados ao se considerar as duas não-linearidades e uma não-linearidade apenas.

Tabela 6.2: Diferença entre os níveis dos produtos de intermodulação em 5 GHz.

Componente	Fonte de Corrente	Condutância de Dreno	Diferença de Nível em 5 GHz
$(f_2 - f_1)$	Não-Linear	Linear	8,95 dB
	Linear	Não-Linear	11,66 dB
$(2f_2 - f_1)$	Não-Linear	Linear	8,92 dB
	Linear	Não-Linear	4,38 dB

Capítulo 7

Conclusão

Foi verificada, através de simulações numéricas implementadas em MATLAB [16], que a modelagem matemática desenvolvida conforme a teoria das séries de Volterra para um amplificador de RF e para um amplificador de microondas permite determinar os parâmetros básicos de caracterização dos efeitos não-lineares.

Esta ferramenta matemática proporciona, portanto, um forte suporte teórico que possibilita determinar os níveis dos produtos de intermodulação de segunda e terceira ordens, o ponto de interceptação de terceira ordem, as características de compressão ou expansão no ganho e a resposta em frequência do sistema. Cabe destacar que os valores calculados para estes parâmetros tiveram razoável aproximação a dados experimentais publicados por GRAHAM & EHRMAN [1] e aos valores numéricos obtidos por simulações através do software Microwave Office.

Embora o cálculo das funções de transferência não-lineares seja um pouco árduo, os resultados obtidos por meio do modelo teórico são bastante confiáveis.

Ficou comprovado, portanto, que a técnica de Volterra é uma poderosa ferramenta analítica, pois permite avaliar, com excelente precisão, os efeitos não-lineares significativos em sistemas fracamente não-lineares.

É interessante ressaltar que os valores experimentais obtidos por GRAHAM & EHRMAN [1] foram utilizados como referência balizadora da metodologia empregada, pois a montagem dos circuitos ultrapassaria o objetivo deste trabalho.

Tentou-se, exaustivamente, realizar simulações numéricas empregando o software Advanced Design System (ADS), porém sem sucesso, pois este programa não realiza simulações em dispositivos não-lineares empregando a técnica de Volterra. Para obter maiores esclarecimentos, o autor entrou em contato com a Agilent nos EUA, empresa que fabrica o software ADS. Segundo os responsáveis pela área de suporte técnico, este programa realiza simulações numéricas empregando somente a técnica do balanço harmônico e que no momento não dispõe de nenhuma

plataforma de simulação que utiliza as séries de Volterra.

Uma das maiores dificuldades, portanto, para se comprovar os resultados através de simulação, foi encontrar um programa que trabalhasse com a técnica de Volterra. Depois de realizar uma pesquisa dos programas disponíveis, que realizassem simulações em dispositivos não-lineares de alta frequência, chegou-se ao Microwave Office. Este software então foi escolhido, porque verificou-se que trabalha não apenas com o método do balanço harmônico, mas também com a técnica de Volterra.

Ao se efetuar as deduções analíticas referente a modelagem dos sistemas, verificou-se que à medida em que a ordem das funções de transferência não-lineares aumentava, a complexidade para deduzi-las analiticamente aumentava exponencialmente. Com as manipulações analíticas efetuadas, conseguiu-se deduzir as funções de transferência não-lineares até a terceira ordem. Este fato limitou a análise dos componentes de intermodulação apenas a segunda e terceira ordem. Conseqüentemente os efeitos não-lineares iguais ou superiores a quarta ordem não foram analisados. Depreende-se, portanto, que a técnica de Volterra, em sua forma original, é interessante para analisar efeitos não-lineares de ordem mais baixa, que são característicos em sistemas fracamente não-lineares.

Se houver a necessidade de verificar características não-lineares de ordem mais elevada, este modelo ainda pode ser aplicado, mas é conveniente lembrar que a complexidade matemática requerida para modelar um sistema nessas condições é praticamente inviável. No entanto, existem alguns métodos derivados das séries de Volterra, que permitem realizar a modelagem de sistemas que exibem não-linearidades fortes. Alguns desses métodos foram apresentados por ZHU & BRAZIL [7] e DENG et al. [5], [6] e são interessantes, pois conseguem reduzir a complexidade analítica da modelagem de sistemas não-lineares de ordem mais elevada.

Como o método das séries de Volterra tem grande aplicação na análise e projeto de sistemas de comunicação, ainda existem muitos aspectos a explorar e que podem ser abordados em trabalhos futuros, tais como:

- utilizar o método de Volterra para realizar a modelagem de osciladores não-lineares, realizando simulações e verificações experimentais, empregando dispositivos ativos diferentes;
- implementar a técnica das séries de Volterra para realizar a modelagem e a análise das características não-lineares significativas em misturadores;
- realizar a modelagem de circuitos fracamente não-lineares associados em cascata, desenvolvendo um modelo teórico capaz de avaliar os efeitos não-lineares em um sistema de comunicação por completo;
- desenvolver modelos teóricos, baseados nas séries de Volterra, capazes de formular funções de transferência não-lineares acima da terceira ordem em dis-

positivos não-lineares. O que possibilitaria analisar características não-lineares de ordem mais elevada típicos em sistemas que exibem não-linearidades fortes;

- empregando a técnica de Volterra, desenvolver softwares que sejam capazes de realizar simulações numéricas dos circuitos mais empregados em sistemas de comunicação, tais como misturadores, amplificadores de potência, osciladores, etc. Produtos desta natureza oferecerão considerável contribuição à engenharia de telecomunicações, devido a falta de programas comerciais capazes de simular o comportamento de circuitos não-lineares em alta frequência utilizando o modelo de Volterra.

Anexo A

Não-Linearidades Inerentes ao Modelo T

A análise não-linear de um circuito requer que cada componente seja substituído por um modelo não-linear equivalente.

A.1 Elementos Não-Lineares de Circuitos

Componentes eletrônicos em sistemas fracamente não-lineares operam em uma região onde suas características são predominantes. O comportamento desses componentes é caracterizado utilizando expansão em séries de potência em torno do ponto de operação quiescente. Foi introduzido nesta seção a representação em séries de potência para diversos elementos não-lineares como: resistores, capacitores e fontes controladas. As combinações desses elementos são suficientes para modelar muitas das não-linearidades encontradas em sistemas eletrônicos.

Resistor Não-Linear

Um resistor não-linear pode ser caracterizado em função da corrente ou da tensão. Quando um resistor é avaliado em função da tensão, ele é dito ser um resistor controlado por tensão.

A corrente através de um resistor controlado por tensão é dada por

$$i_R(t) = g[e_R(t)] \tag{A.1}$$

onde $g(\cdot)$ é um funcional de memória zero. Considerando que o ponto de operação quiescente do resistor é dado por $e_R(t) = e_0$ e $i_R(t) = i_0$ e expandindo (A.1) em

uma série de potência em torno do ponto de operação, obtém-se

$$i_R(t) - i_0 = \sum_{k=1}^{\infty} g_k [e_R(t) - e_0]^k \quad (\text{A.2})$$

onde g_k é o k -ésimo coeficiente da série. No intuito de simplificar a notação, denota-se a corrente e a tensão incremental por

$$i_r(t) = i_R(t) - i_0 \quad , \quad e_r(t) = e_R(t) - e_0. \quad (\text{A.3})$$

Substituindo (A.3) em (A.2), resulta em

$$i_r(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k e_r^k(t). \quad (\text{A.4})$$

Quando o comportamento de um resistor é caracterizado em função da corrente, este é dito ser um resistor controlado por corrente. De forma similar, a tensão neste componente pode ser expressa como

$$e_R(t) = r[i_R(t)] \quad (\text{A.5})$$

onde $r(\cdot)$ é um funcional de memória zero. Expressando (A.5) em uma série de potência em torno do ponto de operação quiescente, obtém-se

$$e_r(t) = \sum_{k=1}^{\infty} r_k i_r^k(t) \quad (\text{A.6})$$

onde $e_r(t)$ e $i_r(t)$ são as variáveis incrementais definidas em (A.3). Note que as duas representações dadas por (A.4) e (A.6) podem ser usadas na caracterização de um resistor não-linear. Observe que uma representação é o inverso da outra e pode-se relacionar os coeficientes de uma representação com os da outra. Especificamente, expandindo o somatório em (A.6), resulta em

$$e_r(t) = r_1 i_r(t) + r_2 i_r^2(t) + r_3 i_r^3(t) + \dots \quad (\text{A.7})$$

Expandindo-se também o somatório em (A.4), obtém-se

$$i_r(t) = g_1 e_r(t) + g_2 e_r^2(t) + g_3 e_r^3(t) + \dots \quad (\text{A.8})$$

Para expressar os coeficientes de (A.8) em função dos coeficientes de (A.7), basta

substituir (A.8) em (A.7), resultando em

$$\begin{aligned} e_r(t) = & r_1[g_1 e_r(t) + g_2 e_r^2(t) + g_3 e_r^3(t) + \dots] \\ & + r_2[g_1^2 e_r^2(t) + 2g_1 g_2 e_r^3(t) + \dots] \\ & + r_3[g_1^3 e_r^3(t) + \dots] + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Igualando os coeficientes de $e_r(t)$ em (A.9), tem-se

$$r_1 g_1 = 1. \quad (\text{A.10})$$

Portanto o primeiro coeficiente é

$$g_1 = \frac{1}{r_1}. \quad (\text{A.11})$$

Como já se sabe, a condutância linear é inversamente proporcional a resistência linear. Segue-se que g_2 é obtido igualando os coeficientes de $e_r^2(t)$. Neste caso,

$$r_1 g_2 + r_2 g_1^2 = 0. \quad (\text{A.12})$$

Portanto

$$g_2 = -\frac{r_2}{r_1} g_1^2 = -\frac{r_2}{r_1^3}. \quad (\text{A.13})$$

Igualando os coeficientes de e_r^3 resulta em

$$r_1 g_3 + 2r_2 g_1 g_2 + r_3 g_1^3 = 0. \quad (\text{A.14})$$

Resolvendo para g_3 e utilizando (A.11) e (A.13), obtém-se

$$g_3 = -\frac{2r_2}{r_1} g_1 g_2 - \frac{r_3}{r_1} g_1^3 = \frac{2r_2^2 - r_1 r_3}{r_1^5}. \quad (\text{A.15})$$

Os coeficientes de ordem mais alta são obtidos de forma similar.

Capacitor Não-Linear

Quando a relação corrente-tensão de um capacitor é expressa em função da tensão, diz-se que esse capacitor é controlado por tensão.

A corrente através de um capacitor é dada pela taxa de variação com relação

ao tempo da carga armazenada. Neste caso, tem-se

$$i_C(t) = \frac{dq_C(t)}{dt} = \frac{dq_C(t)}{de_C(t)} \frac{de_C(t)}{dt}. \quad (\text{A.16})$$

A capacitância incremental é definida como sendo

$$c[e_C(t)] = \frac{dq_C(t)}{de_C(t)}. \quad (\text{A.17})$$

Substituindo (A.17) em (A.16), obtém-se

$$i_C(t) = c[e_C(t)] \frac{de_C(t)}{dt}. \quad (\text{A.18})$$

Considere que o ponto de operação quiescente do capacitor é dado por $e_C(t) = e_0$, $q_C(t) = q_0$ e $i_C(t) = i_0$, neste caso pode-se definir as variáveis incrementais como sendo

$$e_c(t) = e_C(t) - e_0 \quad q_c(t) = q_C(t) - q_0 \quad i_c(t) = i_C(t) - i_0. \quad (\text{A.19})$$

Denotando-se também, a capacitância incremental no ponto de operação quiescente por c_0 e expandindo-a em uma série de potência em torno do ponto de operação quiescente, resulta em

$$c[e_C(t)] - c_0 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k [e_C(t) - e_0]^k \quad (\text{A.20})$$

onde c_k é o k -ésimo coeficiente da série de potência. Introduzindo a tensão incremental em (A.20) e passando c_0 para o lado direito da igualdade, obtém-se

$$c[e_C(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e_c^k(t). \quad (\text{A.21})$$

Substituindo (A.21) em (A.18), resulta na relação corrente-tensão dada por

$$i_C(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e_c^k(t) \frac{de_C(t)}{dt}. \quad (\text{A.22})$$

Substituindo (A.19) em (A.22), tem-se

$$i_c(t) + i_0 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e_c^k(t) \frac{d[e_c(t) + e_0]}{dt}. \quad (\text{A.23})$$

Sabe-se que $i_0 = 0$, pois no capacitor não passa corrente dc. E ainda, $de_0/dt = 0$, pois e_0 é uma constante. Portanto, a relação corrente-tensão torna-se

$$i_c(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e_c^k(t) \frac{de_c(t)}{dt}. \quad (\text{A.24})$$

Fontes de Corrente Não-Lineares Controladas

Uma fonte de corrente pode ser controlada por tensão ou por corrente. Por definição, uma fonte de corrente controlada por corrente é um elemento em que a corrente em seus terminais é função não-linear de uma corrente i_X de outra parte do circuito. Já uma fonte de corrente controlada por tensão é um elemento em que a corrente em seus terminais é função não-linear de uma tensão e_X de outra parte do circuito.

Denotando a variável incremental associada com e_X por e_x , então a expansão em série de potência em torno do ponto de operação da fonte de corrente controlada por tensão, é definida como

$$i_{cs}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_{ks} e_x^k(t). \quad (\text{A.25})$$

Os símbolos usados para representar resistores não-lineares, capacitores não-lineares e fontes de corrente controladas por tensão, estão ilustrados na Figura A.1.

A.2 Características do Modelo T

O modelo T para o transistor BJT está ilustrado na Figura A.2. Esse modelo é usado para realizar a análise de distorção não-linear em pequenos sinais. Os nove elementos desse modelo estão descritos a seguir.

Resistência de Espalhamento da Base: R_B

Resistência de Coletor: R_C

Capacitância Entre os Terminais de Base e Emissor: C_1

Capacitância Entre os Terminais de Base e Coletor: C_3

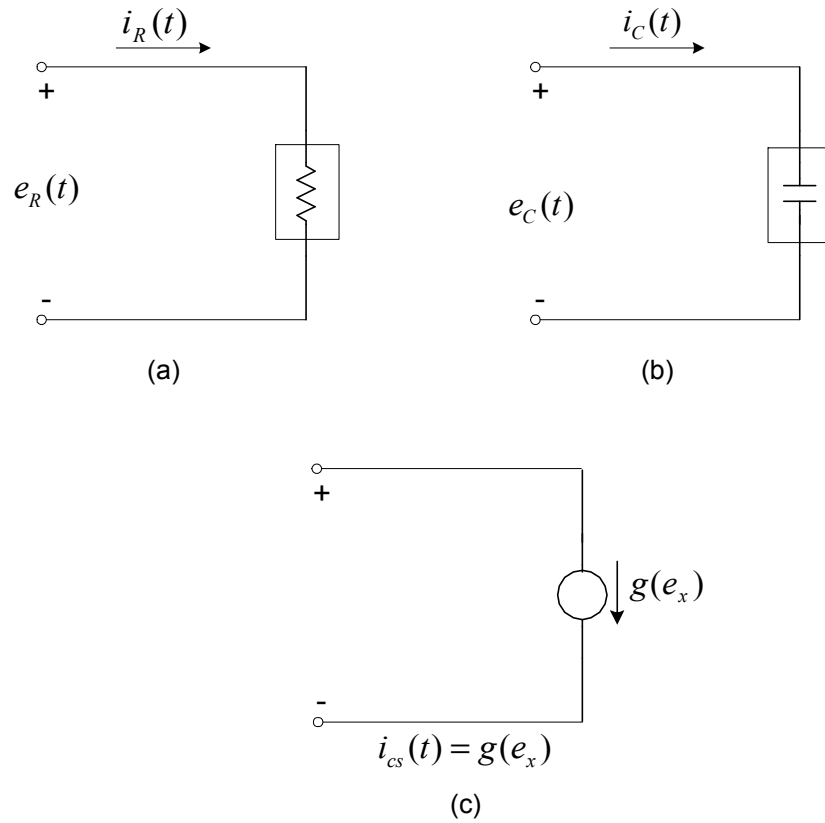


Figura A.1: (a) Resistor não-linear. (b) Capacitor não-linear. (c) Fonte de corrente não-linear controlada por tensão.

Capacitância de Transição da Junção Base-Emissor: C_{JE}

Resistência Não-Linear da Junção Base-Emissor: R_{JE}

A relação corrente-tensão nesse resistor é definida como

$$i_{JE} = I_{se} \left[\exp\left(\frac{qV_{JE}}{nKT}\right) - 1 \right]. \quad (\text{A.26})$$

Capacitância Não-Linear de Difusão da Junção Base-Emissor: C_{2E}

A Capacitância não-linear de difusão da junção base-emissor depende da corrente que circula por esta junção, de acordo com a seguinte relação

$$C_{2E} = C_d(i_{JE} + I_{se}). \quad (\text{A.27})$$

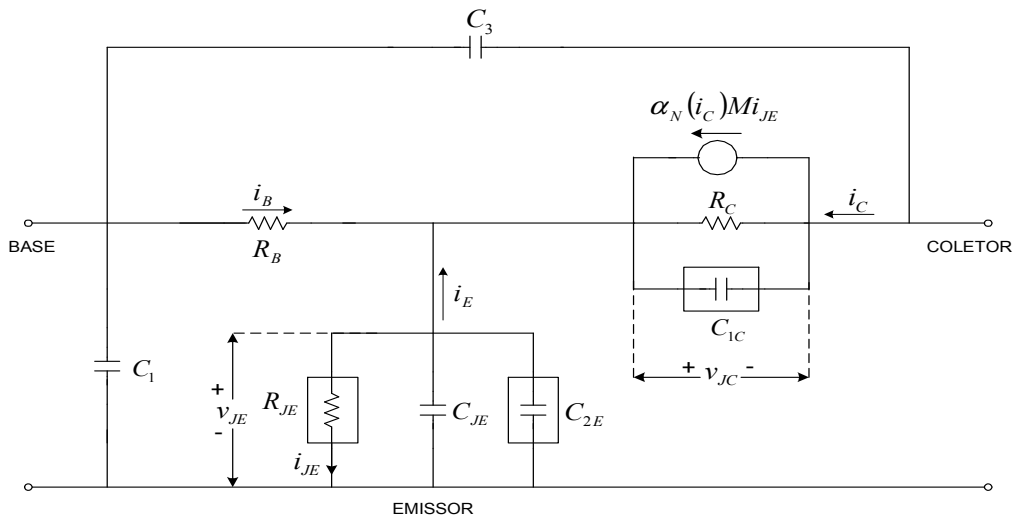


Figura A.2: Modelo T para o transistor de junção bipolar.

Capacitância Não-Linear de Transição da Junção Base-Coletor: C_{1C}

A capacitância não-linear de transição da junção base-coletor é definida por

$$C_{1C} = \frac{C_C(0)}{\left(1 - \frac{v_{JC}}{\phi}\right)^\mu}, \quad v_{JC} < \phi. \quad (\text{A.28})$$

Os parâmetros que aparecem nas equações (A.26) até (A.28) são definidos a seguir.

- I_{se} corrente reversa de saturação do diodo base-emissor;
- q carga elétrica = $1,6 \times 10^{-19} C$;
- k constante de Boltzmann = $1,38 \times 10^{-23} J/^{\circ}K$;
- T temperatura absoluta da junção em graus Kelvin;
- n fator de compensação;
- ϕ potencial de contato da junção base-coletor;
- μ constante de grade da junção base-coletor;
- C_d constante de capacitância de difusão da junção base-emissor;
- $C_C(0)$ capacitância de transição da junção base-coletor para $V_{CB} = 0$.

Fonte de Corrente Não-Linear de Coletor: $\alpha_N(i_C)Mi_{JE}$

A fonte de corrente de coletor é controlada por corrente. A variável de controle, i_{JE} , é a corrente da junção base-emissor. Como a corrente i_{JE} depende da tensão v_{JE} , a fonte de corrente de coletor acaba sendo controlada por tensão.

Já o parâmetro α_N varia não-linearmente em função da corrente de coletor, i_C , por isso optou-se por denotar α_N como $\alpha_N(i_C)$. E ainda, devido aos efeitos de avalanche, a corrente de coletor é uma função não-linear da tensão entre base e coletor. Esta não-linearidade é incorporada no modelo T, incluindo na fonte de corrente de coletor o fator de multiplicador de avalanche definido como

$$M = \frac{1}{1 - \left(\frac{v_{CB}}{V_{CBO}}\right)^\eta}. \quad (\text{A.29})$$

Onde, V_{CBO} é a tensão de breakdown de coletor para base, também conhecida como tensão de avalanche.

É possível relacionar α_N com h_{FE} , que é definido por

$$h_{FE} = \frac{I_C}{I_B}. \quad (\text{A.30})$$

Desde que a soma das correntes dc do transistor é igual a zero, tem-se

$$I_E + I_B + I_C = 0. \quad (\text{A.31})$$

Por definição, α_N é

$$\alpha_N = -\frac{I_C}{I_E} = \frac{I_C}{I_B + I_C} = \frac{\frac{I_C}{I_B}}{1 + \frac{I_C}{I_B}} = \frac{h_{FE}}{1 + h_{FE}}. \quad (\text{A.32})$$

A variação de h_{FE} em função da corrente de coletor pode ser expressa pela seguinte relação empírica

$$h_{FE} = \frac{h_{FEmax}}{1 + a \log_{10}^2 \left(\frac{I_C}{I_{Cmax}} \right)}. \quad (\text{A.33})$$

Segue-se que I_{Cmax} é a corrente de coletor para o qual h_{FE} é igual ao valor máximo, dado por h_{FEmax} . E ainda, a é uma constante. Substituindo (A.33) em (A.32), resulta em

$$\alpha_N(i_C) = \frac{h_{FEmax}}{1 + h_{FEmax} + a \log_{10}^2 \left(\frac{i_C}{I_{Cmax}} \right)} \quad (\text{A.34})$$

onde a corrente I_C , de valor dc, foi substituída pela corrente total i_C . Isto é válido, pois a parcela incremental de i_C torna-se nula ao se considerar (A.34) em termos da característica estática do transistor.

A.2.1 Modelo T Não-Linear Incremental

O modelo T, ilustrado na Figura A.2, serve como ponto de partida para a implementação do circuito não-linear incremental equivalente. Existem cinco não-linearidades neste modelo que podem ser caracterizadas através de expansões em séries de Taylor. Essas não-linearidades estão descritas a seguir.

R_{JE} , resistor não-linear da junção base-emissor.

C_{2E} , capacitância não-linear de difusão da junção base-emissor.

C_{1C} , capacitância não-linear de transição da junção base-coletor.

M , fator não-linear de multiplicação de avalanche.

$\alpha_N(i_C)$, relação funcional não-linear para α_N .

De uma forma geral, a expansão em série de Taylor de uma função $f(x)$ em torno do ponto x_o é dado por

$$f(x) = f(x_o) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (x - x_o)^k \quad (\text{A.35})$$

onde o k -ésimo coeficiente é determinado pela relação

$$a_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k f(x)}{dx^k} \right|_{x=x_o}. \quad (\text{A.36})$$

Note que este coeficiente envolve a k -ésima derivada de $f(x)$, avaliada no ponto em que a expansão ocorre.

A relação entre corrente e tensão em R_{JE} é dado por (A.26). Fazendo uso de (A.35) e (A.36), a expansão em séries de Taylor de (A.26) em torno do ponto de operação quiescente pode ser escrita como

$$i_{je} = \sum_{z=1}^{\infty} k_z v_{je}^z \quad (\text{A.37})$$

onde

$$k_z = \frac{1}{z!} \left(\frac{q}{nkT} \right)^z I_{se} \exp \left(\frac{qV_{JE}}{nkT} \right). \quad (\text{A.38})$$

Da Figura A.2 pode-se notar que o valor dc da corrente de emissor é igual ao valor dc da corrente na junção base-emissor, no entanto, o sentido de uma corrente está invertido com relação a outra. E ainda, a corrente de saturação I_{se} é desprezível

em relação a corrente da junção base-emissor, quando o diodo desta junção está polarizado diretamente. De acordo com as considerações anteriores, tem-se

$$-I_E = I_{JE} = I_{se} \left[\exp\left(\frac{qV_{JE}}{nkT}\right) - 1 \right] \approx I_{se} \exp\left(\frac{qV_{JE}}{nkT}\right). \quad (\text{A.39})$$

Substituindo (A.39) em (A.38), obtém-se

$$k_z = \frac{1}{z!} \left(\frac{q}{nkT} \right)^z (-I_E) = \frac{1}{z!} \left[\frac{1}{r_e (-I_E)} \right]^z (-I_E) \quad (\text{A.40})$$

onde, r_e é a resistência linear incremental de emissor, que é definida por

$$r_e = \frac{1}{k_1} = \frac{nkT}{q(-I_E)}. \quad (\text{A.41})$$

Em temperatura ambiente, $T = 290^\circ K$ e $kT/q = 25$ mV. O sinal negativo associado a I_E é devido as correntes i_{JE} e i_E estarem em sentidos opostos. Para um transistor $n-p-n$ operando na região de amplificação, a corrente I_E é negativa e portanto $(-I_E)$ representa uma quantidade positiva.

Uma relação para a capacitância não-linear de difusão aparece em (A.27). Substituindo (A.26) em (A.27) e considerando a corrente de saturação I_{se} desprezível em relação a corrente da junção base-emissor, a equação para C_{2E} torna-se

$$C_{2E} = C_d I_{se} \exp\left(\frac{qV_{JE}}{nkT}\right). \quad (\text{A.42})$$

A expansão em séries de Taylor de (A.42) em torno do ponto de operação é expressa como

$$C_{2E} = c_{20} + \sum_{z=1}^{\infty} c_{2z} v_{je}^z \quad (\text{A.43})$$

onde a capacitância linear e incremental é definida como

$$c_{20} = C_d I_{se} \exp\left(\frac{qV_{JE}}{nkT}\right) = C_d (-I_E) = C_d |I_E|. \quad (\text{A.44})$$

e ainda

$$\begin{aligned}
c_{2z} &= \frac{1}{z!} C_d \left(\frac{q}{nkT} \right)^z I_{se} \exp \left(\frac{qV_{JE}}{nkT} \right) \\
&= \frac{1}{z!} C_d \left(\frac{q}{nkT} \right)^z (-I_E) \\
&= C_d \frac{1}{z!} \left[\frac{1}{r_e (-I_E)} \right]^z (-I_E) \\
&= C_d k_z.
\end{aligned} \tag{A.45}$$

Com referência a (A.24), a corrente incremental através de C_{2E} é dada por

$$\begin{aligned}
i_{c2} &= \sum_{z=0}^{\infty} c_{2z} v_{je}^z \frac{dv_{je}}{dt} \\
&= \sum_{z=0}^{\infty} \frac{c_{2z}}{z+1} \frac{d}{dt} \{v_{je}^{z+1}\}.
\end{aligned} \tag{A.46}$$

A título de notação, denomina-se

$$\frac{c_{2z}}{z+1} = \gamma_{e(z+1)}. \tag{A.47}$$

Finalmente, substituindo (A.47) em (A.46), resulta em

$$i_{c2} = \sum_{z=0}^{\infty} \gamma_{e(z+1)} \frac{d}{dt} \{v_{je}^{z+1}\}. \tag{A.48}$$

Dando continuidade a análise, o objetivo agora é determinar uma expressão para a corrente incremental que circula através de C_{1C} . Por definição, a capacitância não-linear de transição da junção base-coletor é expressa por (A.28). Expandindo (A.28) em séries de Taylor em torno do ponto de operação quiescente, obtém-se

$$C_{1C} = c_{10} + \sum_{z=1}^{\infty} c_{1z} v_{jc}^z \tag{A.49}$$

onde a capacitância linear e incremental é dada por

$$c_{10} = \frac{C_C(0)}{\left(1 - \frac{V_{JC}}{\phi}\right)^\mu}. \tag{A.50}$$

e

$$c_{1z} = \frac{C_{10}}{z!} \frac{\mu(\mu+1)\dots(\mu+z-1)}{(\phi - V_{JC})^z} = \frac{(\mu+z-1)}{z(\phi - V_{JC})} c_{1(z-1)}. \quad (\text{A.51})$$

De (A.24), a corrente incremental através de C_{1C} é

$$\begin{aligned} i_{c1} &= \sum_{z=0}^{\infty} c_{1z} v_{jc}^z \frac{dv_{jc}}{dt} \\ &= \sum_{z=0}^{\infty} \frac{c_{1z}}{z+1} \frac{d}{dt} \{v_{jc}^{z+1}\}. \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

A título de notação, denomina-se

$$\frac{c_{1z}}{z+1} = \gamma_{c(z+1)}. \quad (\text{A.53})$$

Finalmente, substituindo (A.53) em (A.52), obtém-se

$$i_{c1} = \sum_{z=0}^{\infty} \gamma_{c(z+1)} \frac{d}{dt} \{v_{jc}^{z+1}\}. \quad (\text{A.54})$$

A próxima não-linearidade a ser analisada é fator de multiplicação de avalanche, M . Expandindo a expressão matemática para M em (A.29) em séries de Taylor, em torno do ponto de operação, obtém-se

$$M = m_0 + \sum_{\rho=1}^{\infty} m_{\rho} v_{cb}^{\rho} \quad (\text{A.55})$$

onde

$$m_0 = \left[1 - \left(\frac{V_{CB}}{V_{CBO}} \right)^{\eta} \right]^{-1}. \quad (\text{A.56})$$

Uma expressão geral para o ρ -ésimo coeficiente, m_{ρ} , é difícil de se obter. De

acordo com (A.36) os três primeiros coeficientes são dados por

$$\begin{aligned}
m_1 &= \frac{1}{1!} \frac{dM}{dv_{CB}} \Big|_{v_{CB}=V_{CB}} = \frac{dm_0}{dV_{CB}} = \frac{\eta}{V_{CBO}^\eta} m_0^2 V_{CB}^{\eta-1}, \\
m_2 &= \frac{1}{2!} \frac{d^2 M}{dv_{CB}^2} \Big|_{v_{CB}=V_{CB}} = \frac{1}{2} \frac{dm_1}{dV_{CB}} \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\eta}{V_{CBO}^\eta} \left(2m_0 \frac{dm_0}{dV_{CB}} V_{CB}^{\eta-1} + (\eta-1)m_0^2 V_{CB}^{\eta-2} \right) \right] \\
&= \frac{m_1^2}{m_0} + \frac{(\eta-1)m_1}{2V_{CB}}, \\
m_3 &= \frac{1}{3!} \frac{d^3 M}{dv_{CB}^3} \Big|_{v_{CB}=V_{CB}} = \frac{1}{3} \frac{dm_2}{dV_{CB}} \\
&= \frac{1}{3} \left[\frac{m_0 2m_1 \frac{dm_1}{dV_{CB}} - m_1^2 \frac{dm_0}{dV_{CB}}}{m_0^2} + \frac{(\eta-1)V_{CB} \frac{dm_1}{dV_{CB}} - m_1}{V_{CB}^2} \right] \\
&= \frac{2}{3} m_2 \left[\frac{2m_1}{m_0} + \frac{\eta-1}{2V_{CB}} \right] - \frac{m_1}{3} \left[\frac{m_1^2}{m_0^2} + \frac{(\eta-1)}{2V_{CB}^2} \right]. \tag{A.57}
\end{aligned}$$

Finalmente, a última não-linearidade a ser analisada é a relação funcional não-linear para α_N . Como α_N é dependente da corrente de coletor, analisando a Figura A.2, obtém-se

$$i_C = \alpha_N(i_C) M i_{JE}. \tag{A.58}$$

Dividindo (A.58) por (A.34), resulta em

$$f(i_C) = \frac{i_C}{\alpha_N(i_C)} = i_C \left[\frac{1 + h_{FE_{max}} + a \log_{10}^2 \left(\frac{i_C}{I_{C_{max}}} \right)}{h_{FE_{max}}} \right] = M i_{JE}. \tag{A.59}$$

Observe que o lado esquerdo de (A.59) está em função somente da corrente de coletor. O próximo passo desse procedimento é expandir $f(i_C)$ em séries de Taylor em torno do ponto de operação. Neste caso, tem-se

$$f(i_C) = f_0 + \sum_{\rho=1}^{\infty} f_\rho i_c^\rho \tag{A.60}$$

onde i_c é a corrente incremental de coletor e

$$f_0 = I_C \left[\frac{1 + h_{FE_{max}} + a \log_{10}^2 \left(\frac{I_C}{I_{C_{max}}} \right)}{h_{FE_{max}}} \right]. \quad (\text{A.61})$$

Os três primeiros coeficientes da expansão em (A.60) são definidos por

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{df_0}{dI_C} \\ &= \frac{1}{h_{FE_{max}}} \left[1 + h_{FE_{max}} + a \log_{10}^2 \left(\frac{I_C}{I_{C_{max}}} \right) + 2a \log_{10} \left(\frac{I_C}{I_{C_{max}}} \right) \log_{10}(e) \right], \\ f_2 &= \frac{1}{2} \frac{df_1}{dI_C} = \frac{a \log_{10}(e)}{h_{FE_{max}} I_C} \left[\log_{10} \left(\frac{I_C}{I_{C_{max}}} \right) + \log_{10}(e) \right], \\ f_3 &= \frac{1}{3} \frac{df_2}{dI_C} = \frac{a \log_{10}(e)}{3h_{FE_{max}} I_C^2} \log_{10} \left(\frac{I_C}{I_{C_{max}}} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

Inserindo as expansões em séries de Taylor para $f(i_c)$, M e i_{JE} em (A.59), obtém-se

$$\begin{aligned} f_0 + \sum_{\rho=1}^{\infty} f_{\rho} i_c^{\rho} &= \left[m_0 + \sum_{\rho=1}^{\infty} m_{\rho} v_{cb}^{\rho} \right] \left[I_{JE} + \sum_{z=1}^{\infty} k_z v_{je}^z \right] \\ &= m_0 I_{JE} + I_{JE} \sum_{\rho=1}^{\infty} m_{\rho} v_{cb}^{\rho} + m_0 \sum_{z=1}^{\infty} k_z v_{je}^z \\ &\quad + \sum_{\rho=1}^{\infty} \sum_{z=1}^{\infty} m_{\rho} k_z v_{cb}^{\rho} v_{je}^z. \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

Analisando (A.63), pode-se notar que

$$f_0 = m_0 I_{JE}. \quad (\text{A.64})$$

A título de simplificação, denotou-se a soma das variáveis incrementais do lado direito da igualdade em (A.63) de y , neste caso

$$y = I_{JE} \sum_{\rho=1}^{\infty} m_{\rho} v_{cb}^{\rho} + m_0 \sum_{z=1}^{\infty} k_z v_{je}^z + \sum_{\rho=1}^{\infty} \sum_{z=1}^{\infty} m_{\rho} k_z v_{cb}^{\rho} v_{je}^z. \quad (\text{A.65})$$

Igualando os valores incrementais em (A.63), conclui-se que

$$y = \sum_{\rho=1}^{\infty} f_{\rho} i_c^{\rho}. \quad (\text{A.66})$$

A equação (A.66) fornece uma expansão em séries de Taylor para y em função da corrente incremental de coletor. Todavia, o que se deseja é uma expansão para i_c . Para se obter esta expansão é necessário a inversão da expressão em (A.66), neste caso

$$i_c = \sum_{\rho=1}^{\infty} \alpha_{\rho} y^{\rho} \quad (\text{A.67})$$

com referência a (A.11), (A.13) e (A.15), os três primeiros coeficientes de (A.67) são definidos como

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{f_1}, \\ \alpha_2 &= -\frac{f_2}{f_1^3}, \\ \alpha_3 &= \frac{2f_2^2 - f_1 f_3}{f_1^5}. \end{aligned} \quad (\text{A.68})$$

Com o objetivo de expressar a corrente incremental de coletor em função das tensões incrementais, (A.65) é substituído em (A.67). A análise da equação resultante é bastante trabalhosa devido ao grande número de termos. Para simplificar a notação, denota-se $q_{\rho}(v_{cb}, v_{je})$ como sendo a soma de todos os termos de ρ -ésimo grau, onde o grau de um termo qualquer é definido como sendo a soma de seus expoentes. Então

$$i_c = \sum_{\rho=1}^{\infty} q_{\rho}(v_{cb}, v_{je}). \quad (\text{A.69})$$

Desenvolvendo (A.69) para $\rho = 1, 2, \text{ e } 3$, obtém-se

$$\begin{aligned}
 q_1(v_{cb}, v_{je}) &= \alpha_1 I_{JE} m_1 v_{cb} + \alpha_1 m_0 k_1 v_{je}, \\
 q_2(v_{cb}, v_{je}) &= (\alpha_1 I_{JE} m_2 + \alpha_2 I_{JE}^2 m_1^2) v_{cb}^2 \\
 &\quad + (\alpha_1 m_1 k_1 + 2\alpha_2 I_{JE} m_0 m_1 k_1) v_{cb} v_{je} \\
 &\quad + (\alpha_1 m_0 k_2 + \alpha_2 m_0^2 k_1^2) v_{je}^2, \\
 q_3(v_{cb}, v_{je}) &= (\alpha_1 I_{JE} m_3 + 2\alpha_2 I_{JE}^2 m_1 m_2 + \alpha_3 I_{JE}^3 m_1^3) v_{cb}^3 \\
 &\quad + (\alpha_1 m_2 k_1 + 2\alpha_2 I_{JE} m_0 m_2 k_1 + 2\alpha_2 I_{JE} m_1^2 k_1) v_{cb}^2 v_{je} \\
 &\quad + (\alpha_1 m_1 k_2 + 2\alpha_2 I_{JE} m_0 m_1 k_2 + 2\alpha_2 m_0 m_1 k_1^2) v_{cb} v_{je}^2 \\
 &\quad + (\alpha_1 m_0 k_3 + 2\alpha_2 m_0^2 k_1 k_2 + \alpha_3 m_0^3 k_1^3) v_{je}^3. \tag{A.70}
 \end{aligned}$$

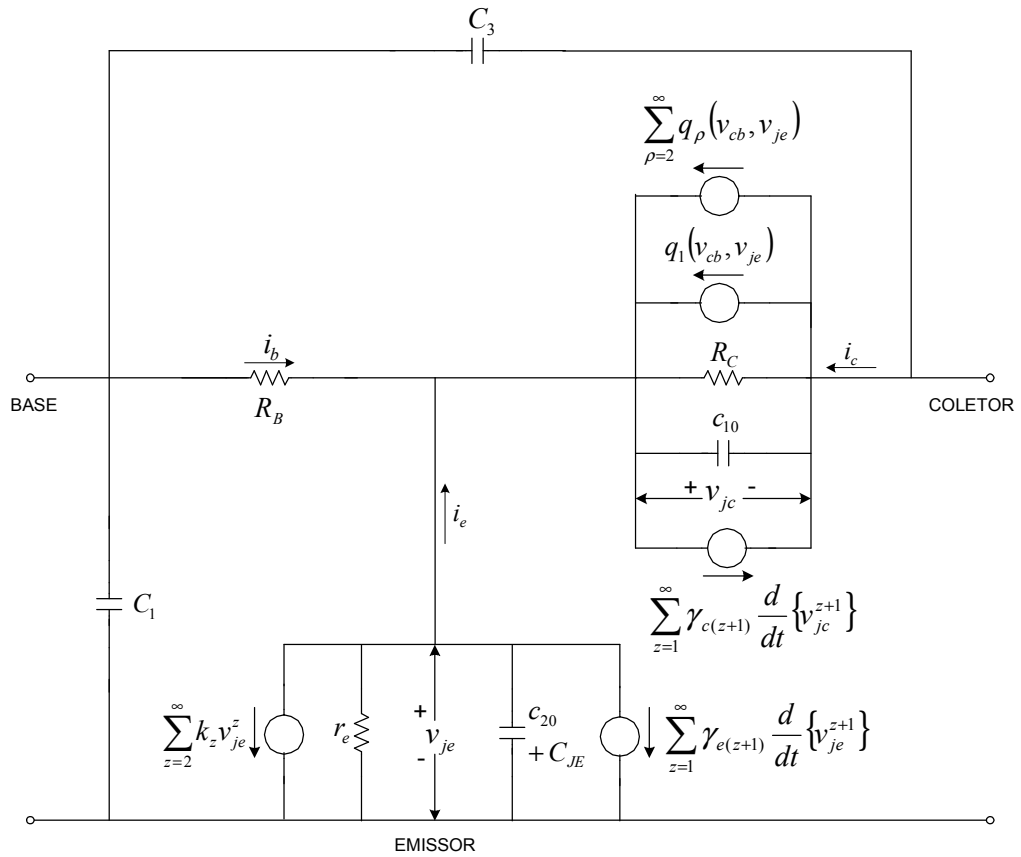


Figura A.3: Modelo T não-linear incremental para o transistor de junção bipolar.

O circuito não-linear incremental equivalente para o transistor BJT foi apresentado na Figura A.3. Este circuito foi derivado do modelo T ilustrado na Figura A.2 e das expansões em séries de Taylor desenvolvidas para representar os ele-

mentos não-lineares inerentes ao modelo.

Parâmetros Extraídos do Transistor BJT Através de Medidas

Os parâmetros do Modelo T, relacionados em seguida, são extraídos do transistor BJT utilizando medidas em laboratório. Tais parâmetros podem ainda ser encontrados em manuais específicos.

R_B	resistência de espalhamento da base;
R_C	resistência de coletor;
C_1	capacitância entre terminais de base e emissor;
C_3	capacitância entre terminais de base e coletor;
C_{JE}	capacitância não-linear de transição da junção base-emissor;
n	fator de compensação;
ϕ	potencial de contato da junção base-coletor;
μ	constante de grade da junção base-coletor;
C_d	constante de capacitância de difusão da junção base-emissor;
$C_C(0)$	capacitância de transição da junção base-coletor para $V_{CB} = 0$;
V_{CBO}	tensão de breakdown entre base e coletor;
η	expoente do fator de multiplicação de avalanche;
h_{FEmax}	máximo ganho de corrente dc ;
I_{Cmax}	valor máximo da corrente de coletor dc ;
a	constante.

Anexo B

Efeitos de Distorções

Não-Lineares

Uma das mais importantes aplicações das funções de transferência não-lineares de Volterra é dar suporte teórico para a caracterização dos efeitos de distorções não-lineares, em sistemas fracamente não-lineares excitados por múltiplos tons.

B.1 Distorção de Intermodulação de Segunda e Terceira Ordens

Assume-se que um sistema fracamente não-linear é excitado pela soma de Q tons senoidais, como foi definido em (2.8). Portanto, a heterodinagem de frequências representada pelo vetor

$$m = (m_{-Q}, \dots, m_{-1}, m_1, \dots, m_Q) \quad (\text{B.1})$$

gera um componente de intermodulação na frequência

$$f_m = (m_1 - m_{-1})f_1 + \dots + (m_Q - m_{-Q})f_Q \quad (\text{B.2})$$

lembrando-se que a heterodinagem representada por (B.1) possui ordem igual a i , define-se como razão de intermodulação, $intr_i(f_m)$, a razão entre a potência média dissipada na carga por um componente de intermodulação e o produto das potências disponíveis dos tons de excitação em suas respectivas frequências.

Expressando analiticamente a definição anterior, resulta em

$$intr_i(f_m) = \frac{p_L(f_m)}{[p_{AS}(f_1)]^{(m_1+m-1)} \dots [p_{AS}(f_Q)]^{(m_Q+m-Q)}}. \quad (\text{B.3})$$

De (2.40) a potência média dissipada na carga é definida como

$$p_L(f_m) = \frac{(i; m)^2}{2^{2i-1}} [|E_1|^2]^{(m_1+m-1)} \dots [|E_Q|^2]^{(m_Q+m-Q)} |H_i(m)|^2 G_L(f_m) \quad (\text{B.4})$$

onde $H_i(m)$ é a função de transferência não-linear de i -ésima ordem definida em (2.36), e $G_L(f_m)$ é a parte real da admitância de carga. Denominando-se a parte real da impedância da fonte de $R_S(f)$, a potência disponível da fonte na frequência f_q , é dada por

$$p_{AS}(f_q) = \frac{|E_q|^2}{2^3 R_S(f_q)}; \quad q = 1, 2, \dots, Q. \quad (\text{B.5})$$

Isolando $|E_q|^2$ em (B.5), obtém-se

$$|E_q|^2 = 2^3 p_{AS}(f_q) R_S(f_q). \quad (\text{B.6})$$

No intuito de eliminar as magnitudes quadradas das tensões complexas de entrada em (B.4) utiliza-se (B.6), obtendo

$$p_L(f_m) = 2^{i+1} (i; m)^2 [p_{AS}(f_1)]^{(m_1+m-1)} \dots [p_{AS}(f_Q)]^{(m_Q+m-Q)} |H_i(m)|^2 \cdot [R_S(f_1)]^{(m_1+m-1)} \dots [R_S(f_Q)]^{(m_Q+m-Q)} G_L(f_m). \quad (\text{B.7})$$

Substituindo (B.7) em (B.3), a razão de intermodulação pode ser expressa como

$$intr_i(f_m) = 2^{i+1} (i; m)^2 |H_i(m)|^2 [R_S(f_1)]^{(m_1+m-1)} \dots [R_S(f_Q)]^{(m_Q+m-Q)} G_L(f_m). \quad (\text{B.8})$$

De (B.3), note que a dimensão de $intr_i(f_m)$ é $watts^{(1-i)}$. No intuito de converter a razão de intermodulação em decibels, escreve-se (B.3) em termos de uma

potência de referência, como

$$[p_r]^{i-1} intr_i(f_m) = \frac{\frac{p_L(f_m)}{p_r}}{\left[\frac{p_{AS}(f_1)}{p_r} \right]^{(m_1+m_{-1})} \cdots \left[\frac{p_{AS}(f_Q)}{p_r} \right]^{(m_Q+m_{-Q})}}. \quad (\text{B.9})$$

Ao empregar esse artifício cada termo em (B.9) se reduz a uma quantidade adimensional. Portanto, a expressão em decibel da razão de intermodulação é dada por

$$INTRR_i(f_m) = P_L(f_m) - (m_1 + m_{-1})P_{AS}(f_1) - \dots - (m_Q + m_{-Q})P_{AS}(f_Q) \quad (\text{B.10})$$

onde

$$\begin{aligned} INTRR_i(f_m) &= 10 \log_{10} [p_r^{i-1} intr_i(f_m)] \\ P_L(f_m) &= 10 \log_{10} [p_L(f_m)/p_r] \\ P_{AS}(f_q) &= 10 \log_{10} [p_{AS}(f_q)/p_r]; \quad q = 1, 2, \dots, Q. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Para expressar $INTRR_i(f_m)$ em termos dos parâmetros do circuito, pode-se escrever

$$p_r = \frac{1}{2} |E_r|^2 G_r \quad (\text{B.12})$$

onde E_r é uma tensão de referência e G_r é a parte real da admitância de referência. De (B.12) e (B.8), segue-se que

$$\begin{aligned} \{p_r^{i-1} intr_i(f_m)\} &= \{|E_r|^{2i-2} |H_i(m)|^2\} \{4(i; m)^2 [R_S(f_1)]^{(m_1+m_{-1})} \\ &\quad \dots [R_S(f_Q)]^{(m_Q+m_{-Q})} G_L(f_m) G_r^{i-1}\}. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

De (2.39), nota-se que a função de transferência não-linear de i -ésima ordem tem dimensão de $volts^{1-i}$. Portanto, todos os termos que estão entre chaves são adimensionais. Neste caso, a razão de intermodulação pode ser expressa em decibels, da seguinte forma

$$\begin{aligned} INTRR_i(f_m) &= 10 \log_{10} \{p_r^{i-1} intr_i(f_m)\} = 20 \log_{10} \{|E_r|^{i-1} |H_i(m)|\} \\ &\quad + 10 \log_{10} \{4(i; m)^2 [R_S(f_1)]^{(m_1+m_{-1})} \\ &\quad \dots [R_S(f_Q)]^{(m_Q+m_{-Q})} G_L(f_m) G_r^{i-1}\}. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Aplicação do Conceito de Razão de Intermodulação ao Amplificador de RF

Para o amplificador ilustrado na Figura 4.1, constatou-se que a parte real das impedâncias de carga e de fonte é aproximadamente $50 \text{ } [\Omega]$. Portanto em (B.14), $G_L(f_m) = 1/50 \text{ } [S]$ e $R_S(f_Q) = 50 \text{ } [\Omega]$. Para avaliar (B.14), é conveniente selecionar a tensão de referência como sendo $1 \text{ } [V]$. Então $|E_r|^{i-1} = 1$. Se a potência de referência é escolhida como sendo $1 \text{ } [mW]$, então de (B.12) o cálculo da parte real da admitância de referência, resulta em $G_r = 2 \text{ } [mS]$. Substituindo estes valores em (B.14) e considerando as heterodinagens de frequências especificadas pelos vetores

$$\begin{aligned} m &= (0, 0, 1, 0) \\ m &= (0, 1, 0, 1) \\ m &= (0, 1, 0, 2), \end{aligned} \tag{B.15}$$

obtém-se, respectivamente,

$$\begin{aligned} INTR_1[f_{(0,0,1,0)}] &= 20\log_{10}[|H_1(f_1)|] + 6\text{dBm} \\ INTR_2[f_{(0,1,0,1)}] &= 20\log_{10}[|H_2(-f_1, f_2)|] + 2\text{dBm} \\ INTR_3[f_{(0,1,0,2)}] &= 20\log_{10}[|H_3(-f_1, f_2, f_2)|] - 4, 4\text{dBm}. \end{aligned} \tag{B.16}$$

De (B.10), a potência média do componente de intermodulação na saída de um sistema fracamente não-linear é definida como

$$P_L(f_m) = (m_1 + m_{-1})P_{AS}(f_1) + \dots + (m_Q + m_{-Q})P_{AS}(f_Q) + INTR_i(f_m) \tag{B.17}$$

Na prática, é conveniente ajustar as potências disponíveis dos tons de entrada em valores iguais. Com referência a (2.24) e igualando os valores das potências disponíveis em (B.17), resulta em

$$P_L(f_m) = iP_{AS} + INTR_i(f_m) \tag{B.18}$$

onde, P_{AS} denota a potência disponível de cada tom de excitação em sua respectiva frequência.

Fazendo $i=1, 2$ e 3 em (B.18) e particularizando esta equação com referência

aos vetores de heterodinagem definidos em (B.15), obtém-se, respectivamente

$$\begin{aligned} P_L[f_{(0,0,1,0)}] &= P_{AS} + INTR_1[f_{(0,0,1,0)}] \\ P_L[f_{(0,1,0,1)}] &= 2P_{AS} + INTR_2[f_{(0,1,0,1)}] \\ P_L[f_{(0,1,0,2)}] &= 3P_{AS} + INTR_3[f_{(0,1,0,2)}]. \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Finalmente, substituindo (B.16) em (B.19), obtém-se as potências dos componentes de intermodulação dissipadas na carga, em função das funções de transferência não-lineares do sistema

$$\begin{aligned} P_L[f_{(0,0,1,0)}] &= P_{AS} + 20\log_{10}[|H_1(f_1)|] + 6\text{dBm} \\ P_L[f_{(0,1,0,1)}] &= 2P_{AS} + 20\log_{10}[|H_2(-f_1, f_2)|] + 2\text{dBm} \\ P_L[f_{(0,1,0,2)}] &= 3P_{AS} + 20\log_{10}[|H_3(-f_1, f_2, f_2)|] - 4, 4\text{dBm}. \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

B.1.1 Conceito de Ponto de Interceptação

Analisando a Figura 5.1, pode-se definir que o ponto de interceptação de *i*-ésima ordem, denotado por $I_i(f_m)$, é a potência média de saída em que a curva de *i*-ésima ordem intercepta a curva de primeira ordem. Particularmente, nas Figuras 5.1 e 5.2, tem-se o ponto de interceptação de segunda ordem, $I_2[f_{(0,1,0,1)}]$ e o ponto de interceptação de terceira ordem, $I_3[f_{(0,1,0,2)}]$.

Uma expressão analítica para os pontos de interceptação pode ser obtida em função das funções de transferências não-lineares. Observando a Figura 5.1, nota-se que a curva de primeira ordem intercepta a curva de ordem *i*, quando $P_L[f_{(0,0,1,0)}] = P_L(f_m)$. Note que no caso particular desta Figura o máximo valor de *i* é três. Segue-se de (B.19) e (B.18) que

$$P_{AS} + INTR_1[f_{(0,0,1,0)}] = iP_{AS} + INTR_i(f_m). \quad (\text{B.21})$$

Isolando a potência disponível de entrada em (B.21), resulta em

$$P_{AS} = \frac{1}{i-1} \{INTR_1[f_{(0,0,1,0)}] - INTR_i(f_m)\}. \quad (\text{B.22})$$

Pela definição, $I_i(f_m)$ é a potência média de saída em que a curva de *i*-ésima ordem intercepta a curva de primeira ordem e a potência disponível dos tons de entrada onde esta interceptação ocorre é dada por (B.22). Portanto, substituindo

(B.22) em (B.18), obtém-se

$$I_i(f_m) = \frac{i}{i-1} \text{INTR}_1[f_{(0,0,1,0)}] - \frac{1}{i-1} \text{INTR}_i(f_m). \quad (\text{B.23})$$

Cabe destacar que (B.23) é válida somente quando i for maior ou igual a 2.

Particularmente, substituindo a terceira equação de (B.16) em (B.23), o ponto de interceptação de terceira ordem do circuito apresentado na Figura 4.1 é definido como

$$\begin{aligned} I_3(f_m) &= 30 \log_{10}[|H_1(f_1)|] - 10 \log_{10}[|H_3(-f_1, f_2, f_2)|] + 11,2 \\ &= 10 \log_{10} \left[\frac{|H_1(f_1)|^3}{|H_3(-f_1, f_2, f_2)|} \right] + 11,2 \text{ dBm}. \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

B.2 Ganho de Compressão ou Expansão

Ganho de Compressão ou expansão é um efeito que pode ser observado em amplificadores de potência. É possível prever esse tipo de fenômeno empregando a teoria envolvendo as funções de transferência não-lineares de terceira ordem de Volterra. Considere a entrada de um sistema fracamente não-linear como sendo

$$x(t) = |E_1| \cos(2\pi f_1 t + \theta_1). \quad (\text{B.25})$$

Então a saída é um sinal periódico, que pode ser expresso utilizando a expansão em série de Fourier, como segue

$$\begin{aligned} y(t) &= |A_0| + |A_1| \cos[2\pi f_1 t + \alpha_1] + |A_2| \cos[2\pi(2f_1)t + \alpha_2] \\ &\quad + |A_3| \cos[2\pi(3f_1)t + \alpha_3] + \dots \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Como a excitação caracterizada em (B.25) é somente uma senoide, ao se considerá-la na forma exponencial, percebe-se que as frequências de entrada são $-f_1$ e f_1 . Neste caso, uma heterodinagem de ordem i é caracterizada pelo vetor $m = (m_{-1}, m_1)$, onde

$$m_{-1} + m_1 = i. \quad (\text{B.27})$$

Com referência a (2.29), a porção de i -ésima ordem da resposta que corresponde a heterodinagem representada por m é expressa como

$$y_i(t; m) = \frac{(i; m)}{2^i} (E_1^*)^{m-1} (E_1)^{m_1} H_i(\underbrace{f_{-1}, \dots, f_{-1}}_{m-1}, \underbrace{f_1, \dots, f_1}_{m_1}) \cdot \exp[j2\pi(m_1 - m_{-1})f_1 t]. \quad (\text{B.28})$$

Dependendo dos valores dos inteiros positivos m_1 e m_{-1} a saída consiste de sinais dc, quando $m_1 = m_{-1}$ ou harmônicos das entradas, para $m_1 \neq m_{-1}$.

Combinando (B.28) com seu complexo conjugado, como foi feito em (2.35), a resposta senoidal em $(m_1 - m_{-1})f_1$ é definida como

$$\begin{aligned} \hat{y}_i(t; m) &= 2\text{Re}\{y_i(t; m)\} \\ &= \text{Re} \left\{ \frac{(i; m)}{2^{i-1}} (E_1^*)^{m-1} (E_1)^{m_1} H_i(\underbrace{f_{-1}, \dots, f_{-1}}_{m-1}, \underbrace{f_1, \dots, f_1}_{m_1}) \cdot \exp[j2\pi(m_1 - m_{-1})f_1 t] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

No estudo de ganho de compressão ou expansão, o componente de interesse na resposta expressa em (B.26) é o fundamental. Neste caso, com referência a (B.26) e fazendo uso de (B.29), os principais termos do primeiro harmônico são dados por

$$\begin{aligned} y(t; f_1) &= |A_1| \cos[2\pi f_1 t + \alpha_1] \\ &= \hat{y}_1(t; 0, 1) + \hat{y}_3(t; 1, 2) + \hat{y}_5(t; 2, 3) + \dots \\ &= \text{Re}\{ (E_1) \exp[j2\pi(f_1)t] [H_1(f_1) + \frac{3}{4}|E_1|^2 H_3(-f_1, f_1, f_1) \\ &\quad + \frac{5}{8}|E_1|^4 H_5(-f_1, -f_1, f_1, f_1, f_1) + \dots] \}. \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

O ganho de tensão na freqüência fundamental é definido como

$$vg = \left| \frac{A_1}{E_1} \right| = \left| H_1(f_1) + \frac{3}{4}|E_1|^2 H_3(-f_1, f_1, f_1) + \frac{5}{8}|E_1|^4 H_5(-f_1, -f_1, f_1, f_1, f_1) + \dots \right|. \quad (\text{B.31})$$

Para um sistema linear todas as funções de transferência acima de primeira ordem são nulas. Neste caso, o ganho de tensão é constante e igual a magnitude da função de transferência linear avaliada em f_1 . Contudo, as funções de transferência não-lineares não são nulas em um sistema fracamente não-linear. Portanto, o ganho

de tensão depende, de forma não-linear, da magnitude do sinal de entrada.

Segue-se que todos os amplificadores saturam, fazendo o ganho resultante do sistema ficar abaixo do ganho linear para entradas suficientemente elevadas. Quando o sistema entra em saturação, (B.31) não é uma expressão conveniente para o ganho de tensão, pois requer um número grande de termos para uma aproximação mais precisa. Para suprir este número grande de termos é necessário determinar funções de transferência não-lineares acima de terceira ordem, aumentando de forma exponencial a manipulação matemática envolvida. Neste caso, (B.31) é usada em conjunto com sinais de entrada pequenos, no intuito de prever o início do comportamento não-linear do sistema, empregando as funções de transferência não-lineares até a terceira ordem. Sendo assim, efeitos acima de terceira ordem são desprezados e (B.31) reduz-se a

$$\begin{aligned} vg &= \left| \frac{A_1}{E_1} \right| \approx \left| H_1(f_1) + \frac{3}{4}|E_1|^2 H_3(-f_1, f_1, f_1) \right| \\ &= |H_1(f_1)| \left| 1 + \frac{3}{4}|E_1|^2 \frac{H_3(-f_1, f_1, f_1)}{H_1(f_1)} \right|. \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

A razão de ganho de compressão/expansão, denotada por gce , é definida como

$$gce = \left| \frac{A_1}{E_1 H_1(f_1)} \right| = \left| 1 + \frac{3}{4}|E_1|^2 \frac{H_3(-f_1, f_1, f_1)}{H_1(f_1)} \right|. \quad (\text{B.33})$$

De (B.33) nota-se que gce é a razão entre a magnitude atual da resposta fundamental e a magnitude que deveria existir se o sistema fosse perfeitamente linear. Evidentemente, esta razão é igual a unidade para um sistema idealmente linear e pode ser menor que a unidade quando $Re\{H_3(-f_1, f_1, f_1)/H_1(f_1)\} < 0$, nestas condições tem-se ganho de compressão. Por outro lado, a razão é maior que a unidade quando $Re\{H_3(-f_1, f_1, f_1)/H_1(f_1)\} > 0$, nesta situação fala-se então, de ganho de expansão.

Quando a amplitude de entrada é suficientemente pequena, tal que

$$\frac{3}{4}|E_1|^2 \frac{H_3(-f_1, f_1, f_1)}{H_1(f_1)} \ll 1, \quad (\text{B.34})$$

a expressão em (B.33) pode ser simplificada. Para realizar tal simplificação, denominou-se o lado esquerdo da inequação em (B.34) como

$$\frac{3}{4}|E_1|^2 \frac{H_3(-f_1, f_1, f_1)}{H_1(f_1)} = A_r + jA_i, \quad (\text{B.35})$$

onde A_r e A_i denotam a parte real e imaginária, respectivamente, de

$(3/4)|E_1|^2 H_3(-f_1, f_1, f_1)/H_1(f_1)$. Substituindo (B.35) em (B.33), resulta em

$$gce = |1 + A_r + jA_i| = [(1 + A_r)^2 + (A_i)^2]^{1/2}. \quad (\text{B.36})$$

Para o caso em que n não é um inteiro, o teorema binomial estabelece que,

$$(a + b)^n = a^n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} a^{n-k} b^k. \quad (\text{B.37})$$

Ao fazer,

$$n = \frac{1}{2}, \quad a = (1 + A_r)^2, \quad b = (A_i)^2, \quad (\text{B.38})$$

a aplicação do teorema binomial em (B.36), resulta em

$$gce = (1 + A_r) + \frac{1}{2} \frac{(A_i)^2}{(1 + A_r)} - \frac{1}{8} \frac{(A_i)^4}{(1 + A_r)^3} + \cdots. \quad (\text{B.39})$$

Por causa da imposição em (B.34), A_r e A_i são muito menores que a unidade. Segue-se portanto, que a razão de ganho de compressão/expansão pode ser aproximada por

$$gce \approx 1 + A_r = 1 + \frac{3}{4}|E_1|^2 \text{Re} \left\{ \frac{H_3(-f_1, f_1, f_1)}{H_1(f_1)} \right\}. \quad (\text{B.40})$$

Expressando (B.40) em decibels, tem-se

$$\begin{aligned} GCE &= 20 \log_{10} gce \\ &\approx 20 \log_{10} \left[1 + \frac{3}{4}|E_1|^2 \text{Re} \left\{ \frac{H_3(-f_1, f_1, f_1)}{H_1(f_1)} \right\} \right] \text{ dB}. \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

A potência disponível do sinal de entrada é inserida em (B.41), sabendo-se que

$$p_{AS} = \frac{|E_1|^2}{8R_S} \quad (\text{B.42})$$

onde R_S é a parte real da impedância da fonte. Portanto

$$GCE \approx 20 \log_{10} \left[1 + 6R_S p_{AS} \text{Re} \left\{ \frac{H_3(-f_1, f_1, f_1)}{H_1(f_1)} \right\} \right] \text{ dB}. \quad (\text{B.43})$$

Em algumas aplicações é desejável inverter (B.43) no intuito de saber a potência disponível de entrada necessária para produzir uma quantidade específica de compressão ou expansão. O primeiro passo para realizar a inversão é expressar (B.43) em termos de logaritmo Nepperiano, fazendo uso da seguinte relação

$$\log_{10} x = [\log_{10} e] \ln x = 0,43 \ln x \quad (\text{B.44})$$

onde $e = 2,718$ é a base de Nepperiana. Portanto, (B.43) pode também ser expressa como

$$GCE \approx 8,6 \ln \left[1 + 6R_S p_{AS} Re \left\{ \frac{H_3(-f_1, f_1, f_1)}{H_1(f_1)} \right\} \right] \text{ dB.} \quad (\text{B.45})$$

No entanto, para $x \ll 1$, sabe-se que

$$\ln(1+x) \approx x. \quad (\text{B.46})$$

Com referência a (B.34), tem-se

$$6R_S p_{AS} Re \left\{ \frac{H_3(-f_1, f_1, f_1)}{H_1(f_1)} \right\} \ll 1. \quad (\text{B.47})$$

Portanto, pode-se utilizar (B.46) em (B.45). Fazendo isto, obtém-se

$$GCE \approx 51,6 R_S p_{AS} Re \left\{ \frac{H_3(-f_1, f_1, f_1)}{H_1(f_1)} \right\} \text{ dB.} \quad (\text{B.48})$$

Isolando p_{AS} em (B.48), resulta em

$$p_{AS} \approx \frac{GCE}{51,6 R_S Re \left\{ \frac{H_3(-f_1, f_1, f_1)}{H_1(f_1)} \right\}}. \quad (\text{B.49})$$

Finalmente, expressando (B.49) em dBm, obtém-se

$$\begin{aligned}
 P_{AS} &= 10 \log_{10} \left[\frac{p_{AS}}{1 \times 10^{-3}} \right] \approx 10 \log_{10} \left[\frac{19,4}{R_S} \frac{GCE}{\operatorname{Re} \left\{ \frac{H_3(-f_1, f_1, f_1)}{H_1(f_1)} \right\}} \right] \\
 &= 10 \log_{10} \left[GCE \operatorname{Re} \left\{ \frac{H_1(f_1)}{H_3(-f_1, f_1, f_1)} \right\} \right] + 10 \log_{10} \left[\frac{19,4}{R_S} \right] \text{ dBm.}
 \end{aligned}
 \tag{B.50}$$

Anexo C

Funções de Transferência Lineares e Não-Lineares do Amplificador de Microondas

A demonstração das equações que representam as funções de transferência lineares e as funções de transferência não-lineares de segunda e terceira ordens, para o circuito apresentado na Figura 6.1, foram realizadas neste anexo.

C.1 Funções de Transferência Lineares

O método de entradas harmônicas, definido no Capítulo 4, será aplicado novamente para determinar as funções de transferência.

Primeiramente, as funções de transferência lineares são determinadas selecionando a tensão de entrada como sendo

$$v(t) = \exp[j2\pi f_1 t]. \quad (\text{C.1})$$

Neste caso, o vetor de fonte independente especificado em (6.12), torna-se

$$u(t) = \begin{bmatrix} \frac{\vartheta_1 \exp(j2\pi f_1 t)}{\vartheta_2 [Z_S(j\omega) + R_g]} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.2})$$

onde

$$\vartheta_1 = (jw)^5 C_1^2 L_1^2 L_2 + (jw)^3 C_1 L_1 L_2,$$

$$\begin{aligned} \vartheta_2 = (jw)^5 C_1^2 L_1^2 L_2 + (jw)^4 C_1^2 L_1 R_S (L_1 + L_2) + 2(jw)^3 C_1 L_1 L_2 \\ + (jw)^2 C_1 R_S (2L_1 + L_2) + jw L_2 + R_S. \end{aligned}$$

Observe que (C.1) foi obtido fazendo $Q = 1$, $E_1 = 2$ em (2.8) e omitindo os termos com frequência negativa. Denotando-se as funções de transferência de i -ésima ordem de $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ e $d(t)$ por $A_i(f_1, f_2, \dots, f_i)$, $B_i(f_1, f_2, \dots, f_i)$, $C_i(f_1, f_2, \dots, f_i)$ e $D_i(f_1, f_2, \dots, f_i)$, segue-se de (2.14) e da entrada especificada em (C.1), que os componentes de i -ésima ordem de $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ e $d(t)$ são definidos, respectivamente, por

$$\begin{aligned} a_i(t) &= A_i(f_1, f_1, \dots, f_1) \exp[j2\pi(i f_1)t], \\ b_i(t) &= B_i(f_1, f_1, \dots, f_1) \exp[j2\pi(i f_1)t], \\ c_i(t) &= C_i(f_1, f_1, \dots, f_1) \exp[j2\pi(i f_1)t], \\ d_i(t) &= D_i(f_1, f_1, \dots, f_1) \exp[j2\pi(i f_1)t]. \end{aligned} \quad (C.3)$$

De (2.9) as tensões totais de nó para terra são representadas como

$$a(t) = \sum_{i=1}^n a_i(t), \quad b(t) = \sum_{i=1}^n b_i(t), \quad c(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t), \quad d(t) = \sum_{i=1}^n d_i(t). \quad (C.4)$$

Onde os termos acima de ordem n são considerados desprezíveis. Substituindo (C.2), (C.3) e (C.4) em (6.9), resulta em

$$\begin{bmatrix} Y(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1(f_1) \exp[j2\pi(f_1)t] + \dots \\ B_1(f_1) \exp[j2\pi(f_1)t] + \dots \\ C_1(f_1) \exp[j2\pi(f_1)t] + \dots \\ D_1(f_1) \exp[j2\pi(f_1)t] + \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\vartheta_1 \exp(j2\pi f_1 t)}{\vartheta_2 [Z_S(jw) + R_g]} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (C.5)$$

Resolvendo as operações impostas pelo operador diferencial, p , da matriz $[Y(p)]$ em (C.5), como foi mostrado na Seção 4.2.1 e igualando-se os coeficientes

de $\exp[j2\pi f_1 t]$, obtém-se

$$\begin{bmatrix} Y(j2\pi f_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1(f_1) \\ B_1(f_1) \\ C_1(f_1) \\ D_1(f_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2[Z_S(jw) + R_g]} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.6})$$

Invertendo a matriz admitância em (C.6), as funções de transferência lineares do circuito ilustrado na Figura 6.1, são dadas por

$$\begin{bmatrix} A_1(f_1) \\ B_1(f_1) \\ C_1(f_1) \\ D_1(f_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y(j2\pi f_1) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2[Z_S(jw) + R_g]} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.7})$$

C.2 Funções de Transferência Não-Lineares de Segunda Ordem

Para determinação das funções de transferência não-lineares de segunda ordem a entrada do circuito ilustrado na Figura 6.1 é expressa como

$$v(t) = \exp[j2\pi f_1 t] + \exp[j2\pi f_2 t]. \quad (\text{C.8})$$

Observe que (C.8) foi obtida de (2.8) selecionando $Q = 2$, $E_1 = E_2 = 2$ e omitindo os termos com frequência negativa. Com referência a (2.14), os componentes de i -ésima ordem de $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ e $d(t)$ são definidos, respectivamente, por

$$\begin{aligned} a_i(t) &= \sum_{q_1=1}^2 \dots \sum_{q_i=1}^2 A_i(f_{q_1}, \dots, f_{q_i}) \exp[j2\pi(f_{q_1} + \dots + f_{q_i})t], \\ b_i(t) &= \sum_{q_1=1}^2 \dots \sum_{q_i=1}^2 B_i(f_{q_1}, \dots, f_{q_i}) \exp[j2\pi(f_{q_1} + \dots + f_{q_i})t], \\ c_i(t) &= \sum_{q_1=1}^2 \dots \sum_{q_i=1}^2 C_i(f_{q_1}, \dots, f_{q_i}) \exp[j2\pi(f_{q_1} + \dots + f_{q_i})t], \\ d_i(t) &= \sum_{q_1=1}^2 \dots \sum_{q_i=1}^2 D_i(f_{q_1}, \dots, f_{q_i}) \exp[j2\pi(f_{q_1} + \dots + f_{q_i})t]. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Ao substituir (C.9) e (C.4) em conjunto com (6.12) em (6.9) e escrevendo o resultado de modo que somente os termos de segunda ordem fiquem explícitos, obtém-se

$$\begin{bmatrix} Y(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2(t) + \dots \\ b_2(t) + \dots \\ c_2(t) + \dots \\ d_2(t) + \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g_{s2}[a_1(t) - b_1(t)]^2 - g_{d2}[d_1(t) - c_1(t)]^2 \\ +g_{s2}[a_1(t) - b_1(t)]^2 + g_{d2}[d_1(t) - c_1(t)]^2 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.10})$$

Novamente, é importante enfatizar que as funções de transferência não-lineares de segunda ordem são determinadas igualando os coeficientes de $\exp[j2\pi(f_1 + f_2)t]$ em ambos os lados da equação resultante em (C.10), lembrando-se que as mesmas considerações feitas na Seção 4.2.2 para as frequências f_1 e f_2 são válidas neste Anexo. Neste caso, os produtos de intermodulação em $f_1 + f_2$ podem ser gerados somente por termos de segunda ordem, pertencentes aos vetores $j(t)$ e $e(t)$.

Desenvolvimento da Não-Linearidade de Segunda Ordem da Fonte de Corrente Controlada por Tensão

O termo que expressa a não-linearidade da fonte de corrente controlada por tensão em (C.10), é dado por

$$\begin{aligned} g_{s2}[a_1(t) - b_1(t)]^2 &= g_{s2}[a_1^2(t) - 2a_1(t)b_1(t) + b_1^2(t)] \\ &= g_{s2}a_1^2(t) - 2g_{s2}a_1(t)b_1(t) + g_{s2}b_1^2(t). \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Substituindo a primeira equação de (C.9), para $i = 1$, no termo $g_{s2}a_1^2(t)$ de (C.11), tem-se

$$\begin{aligned}
 g_{s2}a_1^2(t) &= g_{s2} \left\{ \sum_{q_1=1}^2 A_1(f_{q_1}) \exp[j2\pi f_{q_1} t] \right\}^2 \\
 &= g_{s2} \left\{ \sum_{q_1=1}^2 A_1(f_{q_1}) \exp[j2\pi f_{q_1} t] \right\} \left\{ \sum_{q_2=1}^2 A_1(f_{q_2}) \exp[j2\pi f_{q_2} t] \right\} \\
 &= g_{s2} \sum_{q_1=1}^2 \sum_{q_2=1}^2 A_1(f_{q_1}) A_1(f_{q_2}) \exp[j2\pi(f_{q_1} + f_{q_2})t]. \quad (C.12)
 \end{aligned}$$

Agrupando os termos originados na expansão do duplo somatório em (C.12) que possuem $\exp[j2\pi(f_1 + f_2)t]$ e colocando o resultado em notação de barra, obtém-se

$$g_{s2} \overline{A_1(f_1)A_1(f_2)} \exp[j2\pi(f_1 + f_2)t]. \quad (C.13)$$

Da mesma forma para os termos $2g_{s2}a_1(t)b_1(t)$ e $g_{s2}b_1^2(t)$, respectivamente, obtém-se

$$2g_{s2} \overline{A_1(f_1)B_1(f_2)} \exp[j2\pi(f_1 + f_2)t], \quad (C.14)$$

$$g_{s2} \overline{B_1(f_1)B_1(f_2)} \exp[j2\pi(f_1 + f_2)t]. \quad (C.15)$$

Finalmente, de acordo com (C.11), (C.13), (C.14) e (C.15), a soma dos componentes resultantes da não-linearidade da fonte de corrente controlada por tensão que estão na frequência $f_1 + f_2$ é dada por

$$g_{s2} \left[\overline{A_1(f_1)A_1(f_2)} - 2\overline{A_1(f_1)B_1(f_2)} + \overline{B_1(f_1)B_1(f_2)} \right] \exp[j2\pi(f_1 + f_2)t]. \quad (C.16)$$

Desenvolvimento da Não-Linearidade de Segunda Ordem da Condutância de Dreno

O termo que caracteriza o comportamento não-linear da condutância de dreno em (C.10), é definido como

$$\begin{aligned}
 g_{d2}[d_1(t) - c_1(t)]^2 &= g_{s2}[d_1^2(t) - 2d_1(t)c_1(t) + c_1^2(t)] \\
 &= g_{s2}d_1^2(t) - 2g_{s2}d_1(t)c_1(t) + g_{s2}c_1^2(t). \quad (C.17)
 \end{aligned}$$

Seguindo o mesmo procedimento realizado anteriormente de (C.12) a (C.16), segue-se que para os termos de segunda ordem resultantes em (C.17), a soma dos componentes resultantes da não-linearidade de segunda ordem da condutância de dreno é definida por

$$g_{d2} \left[\overline{D_1(f_1)D_1(f_2)} - 2\overline{C_1(f_1)D_1(f_2)} + \overline{C_1(f_1)C_1(f_2)} \right] \exp[j2\pi(f_1 + f_2)t]. \quad (\text{C.18})$$

Desenvolvimento das Tensões de Segunda Ordem do Vetor $e(t)$

Usando (C.9), a tensão de segunda ordem do nó a é definida como

$$a_2(t) = \sum_{q_1=1}^2 \sum_{q_2=1}^2 A_2(f_{q_1}, f_{q_2}) \exp[j2\pi(f_{q_1} + f_{q_2})t]. \quad (\text{C.19})$$

Expandindo (C.19), evidenciando os coeficientes de $\exp[j2\pi(f_1 + f_2)t]$ gerados na expansão e levando-se em consideração a simetria das funções de transferência não-lineares, resulta em

$$a_2(t) = 2A_2(f_1, f_2) \exp[j2\pi(f_1 + f_2)t] + \dots \quad (\text{C.20})$$

De forma análoga, para as tensões $b_2(t)$, $c_2(t)$ e $d_2(t)$, tem-se respectivamente,

$$b_2(t) = 2B_2(f_1, f_2) \exp[j2\pi(f_1 + f_2)t] + \dots, \quad (\text{C.21})$$

$$c_2(t) = 2C_2(f_1, f_2) \exp[j2\pi(f_1 + f_2)t] + \dots, \quad (\text{C.22})$$

$$d_2(t) = 2D_2(f_1, f_2) \exp[j2\pi(f_1 + f_2)t] + \dots. \quad (\text{C.23})$$

Substituindo (C.23), (C.22), (C.21) e (C.20) em (C.10) e resolvendo as operações impostas pelo operador diferencial da matriz $[Y(p)]$, tem-se

$$\begin{bmatrix} Y[j2\pi(f_1 + f_2)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2A_2(f_1, f_2) \exp[j2\pi(f_1 + f_2)t] + \dots \\ 2B_2(f_1, f_2) \exp[j2\pi(f_1 + f_2)t] + \dots \\ 2C_2(f_1, f_2) \exp[j2\pi(f_1 + f_2)t] + \dots \\ 2D_2(f_1, f_2) \exp[j2\pi(f_1 + f_2)t] + \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{1S} + \dots \\ L_{2S} + \dots \\ L_{3S} + \dots \\ L_{4S} + \dots \end{bmatrix} \quad (\text{C.24})$$

onde

$$L_{1S} = 0;$$

$$L_{2S} = 0;$$

$$L_{3S} = \left\{ -g_{s2} \left[\overline{A_1(f_1)A_1(f_2)} - 2\overline{A_1(f_1)B_1(f_2)} + \overline{B_1(f_1)B_1(f_2)} \right] - g_{d2} \left[\overline{D_1(f_1)D_1(f_2)} - 2\overline{C_1(f_1)D_1(f_2)} + \overline{C_1(f_1)C_1(f_2)} \right] \right\} \cdot \exp[j2\pi(f_1 + f_2)t];$$

$$L_{4S} = \left\{ g_{s2} \left[\overline{A_1(f_1)A_1(f_2)} - 2\overline{A_1(f_1)B_1(f_2)} + \overline{B_1(f_1)B_1(f_2)} \right] + g_{d2} \left[\overline{D_1(f_1)D_1(f_2)} - 2\overline{C_1(f_1)D_1(f_2)} + \overline{C_1(f_1)C_1(f_2)} \right] \right\} \cdot \exp[j2\pi(f_1 + f_2)t].$$

(C.25)

Finalmente, igualando os coeficientes de $\exp[j2\pi(f_1 + f_2)t]$ em ambos os lados da igualdade em (C.24) e invertendo a matriz admitância desta equação, as funções de transferência não-lineares de segunda ordem são dadas por

$$\begin{bmatrix} A_2(f_1, f_2) \\ B_2(f_1, f_2) \\ C_2(f_1, f_2) \\ D_2(f_1, f_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y[j2\pi(f_1 + f_2)] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\xi_{1S} \\ \frac{1}{2}\xi_{2S} \\ \frac{1}{2}\xi_{3S} \\ \frac{1}{2}\xi_{3S} \end{bmatrix}. \quad (\text{C.26})$$

Onde, ξ_{1S} , ξ_{2S} , ξ_{3S} e ξ_{4S} são os coeficientes de $\exp[j2\pi(f_1 + f_2)t]$. Segue-se que ξ_{1S} , ξ_{2S} , ξ_{3S} e ξ_{4S} são definidos como

$$\xi_{1S} = 0;$$

$$\xi_{2S} = 0;$$

$$\xi_{3S} = -g_{s2} \left[\overline{A_1(f_1)A_1(f_2)} - 2\overline{A_1(f_1)B_1(f_2)} + \overline{B_1(f_1)B_1(f_2)} \right] \\ - g_{d2} \left[\overline{D_1(f_1)D_1(f_2)} - 2\overline{C_1(f_1)D_1(f_2)} + \overline{C_1(f_1)C_1(f_2)} \right];$$

$$\xi_{4S} = g_{s2} \left[\overline{A_1(f_1)A_1(f_2)} - 2\overline{A_1(f_1)B_1(f_2)} + \overline{B_1(f_1)B_1(f_2)} \right] \\ + g_{d2} \left[\overline{D_1(f_1)D_1(f_2)} - 2\overline{C_1(f_1)D_1(f_2)} + \overline{C_1(f_1)C_1(f_2)} \right].$$

(C.27)

C.3 Funções de Transferência Não-Lineares de Terceira Ordem

Para determinar as funções de transferência não-lineares de terceira ordem a excitação do circuito ilustrado na Figura 6.1 é escolhida como sendo

$$v(t) = \sum_{q_1=1}^3 \exp[j2\pi f_{q_1} t]. \quad (\text{C.28})$$

Assim como no caso das funções de segunda ordem, assume-se que as frequências dos tons de excitação são positivas e diferentes entre si. Note que (C.28) é obtida de (2.8) selecionando $Q = 3$, $E_1 = E_2 = E_3 = 2$ e omitindo os termos com frequência negativa. Segue-se de (2.14) e (C.28) que os componentes de *i-ésima*

ordem de $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ e $d(t)$ são dadas por

$$\begin{aligned}
 a_i(t) &= \sum_{q_1=1}^3 \dots \sum_{q_i=1}^3 A_i(f_{q_1}, \dots, f_{q_i}) \exp[j2\pi(f_{q_1} + \dots + f_{q_i})t], \\
 b_i(t) &= \sum_{q_1=1}^3 \dots \sum_{q_i=1}^3 B_i(f_{q_1}, \dots, f_{q_i}) \exp[j2\pi(f_{q_1} + \dots + f_{q_i})t], \\
 c_i(t) &= \sum_{q_1=1}^3 \dots \sum_{q_i=1}^3 C_i(f_{q_1}, \dots, f_{q_i}) \exp[j2\pi(f_{q_1} + \dots + f_{q_i})t], \\
 d_i(t) &= \sum_{q_1=1}^3 \dots \sum_{q_i=1}^3 D_i(f_{q_1}, \dots, f_{q_i}) \exp[j2\pi(f_{q_1} + \dots + f_{q_i})t]. \quad (C.29)
 \end{aligned}$$

Ao substituir (C.29) e (C.4) em conjunto com (6.12) em (6.9) e escrevendo o resultado tal que os termos de terceira ordem fiquem explícitos, tem-se

$$\begin{aligned}
 & \left[Y(p) \right] \begin{bmatrix} a_3(t) + \dots \\ b_3(t) + \dots \\ c_3(t) + \dots \\ d_3(t) + \dots \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sum_{k=2}^3 g_{sk} [a(t) - b(t)]^k - \sum_{k=2}^3 g_{dk} [d(t) - c(t)]^k \\ \sum_{k=2}^3 g_{sk} [a(t) - b(t)]^k + \sum_{k=2}^3 g_{dk} [d(t) - c(t)]^k \end{bmatrix}. \quad (C.30)
 \end{aligned}$$

Como foi comentado na Seção 4.2.3, as funções de transferência não-lineares de terceira ordem são determinadas igualando os coeficientes de $\exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]$ em ambos os lados de (C.30). Contudo, a natureza positiva e incomensurável das frequências dos tons de excitação, requer que os componentes

de intermodulação na frequência $f_1 + f_2 + f_3$ sejam gerados somente por termos de terceira ordem, pertencentes aos vetores $j(t)$ e $e(t)$. Segue-se que os termos de terceira ordem no vetor $j(t)$ são gerados ao selecionar

$$\begin{aligned} a(t) &= a_1(t) + a_2(t) \\ b(t) &= b_1(t) + b_2(t) \\ c(t) &= c_1(t) + c_2(t) \\ d(t) &= d_1(t) + d_2(t) \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

O vetor $u(t)$ é desconsiderado na análise de terceira ordem, pois seus componentes estão na frequência f_1 , f_2 e f_3 e não em $f_1 + f_2 + f_3$.

Desenvolvimento da Não-Linearidade de Terceira Ordem da Fonte de Corrente Controlada por Tensão

O termo que expressa a não-linearidade da fonte de corrente controlada por tensão em (C.30), é dado por

$$\sum_{k=2}^3 g_{sk} [a(t) - b(t)]^k = g_{s2} [a(t) - b(t)]^2 + g_{s3} [a(t) - b(t)]^3 \quad (\text{C.32})$$

o termo resultante do somatório em (C.32), para $k = 2$, é expresso como

$$g_{s2} [a(t) - b(t)]^2 = g_{s2} [a^2(t) - 2a(t)b(t) + b^2(t)]. \quad (\text{C.33})$$

Substituindo a primeira e segunda equações de (C.31) em (C.33), tem-se

$$g_{s2} \left\{ [a_1(t) + a_2(t)]^2 - 2[a_1(t) + a_2(t)][b_1(t) + b_2(t)] + [b_1(t) + b_2(t)]^2 \right\}. \quad (\text{C.34})$$

Efetuando-se as multiplicações e desenvolvendo os quadrados perfeitos em (C.34) e em seguida separando os termos de terceira ordem resultantes, obtém-se

$$2g_{s2}a_1(t)a_2(t) - 2g_{s2}a_1(t)b_2(t) - 2g_{s2}a_2(t)b_1(t) + 2g_{s2}b_1(t)b_2(t) \quad (\text{C.35})$$

Com referência ao primeiro termo de (C.35), substituindo em $a_1(t)a_2(t)$ a primeira equação de (C.29) para $i = 1$ e $i = 2$, obtém-se

$$\begin{aligned}
& 2g_{s2}a_1(t)a_2(t) = \\
& 2g_{s2} \left\{ \sum_{q_1=1}^3 A_1(f_{q_1}) \exp[j2\pi f_{q_1} t] \right\} \left\{ \sum_{q_1=1}^3 \sum_{q_2=1}^3 A_2(f_{q_1}, f_{q_2}) \exp[j2\pi(f_{q_1} + f_{q_2})t] \right\} \\
& = 2g_{s2} \left\{ \sum_{q_1=1}^3 \sum_{q_2=1}^3 \sum_{q_3=1}^3 A_1(f_{q_1}) A_2(f_{q_2}, f_{q_3}) \exp[j2\pi(f_{q_1} + f_{q_2} + f_{q_3})t] \right\} \\
& = 2g_{s2} \sum_{q_1=1}^3 \sum_{q_2=1}^3 \sum_{q_3=1}^3 A_1(f_{q_1}) A_2(f_{q_2}, f_{q_3}) \exp[j2\pi(f_{q_1} + f_{q_2} + f_{q_3})t].
\end{aligned} \tag{C.36}$$

Expandindo o somatório triplo em (C.36), agrupando os termos resultantes que possuem $\exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]$ e colocando o resultado em notação de barra resulta em

$$2g_{s2} \overline{A_1(f_1)A_2(f_2, f_3)} \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]. \tag{C.37}$$

Aplicando-se aos termos $-2g_{s2}a_1(t)b_2(t)$, $-2g_{s2}a_2(t)b_1(t)$, $2g_{s2}b_1(t)b_2(t)$ de (C.35), o mesmo procedimento realizado para o termo $2g_{s2}a_1(t)a_2(t)$ resulta, respectivamente, em

$$\begin{aligned}
& -2g_{s2} \overline{A_1(f_1)B_2(f_2, f_3)} \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t], \\
& -2g_{s2} \overline{B_1(f_1)A_2(f_2, f_3)} \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t], \\
& 2g_{s2} \overline{B_1(f_1)B_2(f_2, f_3)} \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t].
\end{aligned} \tag{C.38}$$

Somando (C.37) junto com as três equações em (C.38), obtém-se o conjunto dos termos que contém $\exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]$, resultantes da não-linearidade de terceira ordem da fonte de corrente controlada por tensão para $k = 2$. O resultado dessa soma é dada por

$$\begin{aligned}
& 2g_{s2} \left\{ \overline{A_1(f_1)A_2(f_2, f_3)} - \overline{A_1(f_1)B_2(f_2, f_3)} \right. \\
& \left. - \overline{B_1(f_1)A_2(f_2, f_3)} + \overline{B_1(f_1)B_2(f_2, f_3)} \right\} \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t].
\end{aligned} \tag{C.39}$$

Dando atenção a expressão resultante do somatório em (C.32) quando $k = 3$, obtém-se

$$g_{s3}[a(t) - b(t)]^3 = g_{s3}[a^3(t) - 3a^2(t)b(t) + 3a(t)b^2(t) - b^3(t)]. \quad (\text{C.40})$$

Substituindo a primeira e segunda equações de (C.31) em (C.40), resulta em

$$g_{s3} \left\{ [a_1(t) + a_2(t)]^3 - 3[a_1(t) + a_2(t)]^2[b_1(t) + b_2(t)] \right. \\ \left. + 3[a_1(t) + a_2(t)][b_1(t) + b_2(t)]^2 - [b_1(t) + b_2(t)]^3 \right\}. \quad (\text{C.41})$$

Efetuando as operações algébricas em (C.41) e em seguida selecionando os termos de terceira ordem resultantes, tem-se

$$g_{s3} \left\{ a_1^3(t) - 3a_1^2(t)b_1(t) + 3a_1(t)b_1^2(t) - b_1^3(t) \right\}. \quad (\text{C.42})$$

Com referência ao primeiro termo de (C.42). Substituindo em $a_1^3(t)$ a primeira equação de (C.29) para $i = 1$, resulta em

$$g_{s3}a_1^3(t) = g_{s3} \left\{ \sum_{q_1=1}^3 A_1(f_{q_1}) \exp[j2\pi f_{q_1} t] \right\}^3 \\ = g_{s3} \left\{ \sum_{q_1=1}^3 A_1(f_{q_1}) \exp[j2\pi f_{q_1} t] \right\} \left\{ \sum_{q_2=1}^3 A_1(f_{q_2}) \exp[j2\pi f_{q_2} t] \right\} \\ \cdot \left\{ \sum_{q_3=1}^3 A_1(f_{q_3}) \exp[j2\pi f_{q_3} t] \right\} \\ g_{s3} \sum_{q_1=1}^3 \sum_{q_2=1}^3 \sum_{q_3=1}^3 A_1(f_{q_1})A_1(f_{q_2})A_1(f_{q_3}) \exp[j2\pi(f_{q_1} + f_{q_2} + f_{q_3})t] \quad (\text{C.43})$$

Expandindo o somatório triplo em (C.43), agrupando os termos resultantes que possuem $\exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]$ e colocando o resultado em notação de barra, obtém-se

$$\overline{g_{s3}A_1(f_1)A_1(f_2)A_1(f_3)} \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]. \quad (\text{C.44})$$

Aplicando-se aos termos $-3g_{s3}a_1^2(t)b_1(t)$, $3g_{s3}a_1(t)b_1^2(t)$ e $-g_{s3}b_1(t)^3$ de (C.42) o

mesmo procedimento realizado para o termo $g_{s3}a_1^3$ resulta, respectivamente, em

$$\begin{aligned} & -3g_{s3}\overline{B_1(f_1)A_1(f_2)A_1(f_3)} \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t], \\ & 3g_{s3}\overline{A_1(f_1)B_1(f_2)B_1(f_3)} \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t], \\ & -g_{s3}\overline{B_1(f_1)B_1(f_2)B_1(f_3)} \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]. \end{aligned} \quad (C.45)$$

Somando (C.44) junto com as três equações em (C.45), obtém-se o conjunto dos termos que contém $\exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]$. O resultado dessa soma é expressa como

$$\begin{aligned} g_{s3} \left\{ \overline{A_1(f_1)A_1(f_2)A_1(f_3)} - \overline{3B_1(f_1)A_1(f_2)A_1(f_3)} \right. \\ \left. + \overline{3A_1(f_1)B_1(f_2)B_1(f_3)} - \overline{B_1(f_1)B_1(f_2)B_1(f_3)} \right\} \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]. \end{aligned} \quad (C.46)$$

Finalmente, somando (C.39) e (C.46) obtém-se o conjunto de todos os termos que contém $\exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]$, resultantes da não-linearidade de terceira ordem da fonte de corrente controlada por tensão. O resultado dessa soma é denominada de ζ_S e é dada por

$$\begin{aligned} \zeta_S = & \left\{ 2g_{s2} \left[\overline{A_1(f_1)A_2(f_2, f_3)} - \overline{A_1(f_1)B_2(f_2, f_3)} - \overline{B_1(f_1)A_2(f_2, f_3)} \right. \right. \\ & \left. \left. + \overline{B_1(f_1)B_2(f_2, f_3)} \right] + g_{s3} \left[\overline{A_1(f_1)A_1(f_2)A_1(f_3)} - \overline{3B_1(f_1)A_1(f_2)A_1(f_3)} \right. \right. \\ & \left. \left. + \overline{3A_1(f_1)B_1(f_2)B_1(f_3)} - \overline{B_1(f_1)B_1(f_2)B_1(f_3)} \right] \right\} \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]. \end{aligned} \quad (C.47)$$

Desenvolvimento da Não-Linearidade de Terceira Ordem da Condutância de Dreno

O termo que expressa a não-linearidade da condutância de dreno em (C.30) é do tipo

$$\sum_{k=2}^3 g_{dk} [d(t) - c(t)]^k = g_{d2} [d(t) - c(t)]^2 + g_{d3} [d(t) - c(t)]^3 \quad (C.48)$$

Com o objetivo de verificar o comportamento não-linear da condutância de dreno,

definida em (C.48), realizou-se os mesmos passos efetuados anteriormente de (C.33) até (C.47). Neste caso, obteve-se o conjunto de todos os termos resultantes da não-linearidade de terceira ordem da condutância de dreno, que estão na frequência $f_1 + f_2 + f_3$. Denominou-se o conjunto desses termos de ζ_R , o qual é expresso por

$$\begin{aligned} \zeta_R = & \left\{ 2g_{d2} \left[\overline{D_1(f_1)D_2(f_2, f_3)} - \overline{D_1(f_1)C_2(f_2, f_3)} - \overline{C_1(f_1)D_2(f_2, f_3)} \right. \right. \\ & \left. \left. + \overline{C_1(f_1)C_2(f_2, f_3)} \right] + g_{d3} \left[\overline{D_1(f_1)D_1(f_2)D_1(f_3)} - 3\overline{C_1(f_1)D_1(f_2)D_1(f_3)} \right. \right. \\ & \left. \left. + 3\overline{D_1(f_1)C_1(f_2)C_1(f_3)} - \overline{C_1(f_1)C_1(f_2)C_1(f_3)} \right] \right\} \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]. \end{aligned} \quad (C.49)$$

Desenvolvimento das Tensões de Terceira Ordem do Vetor $e(t)$

Usando (C.29), as tensões de terceira ordem referente aos nós **a**, **b**, **c** e **d** são definidas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} a_3(t) &= \sum_{q_1=1}^3 \sum_{q_2=1}^3 \sum_{q_3=1}^3 A_3(f_{q_1}, f_{q_2}, f_{q_3}) \exp[j2\pi(f_{q_1} + f_{q_2} + f_{q_3})t] \\ b_3(t) &= \sum_{q_1=1}^3 \sum_{q_2=1}^3 \sum_{q_3=1}^3 B_3(f_{q_1}, f_{q_2}, f_{q_3}) \exp[j2\pi(f_{q_1} + f_{q_2} + f_{q_3})t] \\ c_3(t) &= \sum_{q_1=1}^3 \sum_{q_2=1}^3 \sum_{q_3=1}^3 C_3(f_{q_1}, f_{q_2}, f_{q_3}) \exp[j2\pi(f_{q_1} + f_{q_2} + f_{q_3})t]. \\ d_3(t) &= \sum_{q_1=1}^3 \sum_{q_2=1}^3 \sum_{q_3=1}^3 D_3(f_{q_1}, f_{q_2}, f_{q_3}) \exp[j2\pi(f_{q_1} + f_{q_2} + f_{q_3})t]. \end{aligned} \quad (C.50)$$

Expandindo os somatórios referentes as quatro expressões em (C.50), evidenciando somente os coeficientes de $\exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]$ gerados nas expansões e levando-se em consideração a simetria das funções de transferência não-lineares, obtém-se

$$\begin{aligned} a_3(t) &= 6A_3(f_1, f_2, f_3) \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t] + \dots \\ b_3(t) &= 6B_3(f_1, f_2, f_3) \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t] + \dots \\ c_3(t) &= 6C_3(f_1, f_2, f_3) \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t] + \dots \\ d_3(t) &= 6D_3(f_1, f_2, f_3) \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t] + \dots \end{aligned} \quad (C.51)$$

Substituindo (C.51) em (C.30) e resolvendo as operações impostas pelo operador diferencial da matriz $[Y(p)]$, resulta em

$$\begin{aligned}
 & \left[Y[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)] \right] \begin{bmatrix} 6A_3(f_1, f_2, f_3) \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t] + \dots \\ 6B_3(f_1, f_2, f_3) \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t] + \dots \\ 6C_3(f_1, f_2, f_3) \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t] + \dots \\ 6D_3(f_1, f_2, f_3) \exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t] + \dots \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} L_{1T} + \dots \\ L_{2T} + \dots \\ L_{3T} + \dots \\ L_{4T} + \dots \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{C.52}$$

onde

$$\begin{aligned}
 L_{1T} &= 0; \\
 L_{2T} &= 0; \\
 L_{3T} &= -(\zeta_S + \zeta_R); \\
 L_{4T} &= \zeta_S + \zeta_R.
 \end{aligned} \tag{C.53}$$

Finalmente, igualando os coeficientes de $\exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]$ em ambos os lados da igualdade em (C.52) e invertendo a matriz admitância desta equação, as funções de transferência não-lineares de terceira ordem são definidas por

$$\begin{bmatrix} A_3(f_1, f_2, f_3) \\ B_3(f_1, f_2, f_3) \\ C_3(f_1, f_2, f_3) \\ D_3(f_1, f_2, f_3) \end{bmatrix} = \left[Y[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)] \right]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{6}\xi_{1T} \\ \frac{1}{6}\xi_{2T} \\ \frac{1}{6}\xi_{3T} \\ \frac{1}{6}\xi_{4T} \end{bmatrix}. \tag{C.54}$$

Onde, ξ_{1T} , ξ_{2T} , ξ_{3T} e ξ_{4T} são os coeficientes de $\exp[j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t]$. Portanto,

de acordo com (C.47), (C.49) e (C.53), segue-se que os coeficientes ξ_{1T} , ξ_{2T} , ξ_{3T} e ξ_{4T} são dados por

$$\begin{aligned}
\xi_{1T} &= 0; \\
\xi_{2T} &= 0; \\
\xi_{3T} &= -2g_{s2} \left[\overline{A_1(f_1)A_2(f_2, f_3)} - \overline{A_1(f_1)B_2(f_2, f_3)} - \overline{B_1(f_1)A_2(f_2, f_3)} \right. \\
&\quad \left. + \overline{B_1(f_1)B_2(f_2, f_3)} \right] - g_{s3} \left[\overline{A_1(f_1)A_1(f_2)A_1(f_3)} - 3\overline{B_1(f_1)A_1(f_2)A_1(f_3)} \right. \\
&\quad \left. + 3\overline{A_1(f_1)B_1(f_2)B_1(f_3)} - \overline{B_1(f_1)B_1(f_2)B_1(f_3)} \right] \\
&\quad - 2g_{d2} \left[\overline{D_1(f_1)D_2(f_2, f_3)} - \overline{D_1(f_1)C_2(f_2, f_3)} - \overline{C_1(f_1)D_2(f_2, f_3)} \right. \\
&\quad \left. + \overline{C_1(f_1)C_2(f_2, f_3)} \right] - g_{d3} \left[\overline{D_1(f_1)D_1(f_2)D_1(f_3)} - 3\overline{C_1(f_1)D_1(f_2)D_1(f_3)} \right. \\
&\quad \left. + 3\overline{D_1(f_1)C_1(f_2)C_1(f_3)} - \overline{C_1(f_1)C_1(f_2)C_1(f_3)} \right]; \\
\xi_{4T} &= 2g_{s2} \left[\overline{A_1(f_1)A_2(f_2, f_3)} - \overline{A_1(f_1)B_2(f_2, f_3)} - \overline{B_1(f_1)A_2(f_2, f_3)} \right. \\
&\quad \left. + \overline{B_1(f_1)B_2(f_2, f_3)} \right] + g_{s3} \left[\overline{A_1(f_1)A_1(f_2)A_1(f_3)} - 3\overline{B_1(f_1)A_1(f_2)A_1(f_3)} \right. \\
&\quad \left. + 3\overline{A_1(f_1)B_1(f_2)B_1(f_3)} - \overline{B_1(f_1)B_1(f_2)B_1(f_3)} \right] \\
&\quad + 2g_{d2} \left[\overline{D_1(f_1)D_2(f_2, f_3)} - \overline{D_1(f_1)C_2(f_2, f_3)} - \overline{C_1(f_1)D_2(f_2, f_3)} \right. \\
&\quad \left. + \overline{C_1(f_1)C_2(f_2, f_3)} \right] + g_{d3} \left[\overline{D_1(f_1)D_1(f_2)D_1(f_3)} - 3\overline{C_1(f_1)D_1(f_2)D_1(f_3)} \right. \\
&\quad \left. + 3\overline{D_1(f_1)C_1(f_2)C_1(f_3)} - \overline{C_1(f_1)C_1(f_2)C_1(f_3)} \right]. \tag{C.55}
\end{aligned}$$

Anexo D

Programa para Cálculo dos Efeitos de distorções do Amplificador de RF

A avaliação dos produtos de intermodulação e do ganho de compressão no Amplificador de RF, apresentada no Capítulo 5 deste trabalho, foi realizada com o auxílio de um programa implementado em MATLAB [16], que efetua o cálculo das funções de transferência não-lineares de Volterra. Para avaliar a resposta em frequência do sistema foi implementado um conjunto de programas que calcula as funções de transferência de Volterra, considerando uma varredura de frequências de 1 MHz a 100MHz.

D.1 Programa para Cálculo das Funções de Transferência Não-Lineares de Volterra

```
%Distorção de Intermodulação de segunda e terceira ordens para dois  
%tons de excitação nas frequencias -2.5[MHz] e 3[MHz].  
  
%entrada de dados: Frequencia dos tons de entrada, parametros de  
%polarização do amplificador de RF e parametros não-lineares  
%caracteristicos do transistor 2N2950.
```



```

close all; f1= -2.5e6; f2= 3e6; f3= 3e6; CT=25e-3; n=1.03;
IC=10e-3; ICmax=150e-3; a=0.125; hFEmax=8.2; etha=4.6; VCB=9.27;
VCB0=140; mhi=0.348; phi=0.4; k=25e-12; cj=330e-12; cd=60e-9;
rb=10.1; rc=635e3; c3=1.5e-12; R1=50; c1p=6600e-12; R2=20.2e3;
c2p=4e-12; R3=1.98e3; c3p=8100e-12; R4=50;

%implementação das equações resultantes da modelagem do amplificador
%emissor comum.

%Cálculo da corrente de polarização de emissor.
hFE= hFEmax/(1 + a*((log10(IC/ICmax))^2)); alphaN= hFE/(1 + hFE);
IE= IC/alphaN; %Valor em modulo de IE.

%coeficientes da nao-linearidade resistiva da junção base-emissor.
re= (n/IE)*(CT);
k1= 1/re; k2= (1/2)*(1/re^2)*(1/IE);
k3=(1/6)*(1/re^3)*(1/IE^2);

%coeficientes da nao-linearidade de avalanche e hFE.
Fn1= (1/hFEmax)*(1 + hFEmax + a*((log10(IC/ICmax))^2) ...
      + (2*a*log10(IC/ICmax))...
      *log10(2.71828182));
Fn2= ( (a*log10(2.71828182))/(hFEmax*IC) )*( log10(IC/ICmax) ...
      + log10(2.71828182) );
Fn3= -((a*log10(2.71828182))/(3*hFEmax*(IC^2)))*(log10(IC/ICmax));
alpha1= 1/Fn1;
alpha2= -Fn2/((Fn1)^3);
alpha3=((2*(Fn2)^2)/((Fn1)^5) - (Fn3/((Fn1)^4)));
mo=(1-(VCB/VCB0)^etha )^-(1);
m1=(etha/(VCB0^etha))*(mo^2)*(VCB^(etha-1));
m2=((m1^2)/mo)+(etha-1)*m1/2*VCB;
m3= (2/3)*m2*( (2*m1/mo)..
      +(etha - 1)/2*VCB ) - (m1/3)*( (m1/mo)^2 + (etha - 1)/2*VCB^2 );

```

```

fo= IC*( (1 + hFEmax + a*(log10(IC/ICmax))^2)/(hFEmax ) );
IJ=fo/mo;
gx= alpha1*mo*k1;
gy= alpha1*IJ*m1;
gxx = alpha1*mo*k2+alpha2*(mo^2)*(k1^2);
gyy= alpha1*IJ*m2 + alpha2*(IJ^2)*(m1^2);
gxy= alpha1*m1*k1 + 2*alpha2*IJ*mo*m1*k1;
gxxx= alpha1*mo*k3 + 2*alpha2*(mo^2)*k1*k2 + alpha3*(mo^3)*(k1^3);
gyyy= alpha1*IJ*m3 +2*alpha2*(IJ^2)*m1*m2 + alpha3*(IJ^3)*(m1^3);
gxyy= alpha1*m2*k1 + 2*alpha2*IJ*mo*m2*k1 + 2*alpha2*IJ*(m1^2)*k1;
gxyy= alpha1*m1*k2 + 2*alpha2*IJ*mo*m1*k2 + 2*alpha2*mo*m1*(k1^2);

%coeficientes da nao-linearidade da capacitancia de coletor.
c1= k*((phi + VCB)^-mhi);
gama2c= (1/2)*((mhi)/(phi + VCB))*c1;
gama3c= (1/3)*((mhi+1)/(phi + VCB))*gama2c;

%coeficientes da nao-linearidade da capacitancia da junção base-emissor.
c2= cj + cd*IE;
gama2e= (1/2)*cd*k1;
gama3e= (1/3)*cd*k2;

%Funções de transferencia de primeira ordem do circuito em f1.
p= j*2*pi*f1;
Zs= (R2 + p*c1p*R1*R2)/(p*c1p*(R1+R2) + 1); %impedancia de entrada.
ZL= (p*c3p*R4*R3 + R3)/(p*c3p*R4 + 1 + p*c3p*R3...
    + (p^2)*c3p*c2p*R4*R3 + p*c2p*R3);
y= [(1/Zs + 1/rb + p*c3) (-1/rb) (-p*c3);(gy - 1/rb)...
    (1/rb + k1 + 1/rc - gx + p*(c1 + c2)) (-1/rc - p*c1 - gy);...
    (-gy - p*c3) (-p*c1 - 1/rc + gx) (1/ZL + 1/rc + gy + p*(c1+c3))];
FT1a = (inv(y))*[( p*c1p*R2/(p*c1p*(R1+R2)+1) )*(1/Zs);0;0];
A1f1=FT1a(1,1);
B1f1=FT1a(2,1);

```

```

C1f1=FT1a(3,1);
Modulo_C1f1= abs(C1f1);
Fase_C1f1= (180*angle(C1f1))/pi;

%Funções de transferencia de primeira ordem do circuito em f2.
p= j*2*pi*f2;
Zs= (R2 + p*c1p*R1*R2)/(p*c1p*(R1+R2) + 1);
ZL= (p*c3p*R4*R3 + R3)/(p*c3p*R4 + 1 + p*c3p*R3 ...
    + (p^2)*c3p*c2p*R4*R3 + p*c2p*R3);
y= [(1/Zs + 1/rb + p*c3) (-1/rb) (-p*c3);(gy - 1/rb)...
    (1/rb + k1 + 1/rc - gx + p*(c1 + c2))...
    (-1/rc - p*c1 - gy); (-gy - p*c3) (-p*c1 - 1/rc + gx)...
    (1/ZL + 1/rc + gy + p*(c1+c3))];
FT1b= (inv(y))*[( p*c1p*R2/(p*c1p*(R1+R2)+1) )*(1/Zs);0;0];
A1f2=FT1b(1,1);
B1f2=FT1b(2,1);
C1f2=FT1b(3,1);
Modulo_C1f2=abs(C1f2);
Fase= (180*angle(C1f2))/pi;

%Funções de transferencia de primeira ordem do circuito em f3.
p= j*2*pi*f3;
Zs= (R2 + p*c1p*R1*R2)/(p*c1p*(R1+R2) + 1);
ZL=(p*c3p*R4*R3 + R3)/(p*c3p*R4 + 1 + p*c3p*R3 +...
    (p^2)*c3p*c2p*R4*R3 + p*c2p*R3);
y= [(1/Zs + 1/rb + p*c3) (-1/rb) (-p*c3);(gy - 1/rb)...
    (1/rb + k1 + 1/rc - gx + p*(c1 + c2)) (-1/rc - p*c1 - gy);...
    (-gy - p*c3) (-p*c1 - 1/rc + gx) (1/ZL + 1/rc + gy + p*(c1+c3))];
FT1c = (inv(y))*[( p*c1p*R2/(p*c1p*(R1+R2)+1) )*(1/Zs);0;0];
A1f3=FT1c(1,1);
B1f3=FT1c(2,1);
C1f3=FT1c(3,1);

```

```

%coeficientes do vetor nao-linear j(t) nas frequencias f1 e f2.
C21= 0;

C22= -2*k2*B1f1*B1f2 - gama2e*j*4*pi*(f1+f2)*B1f1*B1f2 ...
      + gama2c*j*4*pi*(f1+f2)*( C1f1*C1f2 - (C1f1*B1f2 + C1f2*B1f1)...
      + B1f1*B1f2) + 2*gxx*B1f1*B1f2 + 2*gyy*( C1f1*C1f2 -...
      (A1f1*C1f2 + A1f2*C1f1) + A1f1*A1f2) + gxy*( B1f1*C1f2 ...
      + B1f2*C1f1 - ( A1f1*B1f2 + A1f2*B1f1) );

C23= - gama2c*j*4*pi*(f1+f2)*( C1f1*C1f2...
      - (C1f1*B1f2 +C1f2*B1f1)...
      + B1f1*B1f2) - 2*gxx*B1f1*B1f2 - 2*gyy*( C1f1*C1f2 - (A1f1*C1f2...
      + A1f2*C1f1) + A1f1*A1f2) - gxy*( B1f1*C1f2 + B1f2*C1f1...
      - (A1f1*B1f2 + A1f2*B1f1) );

% Funções de transferencia nao-lineares de 2a ordem na
%frequencia f1 e f2.
p= j*2*pi*(f1+f2);
Zs= (R2 + p*c1p*R1*R2)/(p*c1p*(R1+R2) + 1);
ZL=(p*c3p*R4*R3 + R3)/(p*c3p*R4 + 1 + p*c3p*R3 +...
    (p^2)*c3p*c2p*R4*R3 + p*c2p*R3);
y= [(1/Zs + 1/rb + p*c3) (-1/rb) (-p*c3);(gy - 1/rb)...
    (1/rb + k1 + 1/rc - gx + p*(c1 + c2)) (-1/rc - p*c1 - gy);...
    (-gy - p*c3)(-p*c1 - 1/rc + gx)...
    (1/ZL + 1/rc + gy + p*(c1+c3))];

FTN2a= (inv(y))*(1/2)*[C21;C22;C23];

A2f1f2=FTN2a(1,1);
B2f1f2=FTN2a(2,1);
C2f1f2=FTN2a(3,1);

```

```

Modulo_C2f1f2= abs(FTN2a(3,1));
Fase_C2f1f2=(180*angle(FTN2a(3,1)))/pi;

%coeficientes do vetor nao-linear j(t) nas frequencias f1 e f3.
C21= 0;

C22= -2*k2*B1f1*B1f3 - gama2e*j*4*pi*(f1+f3)*B1f1*B1f3 ...
      + gama2c*j*4*pi*(f1+f3) *( C1f1*C1f3 - (C1f1*B1f3 + C1f3*B1f1)...
      + B1f1*B1f3)+ 2*gxx*B1f1*B1f3 + 2*gyy*( C1f1*C1f3 -...
      (A1f1*C1f3 + A1f3*C1f1) + A1f1*A1f3) + gxy*( B1f1*C1f3...
      + B1f3*C1f1 - ( A1f1*B1f3 + A1f3*B1f1) );

C23= - gama2c*j*4*pi*(f1+f3)*( C1f1*C1f3...
      - (C1f1*B1f3 + C1f3*B1f1) + B1f1*B1f3)...
      - 2*gxx*B1f1*B1f3 - 2*gyy*( C1f1*C1f3 - (A1f1*C1f3...
      + A1f3*C1f1) + A1f1*A1f3) - gxy*( B1f1*C1f3...
      + B1f3*C1f1 - (A1f1*B1f3 + A1f3*B1f1) );

% Funções de transferencia nao-lineares de 2a ordem na
%frequencia f1 e f3.
p= j*2*pi*(f1+f3);
Zs= (R2 + p*c1p*R1*R2)/(p*c1p*(R1+R2) + 1);
ZL=(p*c3p*R4*R3 + R3)/(p*c3p*R4 + 1 + p*c3p*R3...
    + (p^2)*c3p*c2p*R4*R3 + p*c2p*R3);
y= [(1/Zs + 1/rb + p*c3) (-1/rb) (-p*c3); (gy - 1/rb)...
    (1/rb + k1 + 1/rc - gx + p*(c1 + c2))...
    (-1/rc - p*c1 - gy); (-gy - p*c3) (-p*c1 - 1/rc + gx)...
    (1/ZL + 1/rc + gy + p*(c1+c3))];

FTN2b= (inv(y))*(1/2)*[C21;C22;C23];

A2f1f3=FTN2b(1,1);

```

B2f1f3=FTN2b(2,1);

C2f1f3=FTN2b(3,1);

Modulob=abs(FTN2b(3,1));

Faseb= (180*angle(FTN2b(3,1)))/pi;

%coeficientes do vetor nao-linear j(t) nas frequencias f2 e f3.

C21= 0;

C22= -2*k2*B1f2*B1f3 - gama2e*j*4*pi*(f2+f3)*B1f2*B1f3 ...
 + gama2c*j*4*pi*(f2+f3)*(C1f2*C1f3 - (C1f2*B1f3...
 + C1f3*B1f2) + B1f2*B1f3) + 2*gxx*B1f2*B1f3+ 2*gyy...
 *(C1f2*C1f3 - (A1f2*C1f3 + A1f3*C1f2) + A1f2*A1f3)...
 + gxy*(B1f2*C1f3 + B1f3*C1f2 - (A1f2*B1f3 + A1f3*B1f2));

C23= - gama2c*j*4*pi*(f2+f3)*(C1f2*C1f3 - (C1f2*B1f3 ...
 + C1f3*B1f2) + B1f2*B1f3) - 2*gxx*B1f2*B1f3 - 2*gyy...
 *(C1f2*C1f3 - (A1f2*C1f3 + A1f3*C1f2) + A1f2*A1f3)...
 - gxy*(B1f2*C1f3 + B1f3*C1f2 - (A1f2*B1f3 + A1f3*B1f2));

% Funções de transferencia nao-lineares de 2a ordem na

%frequencia f2 e f3.

p= j*2*pi*(f2+f3);

Zs= (R2 + p*c1p*R1*R2)/(p*c1p*(R1+R2) + 1);

ZL= (p*c3p*R4*R3 + R3)/(p*c3p*R4 + 1 + p*c3p*R3 + ...
 (p^2)*c3p*c2p*R4*R3 + p*c2p*R3);

y= [(1/Zs + 1/rb + p*c3) (-1/rb) (-p*c3);(gy - 1/rb)...
 (1/rb + k1 + 1/rc - gx + p*(c1 + c2)) (-1/rc - p*c1 - gy);...
 (-gy - p*c3) (-p*c1 - 1/rc + gx) (1/ZL + 1/rc...
 + gy + p*(c1+c3))];

FTN2c= (inv(y))*(1/2)*[C21;C22;C23];

```

A2f2f3=FTN2c(1,1);
B2f2f3=FTN2c(2,1);
C2f2f3=FTN2c(3,1);

Moduloc=abs(FTN2c(3,1)); Fasec= (180*angle(FTN2c(3,1)))/pi;

%equação que descreve os coeficientes resultantes da nao-linearidade
%resistiva.
Res = 4*k2*(B1f1*B2f2f3 + B1f2*B2f1f3 + B1f3*B2f1f2)...
      + 6*k3*(B1f1*B1f2*B1f3);

%equação que descreve os coeficientes resultantes da nao-linearidade
% da capacitancia de coletor.
Ck1= 8*gama2c*j*pi*(f1+f2+f3)*( ( C1f1*C2f2f3 + C1f2*C2f1f3...
      + C1f3*C2f1f2 ) - (C1f1*B2f2f3 + C1f2*B2f1f3 + C1f3*B2f1f2)...
      - (B1f1*C2f2f3 + B1f2*C2f1f3 + B1f3*C2f1f2)...
      + (B1f1*B2f2f3 + B1f2*B2f1f3 + B1f3*B2f1f2) );

Ck2= 12*gama3c*j*pi*(f1+f2+f3)*( C1f1*C1f2*C1f3 -
      (B1f1*C1f2*C1f3 + B1f2*C1f1*C1f3 + B1f3*C1f1*C1f2)...
      + (C1f1*B1f2*B1f3 + C1f2*B1f1*B1f3 + C1f3*B1f1*B1f2)...
      - B1f1*B1f2*B1f3 );

Ckc= Ck1 + Ck2;

%equação que descreve os coeficientes resultantes da nao-linearidade
%de avalanche e de hFE.
S1= 4*gxx*(B1f1*B2f2f3 + B1f2*B2f1f3 + B1f3*B2f1f2)...
      + 4*gyy*( (C1f1*C2f2f3 + C1f2*C2f1f3 + C1f3*C2f1f2)...
      - (C1f1*A2f2f3 + C1f2*A2f1f3 + C1f3*A2f1f2)...
      - (A1f1*C2f2f3 + A1f2*C2f1f3 + A1f3*C2f1f2)...
      + (A1f1*A2f2f3 + A1f2*A2f1f3 + A1f3*A2f1f2) ) ...
      + 2*gxy*( (B1f1*C2f2f3 + B1f2*C2f1f3 + B1f3*C2f1f2)...

```

$$\begin{aligned}
 &+ (C1f1*B2f2f3 + C1f2*B2f1f3 + C1f3*B2f1f2) \dots \\
 &- (B1f1*A2f2f3 + B1f2*A2f1f3 + B1f3*A2f1f2)\dots \\
 &- (A1f1*B2f2f3 + A1f2*B2f1f3 + A1f3*B2f1f2));
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S2= &6*gxxx*(B1f1*B1f2*B1f3) + 6*gyyy*(C1f1*C1f2*C1f3\dots \\
 &- (A1f1*C1f2*C1f3 + A1f2*C1f1*C1f3 + A1f3*C1f1*C1f2)\dots \\
 &+ (C1f1*A1f2*A1f3 + C1f2*A1f1*A1f3 + C1f3*A1f1*A1f2)\dots \\
 &- A1f1*A1f2*A1f3) + 2*gxxxy*((C1f1*B1f2*B1f3 \dots \\
 &+ C1f2*B1f1*B1f3 + C1f3*B1f1*B1f2) - (A1f1*B1f2*B1f3\dots \\
 &+ A1f2*B1f1*B1f3 + A1f3*B1f1*B1f2)) + 2*gxxy*(\dots \\
 &(B1f1*C1f2*C1f3 + B1f2*C1f1*C1f3 + B1f3*C1f1*C1f2)\dots \\
 &- (B1f1*C1f2*A1f3 + B1f1*C1f3*A1f2 + B1f2*C1f1*A1f3\dots \\
 &+ B1f2*C1f3*A1f1 + B1f3*C1f1*A1f2 + B1f3*C1f2*A1f1)\dots \\
 &+ (B1f1*A1f2*A1f3 + B1f2*A1f1*A1f3 + B1f3*A1f1*A1f2));
 \end{aligned}$$

$$S = S1 + S2;$$

%equação que descreve os coeficientes resultantes da nao-linearidade
%da capacitancia de emissor.

$$\begin{aligned}
 Cke= &8*gama2e*j*pi*(f1+f2+f3)*(B1f1*B2f2f3 + B1f2*B2f1f3\dots \\
 &+ B1f3*B2f1f2) + 12*gama3e*j*pi*(f1+f2+f3)*(B1f1*B1f2*B1f3);
 \end{aligned}$$

%coeficientes do vetor j(t).

$$C31= 0;$$

$$C32= - Res - Cke + Ckc + S;$$

$$C33= - Ckc - S;$$

%funcoes de transferencia nao-lineares de terceira ordem (FTNL3).

$$p= j*2*pi*(f1+f2+f3);$$

$$Zs= (R2 + p*c1p*R1*R2)/(p*c1p*(R1+R2) + 1);$$

$$ZL= (p*c3p*R4*R3 + R3)/(p*c3p*R4 + 1 + p*c3p*R3\dots$$

$$+ (p^2)*c3p*c2p*R4*R3 + p*c2p*R3);$$

$$y= [(1/Zs + 1/rb + p*c3) (-1/rb) (-p*c3);(gy - 1/rb)\dots$$


```
(1/rb + k1 + 1/rc - gx + p*(c1 + c2)) (-1/rc - p*c1 - gy);...
(-gy - p*c3) (-p*c1 - 1/rc + gx) (1/ZL + 1/rc + gy + p*(c1+c3))];
```

```
FTNL3= (inv(y))*(1/6)*[C31;C32;C33];
```

```
Modulo_C3f1f2f3= abs(FTNL3(3,1));
```

```
Fase_C3f1f2f3= (180*angle(FTNL3(3,1)))/pi;
```

D.2 Programa para Cálculo da Resposta em Frequência do Sistema

Para investigar a resposta em frequência das funções de transferência não-lineares de Volterra foram implementados três programas em MATLAB [16], que determinam a resposta das funções de primeira, segunda e terceira ordens.

D.2.1 Programa para Cálculo da Resposta da Função de Transferência Linear

```
%Grafico da função de transferencia de primeira ordem.

%entrada de dados: Frequencia dos tons de entrada,
%parametros de polarização do circuito de amplificador EC
% e parametros não-lineares caracteristicos do transistor 2N2950.
clear all;
close all;
CT=25e-3; n=1.03; IC=10e-3; ICmax=150e-3; a=0.125; hFEmax=8.2;
etha=4.6; VCB=9.27; VCB0=140; mhi=0.348; phi=0.4; k=25e-12;
cj=330e-12; cd=60e-9; rb=10.1; rc=635e3; c3=1.5e-12; R1=50;
c1p=6600e-12; R2=20.2e3; c2p=4e-12; R3=1.98e3; c3p=8100e-12;
R4=50;

%implementação das equações resultantes da modelagem do
```

```

%amplificador emissor comum.

%Cálculo da corrente de polarização de emissor.
hFE= hFEmax/(1 + a*((log10(IC/ICmax))^2));
alphaN= hFE/(1 + hFE);
IE= IC/alphaN; %Valor em modulo de IE.

%coeficientes da nao-linearidade resistiva da junção
%base-emissor.
re= (n/IE)*(CT);
k1= 1/re;
k2= (1/2)*(1/re^2)*(1/IE);
k3= (1/6)*(1/re^3)*(1/IE^2);

%coeficientes da nao-linearidade de avalanche e hFE.
Fn1= (1/hFEmax)*(1 + hFEmax + a*((log10(IC/ICmax))^2)...
      + (2*a*log10(IC/ICmax))*log10(2.71828182));
Fn2= ( (a*log10(2.71828182))/(hFEmax*IC) )...
      *( log10(IC/ICmax) + log10(2.71828182) );
Fn3= - ((a*log10(2.71828182))/(3*hFEmax*(IC^2)))...
      *(log10(IC/ICmax));
alpha1= 1/Fn1;
alpha2= -Fn2/((Fn1)^3);
alpha3= ((2*(Fn2)^2)/((Fn1)^5)) - (Fn3/((Fn1)^4));
mo= ( 1 - (VCB/VCB0)^etha )^-(1);
m1= (etha/(VCB0^etha))*(mo^2)*(VCB^(etha-1));
m2= ((m1^2)/mo) + (etha - 1)*m1/2*VCB;
m3= (2/3)*m2*( (2*m1/mo) + (etha - 1)/2*VCB ) - (m1/3)...
      *( (m1/mo)^2 + (etha - 1)/2*VCB^2 );
fo= IC*( (1 + hFEmax + a*(log10(IC/ICmax))^2)/(hFEmax) );
IJ= fo/mo;
gx= alpha1*mo*k1;
gy= alpha1*IJ*m1;

```

```

gxx= alpha1*mo*k2 + alpha2*(mo^2)*(k1^2);
gyy= alpha1*IJ*m2 + alpha2*(IJ^2)*(m1^2);
gxy= alpha1*m1*k1 + 2*alpha2*IJ*mo*m1*k1;
gxxx= alpha1*mo*k3 + 2*alpha2*(mo^2)*k1*k2 + alpha3*(mo^3)*(k1^3);
gyyy= alpha1*IJ*m3 + 2*alpha2*(IJ^2)*m1*m2 + alpha3*(IJ^3)*(m1^3);
gxyy= alpha1*m2*k1 + 2*alpha2*IJ*mo*m2*k1 + 2*alpha2*IJ*(m1^2)*k1;
gxyx= alpha1*m1*k2 + 2*alpha2*IJ*mo*m1*k2 + 2*alpha2*mo*m1*(k1^2);

%coeficientes da nao-linearidade da capacitancia de coletor.
c1= k*((phi + VCB)^-mhi);
gama2c= (1/2)*((mhi)/(phi + VCB))*c1;
gama3c= (1/3)*((mhi+1)/(phi + VCB))*gama2c;

%coeficientes da nao-linearidade da capacitancia da junção base-emissor.
c2= cj + cd*IE;
gama2e= (1/2)*cd*k1;
gama3e= (1/3)*cd*k2;

%Funções de transferencia de primeira ordem do circuito em f1.
f1= [1e6:1e6:100e6];%f1= [0.001e6:0.1e6:100e6];%
for i=1:991
    p= j*2*pi*(f1(i));
    Zs= (R2 + p*c1p*R1*R2)/(p*c1p*(R1+R2) + 1);
    ZL= (p*c3p*R4*R3 + R3)/(p*c3p*R4 + 1 + p*c3p*R3...
        + (p^2)*c3p*c2p*R4*R3 + p*c2p*R3);
    y= [(1/Zs + 1/rb + p*c3) (-1/rb) (-p*c3);(gy - 1/rb)...
        (1/rb + k1 + 1/rc - gx + p*(c1 + c2)) (-1/rc - p*c1 - gy);...
        (-gy - p*c3)(-p*c1 - 1/rc + gx) (1/ZL + 1/rc + gy + p*(c1+c3))];
    FT(:,i)= (inv(y))*[( p*c1p*R2/(p*c1p*(R1+R2)+1) )*(1/Zs);0;0];
    C1f1(i)= 20*log10(abs(FT(3,i)));
end
figure;
Ha = subplot(1,1,1);

```

```

set(Ha,'FontSize',13,'LineWidth',1.5);
semilogx(f1,C1f1,'LineWidth',1.5)
grid on
hold on
x= [1e6 2e6 4e6 7e6 10e6 20e6 40e6 70e6 100e6];
y= [13.5 13.3 12.5 11.2 9.7 5.5 -0.5 -5 -8.5];
plot(x,y,'b^','LineWidth',1.5)
legend('Calculado','Medido',3);
xlabel('f [Hz]');
ylabel('|C_{1}|( f )| [dB]');

```

D.2.2 Programa para Cálculo da Resposta da Função de Transferência Não-Linear de Segunda Ordem

```

%Grafico da função de transferencia nao-linear de segunda ordem.

%entrada de dados: Frequencia dos tons de entrada,
%parametros de polarização do circuito de amplificador EC
% e parametros não-lineares caracteristicos do transistor 2N2950.
close all;
clear all;

CT=25e-3; n=1.03; IC=10e-3; ICmax=150e-3; a=0.125; hFEmax=8.2;
etha=4.6; VCB=9.27; VCB0=140; mhi=0.348; phi=0.4; k=25e-12;
cj=330e-12; cd=60e-9; rb=10.1; rc=635e3; c3=1.5e-12; R1=50;
c1p=6600e-12; R2=20.2e3; c2p=4e-12; R3=1.98e3; c3p=8100e-12;
R4=50;

%implementação das equações resultantes da modelagem do
%amplificador emissor comum.

%Cálculo da corrente de polarização de emissor.
hFE= hFEmax/(1 + a*((log10(IC/ICmax))^2));

```

```

alphaN= hFE/(1 + hFE);
IE= IC/alphaN;

%coeficientes da nao-linearidade resistiva da junção base-emissor.
re= (n/IE)*(CT);
k1= 1/re; k2= (1/2)*(1/re^2)*(1/IE);
k3= (1/6)*(1/re^3)*(1/IE^2);

%coeficientes da nao-linearidade de avalanche e hFE.
Fn1= (1/hFEmax)*(1 + hFEmax + a*((log10(IC/ICmax))^2)...
      + (2*a*log10(IC/ICmax))*log10(2.71828182));
Fn2= ( (a*log10(2.71828182))/(hFEmax*IC) )*( log10(IC/ICmax)...
      + log10(2.71828182) );
Fn3= - ((a*log10(2.71828182))/(3*hFEmax*(IC^2)))...
      *(log10(IC/ICmax));
alpha1= 1/Fn1;
alpha2= -Fn2/((Fn1)^3);
alpha3= ((2*(Fn2)^2)/((Fn1)^5)) - (Fn3/((Fn1)^4));
mo= ( 1 - (VCB/VCB0)^etha )^-(1);
m1= (etha/(VCB0^etha))*(mo^2)*(VCB^(etha-1));
m2= ((m1^2)/mo) + (etha - 1)*m1/2*VCB;
m3= (2/3)*m2*( (2*m1/mo) + (etha - 1)/2*VCB )...
      - (m1/3)*( (m1/mo)^2 + (etha - 1)/2*VCB^2 );
fo= IC*( (1 + hFEmax + a*(log10(IC/ICmax))^2)/(hFEmax) );
IJ= fo/mo;
gx= alpha1*mo*k1;
gy= alpha1*IJ*m1;
gxx= alpha1*mo*k2 + alpha2*(mo^2)*(k1^2);
gyy= alpha1*IJ*m2 + alpha2*(IJ^2)*(m1^2);
gxy= alpha1*m1*k1 + 2*alpha2*IJ*mo*m1*k1;
gxxx= alpha1*mo*k3 + 2*alpha2*(mo^2)*k1*k2 + alpha3*(mo^3)*(k1^3);
gyyy= alpha1*IJ*m3 + 2*alpha2*(IJ^2)*m1*m2 + alpha3*(IJ^3)*(m1^3);
gxyy= alpha1*m2*k1 + 2*alpha2*IJ*mo*m2*k1 + 2*alpha2*IJ*(m1^2)*k1;

```

```

gxy= alpha1*m1*k2 + 2*alpha2*IJ*mo*m1*k2 + 2*alpha2*mo*m1*(k1^2);

%coeficientes da nao-linearidade da capacitancia de coletor.
c1= k*((phi + VCB)^-mhi);
gama2c= (1/2)*((mhi)/(phi + VCB))*c1;
gama3c= (1/3)*((mhi+1)/(phi + VCB))*gama2c;

%coeficientes da nao-linearidade da capacitancia da junção base-emissor.
c2= cj + cd*IE;
gama2e= (1/2)*cd*k1;
gama3e= (1/3)*cd*k2;

f2= [1e6:0.01e6:100e6];
f1= f2 - 0.5e6;

for i=1:9901
    %Funções de transferencia de primeira ordem do circuito em f1.
    p= j*2*pi*f1(i);
    Zs= (R2 + p*c1p*R1*R2)/(p*c1p*(R1+R2) + 1);
    ZL= (p*c3p*R4*R3 + R3)/(p*c3p*R4 + 1 + p*c3p*R3 ...
        + (p^2)*c3p*c2p*R4*R3 + p*c2p*R3);
    y= [(1/Zs + 1/rb + p*c3) (-1/rb) (-p*c3);(gy - 1/rb)...
        (1/rb + k1 + 1/rc - gx + p*(c1 + c2)) (-1/rc - p*c1 - gy);...
        (-gy - p*c3)(-p*c1 - 1/rc + gx)(1/ZL + 1/rc + gy + p*(c1+c3))];
    FT1a= (inv(y))*[(1/Zs);0;0];
    A1f1=FT1a(1,1);
    B1f1=FT1a(2,1);
    C1f1=FT1a(3,1);

    %Funções de transferencia de primeira ordem do circuito em f2.
    p= j*2*pi*f2(i);
    Zs= (R2 + p*c1p*R1*R2)/(p*c1p*(R1+R2) + 1);
    ZL= (p*c3p*R4*R3 + R3)/(p*c3p*R4 + 1 + p*c3p*R3...

```

```

    + (p^2)*c3p*c2p*R4*R3 + p*c2p*R3);
y= [(1/Zs + 1/rb + p*c3) (-1/rb) (-p*c3);(gy - 1/rb)...
    (1/rb + k1 + 1/rc - gx + p*(c1 + c2)) (-1/rc - p*c1 - gy);...
    (-gy - p*c3)(-p*c1 - 1/rc + gx)(1/ZL + 1/rc + gy + p*(c1+c3))];
FT1b= (inv(y))*[(1/Zs);0;0];
A1f2=FT1b(1,1);
B1f2=FT1b(2,1);
C1f2=FT1b(3,1);

%coeficientes do vetor nao-linear j(t) nas frequencias f1 e f2.
C21= 0;

C22= -2*k2*B1f1*B1f2 - gama2e*j*4*pi*(f1(i)+f2(i))...
    *B1f1*B1f2 + gama2c*j*4*pi*(f1(i)+f2(i))...
    *( C1f1*C1f2 - (C1f1*B1f2 + C1f2*B1f1) + B1f1*B1f2)...
    + 2*gxx*B1f1*B1f2 + 2*gyy*( C1f1*C1f2 - (A1f1*C1f2...
    + A1f2*C1f1) + A1f1*A1f2) + gxy*( B1f1*C1f2 + ...
    B1f2*C1f1 - ( A1f1*B1f2 + A1f2*B1f1) );

C23= - gama2c*j*4*pi*(f1(i)+f2(i))*( C1f1*C1f2...
    - (C1f1*B1f2 + C1f2*B1f1) + B1f1*B1f2)...
    - 2*gxx*B1f1*B1f2 - 2*gyy*( C1f1*C1f2 ...
    - (A1f1*C1f2 + A1f2*C1f1) + A1f1*A1f2)...
    - gxy*( B1f1*C1f2 + B1f2*C1f1 - (A1f1*B1f2 + A1f2*B1f1) );

% Funcoes de transferencia nao-lineares de 2a ordem na
%frequencia f1 e f2.
p= j*2*pi*(f1(i)+f2(i));
Zs= (R2 + p*c1p*R1*R2)/(p*c1p*(R1+R2) + 1);
ZL= (p*c3p*R4*R3 + R3)/(p*c3p*R4 + 1 + p*c3p*R3 ...
    + (p^2)*c3p*c2p*R4*R3 + p*c2p*R3);
y= [(1/Zs + 1/rb + p*c3) (-1/rb) (-p*c3);(gy - 1/rb)...

```

```

(1/rb + k1 + 1/rc - gx + p*(c1 + c2)) (-1/rc - p*c1 - gy);...
(-gy - p*c3)(-p*c1 - 1/rc + gx)(1/ZL + 1/rc + gy + p*(c1+c3));

FT2(:,i)= (inv(y))*(1/2)*[C21;C22;C23];

C2f1f2(i)=FT2(3,i);
H2f1f2(i)= 20*log10(abs(C2f1f2(i)));

end

figure;
Ha = subplot(1,1,1);
set(Ha,'FontSize',13,'LineWidth',1.5);
semilogx(f2,H2f1f2,'LineWidth',1.5)
grid on
hold on
x= [3e6 5e6 7e6 10e6 20e6 30e6 50e6];
y= [15.7 14 12 8.8 -.6 -7.5 -16];
plot(x,y,'b^','LineWidth',1.5)
legend('Calculado','Medido',3);
xlabel('f_{2} [Hz]');
ylabel('|C_{2}(-f_1,f_2)| [dB]');

```

D.2.3 Programa para Cálculo da Resposta da Função de Transferência Não-Linear de Terceira Ordem

```

% Grafico da fuçao de transferencias nao-linear de terceira ordem

%entrada de dados: Frequencia dos tons de entrada,
%parametros de polarização do circuito de amplificador EC
% e parametros não-lineares caracteristicos do transistor 2N2950.
close all;
clear all;
f1= -30e6; f2= 51.4e6; f3= 51.4e6; CT=25e-3; n=1.03; IC=10e-3;

```



```

ICmax=150e-3; a=0.125; hFEmax=8.2; etha=4.6; VCB=9.27; VCB0=140;
mhi=0.348; phi=0.4; k=25e-12; cj=330e-12; cd=60e-9; rb=10.1;
rc=635e3; c3=1.5e-12; R1=50; c1p=6600e-12; R2=20.2e3; c2p=4e-12;
R3=1.98e3; c3p=8100e-12; R4=50;

%implementação das equações resultantes da modelagem do
%amplificador emissor comum.

%Cálculo da corrente de polarização de emissor.
hFE= hFEmax/(1 + a*((log10(IC/ICmax))^2));
alphaN= hFE/(1 + hFE);
IE= IC/alphaN; %Valor em modulo de IE.

%coeficientes da nao-linearidade resistiva da junção base-emissor.
re= (n/IE)*(CT);
k1= 1/re;
k2= (1/2)*(1/re^2)*(1/IE);
k3= (1/6)*(1/re^3)*(1/IE^2);

%coeficientes da nao-linearidade de avalanche e hFE.
Fn1= (1/hFEmax)*(1 + hFEmax + a*((log10(IC/ICmax))^2)...
      + (2*a*log10(IC/ICmax))*log10(2.71828182));
Fn2= ( (a*log10(2.71828182))/(hFEmax*IC) )*( log10(IC/ICmax)...
      + log10(2.71828182) );
Fn3= - ((a*log10(2.71828182))/(3*hFEmax*(IC^2)))...
      *(log10(IC/ICmax));
alpha1= 1/Fn1;
alpha2= -Fn2/((Fn1)^3);
alpha3= ((2*(Fn2)^2)/((Fn1)^5)) - (Fn3/((Fn1)^4));
mo= ( 1 - (VCB/VCB0)^etha )^-(1);
m1= (etha/(VCB0^etha))*(mo^2)*(VCB^(etha-1));
m2= ((m1^2)/mo) + (etha - 1)*m1/2*VCB;
m3= (2/3)*m2*( (2*m1/mo) + (etha - 1)/2*VCB )...

```

```

- (m1/3)*((m1/mo)^2 + (etha - 1)/2*VCB^2 );
fo= IC*( (1 + hFEmax + a*(log10(IC/ICmax))^2)/(hFEmax ) );
IJ= fo/mo;
gx= alpha1*mo*k1;
gy= alpha1*IJ*m1;
gxx= alpha1*mo*k2 + alpha2*(mo^2)*(k1^2);
gyy= alpha1*IJ*m2 + alpha2*(IJ^2)*(m1^2);
gxy= alpha1*m1*k1 + 2*alpha2*IJ*mo*m1*k1;
gxxx= alpha1*mo*k3 + 2*alpha2*(mo^2)*k1*k2 + alpha3*(mo^3)*(k1^3);
gyyy= alpha1*IJ*m3 + 2*alpha2*(IJ^2)*m1*m2 + alpha3*(IJ^3)*(m1^3);
gxyy= alpha1*m2*k1 + 2*alpha2*IJ*mo*m2*k1 + 2*alpha2*IJ*(m1^2)*k1;
gxyy= alpha1*m1*k2 + 2*alpha2*IJ*mo*m1*k2 + 2*alpha2*mo*m1*(k1^2);

%coeficientes da nao-linearidade da capacitancia de coletor.
c1= k*((phi + VCB)^-mhi);
gama2c= (1/2)*((mhi)/(phi + VCB))*c1;
gama3c= (1/3)*((mhi+1)/(phi + VCB))*gama2c;

%coeficientes da nao-linearidade da capacitancia da junçao base-emissor.
c2= cj + cd*IE;
gama2e= (1/2)*cd*k1;
gama3e= (1/3)*cd*k2;

f2= [1e6:0.1e6:100e6];
f3= f2;
f1= f2 - 0.5e6;

for i=1:991
    %Funções de transferencia de primeira ordem do circuito em f1.
    p= j*2*pi*f1(i);
    Zs= (R2 + p*c1p*R1*R2)/(p*c1p*(R1+R2) + 1);
    ZL= (p*c3p*R4*R3 + R3)/(p*c3p*R4 + 1 + p*c3p*R3...

```

```

    + (p^2)*c3p*c2p*R4*R3 + p*c2p*R3);
y= [(1/Zs + 1/rb + p*c3) (-1/rb) (-p*c3);(gy - 1/rb)...
    (1/rb + k1 + 1/rc - gx + p*(c1 + c2)) (-1/rc - p*c1 - gy);...
    (-gy - p*c3)(-p*c1 - 1/rc + gx)(1/ZL + 1/rc + gy + p*(c1+c3))];
FT1a= (inv(y))*[(1/Zs);0;0];
A1f1=FT1a(1,1);
B1f1=FT1a(2,1);
C1f1=FT1a(3,1);
Modulo_C1f1= abs(C1f1);
Fase_C1f1= (180*angle(C1f1))/pi;

```

%Funções de transferencia de primeira ordem do circuito em f2.

```

p= j*2*pi*f2(i);
Zs= (R2 + p*c1p*R1*R2)/(p*c1p*(R1+R2) + 1);
ZL= (p*c3p*R4*R3 + R3)/(p*c3p*R4 + 1 + p*c3p*R3 ...
    + (p^2)*c3p*c2p*R4*R3 + p*c2p*R3);
y= [(1/Zs + 1/rb + p*c3) (-1/rb) (-p*c3);(gy - 1/rb)...
    (1/rb + k1 + 1/rc - gx + p*(c1 + c2)) (-1/rc - p*c1 - gy);...
    (-gy - p*c3)(-p*c1 - 1/rc + gx)(1/ZL + 1/rc + gy + p*(c1+c3))];
FT1b= (inv(y))*[(1/Zs);0;0];
A1f2=FT1b(1,1);
B1f2=FT1b(2,1);
C1f2=FT1b(3,1);
Modulo_C1f2= abs(C1f2);
Fase= (180*angle(C1f2))/pi;

```

%Funções de transferencia de primeira ordem do circuito em f3.

```

p= j*2*pi*f3(i);
Zs= (R2 + p*c1p*R1*R2)/(p*c1p*(R1+R2) + 1);
ZL= (p*c3p*R4*R3 + R3)/(p*c3p*R4 + 1 + p*c3p*R3...
    + (p^2)*c3p*c2p*R4*R3 + p*c2p*R3);
y= [(1/Zs + 1/rb + p*c3) (-1/rb) (-p*c3);(gy - 1/rb)...
    (1/rb + k1 + 1/rc - gx + p*(c1 + c2)) (-1/rc - p*c1 - gy);...

```

```

    (-gy - p*c3)(-p*c1 - 1/rc + gx)(1/ZL + 1/rc + gy + p*(c1+c3));
FT1c= (inv(y))*[(1/Zs);0;0];
A1f3=FT1c(1,1);
B1f3=FT1c(2,1);
C1f3=FT1c(3,1);

%coeficientes do vetor nao-linear j(t) nas frequencias f1 e f2.
C21= 0;

C22= -2*k2*B1f1*B1f2 - gama2e*j*4*pi*(f1(i)+f2(i))*B1f1*B1f2...
      + gama2c*j*4*pi*(f1(i)+f2(i))*( C1f1*C1f2 - (C1f1*B1f2 ...
      + C1f2*B1f1) + B1f1*B1f2) + 2*gxx*B1f1*B1f2...
      + 2*gyy*( C1f1*C1f2 - (A1f1*C1f2 + A1f2*C1f1) + A1f1*A1f2)...
      + gxy*( B1f1*C1f2 + B1f2*C1f1 - ( A1f1*B1f2 + A1f2*B1f1) );

C23= - gama2c*j*4*pi*(f1(i)+f2(i))*( C1f1*C1f2 - (C1f1*B1f2...
      + C1f2*B1f1) + B1f1*B1f2) - 2*gxx*B1f1*B1f2...
      - 2*gyy*( C1f1*C1f2 - (A1f1*C1f2 + A1f2*C1f1) + A1f1*A1f2)...
      - gxy*( B1f1*C1f2 + B1f2*C1f1 - (A1f1*B1f2 + A1f2*B1f1) );

% Funções de transferencia nao-lineares de 2a ordem na
%frequencia f1 e f2.
p= j*2*pi*(f1(i)+f2(i));
Zs= (R2 + p*c1p*R1*R2)/(p*c1p*(R1+R2) + 1);
ZL= (p*c3p*R4*R3 + R3)/(p*c3p*R4 + 1 + p*c3p*R3 +...
      (p^2)*c3p*c2p*R4*R3 + p*c2p*R3);
y= [(1/Zs + 1/rb + p*c3) (-1/rb) (-p*c3);(gy - 1/rb)...
      (1/rb + k1 + 1/rc - gx + p*(c1 + c2)) (-1/rc - p*c1 - gy);...
      (-gy - p*c3)(-p*c1 - 1/rc + gx)(1/ZL + 1/rc + gy + p*(c1+c3))];

FTN2a= (inv(y))*(1/2)*[C21;C22;C23];

```

```

A2f1f2=FTN2a(1,1);
B2f1f2=FTN2a(2,1);
C2f1f2=FTN2a(3,1);

Modulo_C2f1f2= abs(FTN2a(3,1));
Fase_C2f1f2= (180*angle(FTN2a(3,1)))/pi;

%coeficientes do vetor nao-linear j(t) nas frequencias f1 e f3.
C21= 0;

C22= -2*k2*B1f1*B1f3 - gama2e*j*4*pi*(f1(i)+f3(i))*B1f1*B1f3 +...
      gama2c*j*4*pi*(f1(i)+f3(i))*( C1f1*C1f3 - (C1f1*B1f3 + ...
      C1f3*B1f1) + B1f1*B1f3) + 2*gxx*B1f1*B1f3 + 2*gyy*( C1f1*...
      C1f3 - (A1f1*C1f3 + A1f3*C1f1) + A1f1*A1f3) + gxy*( B1f1*...
      C1f3 + B1f3*C1f1 - ( A1f1*B1f3 + A1f3*B1f1) );

C23= - gama2c*j*4*pi*(f1(i)+f3(i))*( C1f1*C1f3 - (C1f1*B1f3 +...
      C1f3*B1f1) + B1f1*B1f3) - 2*gxx*B1f1*B1f3 - 2*gyy*( C1f1*...
      C1f3 - (A1f1*C1f3 + A1f3*C1f1) + A1f1*A1f3) - gxy*( B1f1*...
      C1f3 + B1f3*C1f1 - (A1f1*B1f3 + A1f3*B1f1) );

% Funções de transferencia nao-lineares de 2a ordem na
%frequencia f1 e f3.
p= j*2*pi*(f1(i)+f3(i));
Zs= (R2 + p*c1p*R1*R2)/(p*c1p*(R1+R2) + 1);
ZL= (p*c3p*R4*R3 + R3)/(p*c3p*R4 + 1 + p*c3p*R3 +...
      (p^2)*c3p*c2p*R4*R3 + p*c2p*R3);
y= [(1/Zs + 1/rb + p*c3) (-1/rb) (-p*c3);(gy - 1/rb)...
      (1/rb + k1 + 1/rc - gx + p*(c1 + c2))(-1/rc - p*c1 - gy);...
      (-gy - p*c3)(-p*c1 - 1/rc + gx)(1/ZL + 1/rc + gy + p*(c1+c3))];

FTN2b= (inv(y))*(1/2)*[C21;C22;C23];

```

```

A2f1f3=FTN2b(1,1);
B2f1f3=FTN2b(2,1);
C2f1f3=FTN2b(3,1);

Modulob=abs(FTN2b(3,1));
Faseb= (180*angle(FTN2b(3,1)))/pi;

%coeficientes do vetor nao-linear j(t) nas frequencias f2 e f3.
C21= 0;

C22= -2*k2*B1f2*B1f3 - gama2e*j*4*pi*(f2(i)+f3(i))*B1f2*B1f3 +...
      gama2c*j*4*pi*(f2(i)+f3(i))*( C1f2*C1f3 - (C1f2*B1f3 + ...
      C1f3*B1f2) + B1f2*B1f3) + 2*gxx*B1f2*B1f3 + 2*gyy*( C1f2*...
      C1f3 - (A1f2*C1f3 + A1f3*C1f2) + A1f2*A1f3) + gxy*( B1f2*...
      C1f3 + B1f3*C1f2 - ( A1f2*B1f3 + A1f3*B1f2) );

C23= - gama2c*j*4*pi*(f2(i)+f3(i))*( C1f2*C1f3 - (C1f2*B1f3 + ...
      C1f3*B1f2) + B1f2*B1f3) - 2*gxx*B1f2*B1f3 - 2*gyy*( C1f2*...
      C1f3 - (A1f2*C1f3 + A1f3*C1f2) + A1f2*A1f3) - gxy*( B1f2*...
      C1f3 + B1f3*C1f2 - (A1f2*B1f3 + A1f3*B1f2) );

% Funções de transferencia nao-lineares de 2a ordem na
%frequencia f2 e f3.
p= j*2*pi*(f2(i)+f3(i));
Zs= (R2 + p*c1p*R1*R2)/(p*c1p*(R1+R2) + 1);
ZL= (p*c3p*R4*R3 + R3)/(p*c3p*R4 + 1 + p*c3p*R3 +...
      (p^2)*c3p*c2p*R4*R3 + p*c2p*R3);
y= [(1/Zs + 1/rb + p*c3) (-1/rb) (-p*c3);(gy - 1/rb)...
      (1/rb + k1 + 1/rc - gx + p*(c1 + c2))(-1/rc - p*c1 - gy);...
      (-gy - p*c3)(-p*c1 - 1/rc + gx)(1/ZL + 1/rc + gy + p*(c1+c3))];

FTN2c= (inv(y))*(1/2)*[C21;C22;C23];

```

```

A2f2f3=FTN2c(1,1);
B2f2f3=FTN2c(2,1);
C2f2f3=FTN2c(3,1);

Moduloc=abs(FTN2c(3,1));
Fasec= (180*angle(FTN2c(3,1)))/pi;

%equação que descreve os coeficientes resultantes da
%nao-linearidade resistiva.
Res = 4*k2*(B1f1*B2f2f3 + B1f2*B2f1f3 + B1f3*B2f1f2)...
      + 6*k3*(B1f1*B1f2*B1f3);

%equação que descreve os coeficientes resultantes da
%nao-linearidade da capacitancia de coletor.
Ck1= 8*gama2c*j*pi*(f1(i)+f2(i)+f3(i))*( ( C1f1*C2f2f3...
      + C1f2*C2f1f3 + C1f3*C2f1f2 ) - (C1f1*B2f2f3 + ...
      C1f2*B2f1f3 + C1f3*B2f1f2) - (B1f1*C2f2f3 + B1f2*C2f1f3 +...
      B1f3*C2f1f2) + (B1f1*B2f2f3 + B1f2*B2f1f3 + B1f3*B2f1f2) );

Ck2= 12*gama3c*j*pi*(f1(i)+f2(i)+f3(i))*( C1f1*C1f2*C1f3 -...
      (B1f1*C1f2*C1f3 + B1f2*C1f1*C1f3 + B1f3*C1f1*C1f2)...
      + (C1f1*B1f2*B1f3 + C1f2*B1f1*B1f3 + C1f3*B1f1*B1f2)...
      - B1f1*B1f2*B1f3 );

Ckc= Ck1 + Ck2;

%equação que descreve os coeficientes resultantes da
%nao-linearidade de avalanche e de hFE.
S1= 4*gxx*(B1f1*B2f2f3 + B1f2*B2f1f3 + B1f3*B2f1f2) +...
      4*gyy*( (C1f1*C2f2f3 + C1f2*C2f1f3 + C1f3*C2f1f2)...
      - (C1f1*A2f2f3 + C1f2*A2f1f3 + C1f3*A2f1f2) -...
      (A1f1*C2f2f3 + A1f2*C2f1f3 + A1f3*C2f1f2)...

```

```

+ (A1f1*A2f2f3 + A1f2*A2f1f3 + A1f3*A2f1f2) ) +...
2*gxy*( (B1f1*C2f2f3 + B1f2*C2f1f3 + B1f3*C2f1f2)...
+ (C1f1*B2f2f3 + C1f2*B2f1f3 + C1f3*B2f1f2) -...
(B1f1*A2f2f3 + B1f2*A2f1f3 + B1f3*A2f1f2)...
- (A1f1*B2f2f3 + A1f2*B2f1f3 + A1f3*B2f1f2) );

S2= 6*gxxx*(B1f1*B1f2*B1f3) + 6*gyyy*( C1f1*C1f2*C1f3 -...
(A1f1*C1f2*C1f3 + A1f2*C1f1*C1f3 + A1f3*C1f1*C1f2)...
+ (C1f1*A1f2*A1f3 + C1f2*A1f1*A1f3 + C1f3*A1f1*A1f2) -...
A1f1*A1f2*A1f3 ) + 2*gxy*( (C1f1*B1f2*B1f3 ...
+ C1f2*B1f1*B1f3 + C1f3*B1f1*B1f2) - (A1f1*B1f2*B1f3 +...
A1f2*B1f1*B1f3 + A1f3*B1f1*B1f2) ) + 2*gxy*((B1f1*...
C1f2*C1f3 + B1f2*C1f1*C1f3 + B1f3*C1f1*C1f2) -...
(B1f1*C1f2*A1f3 + B1f1*C1f3*A1f2 + B1f2*C1f1*A1f3...
+ B1f2*C1f3*A1f1 + B1f3*C1f1*A1f2 + B1f3*C1f2*A1f1) +...
(B1f1*A1f2*A1f3 + B1f2*A1f1*A1f3 + B1f3*A1f1*A1f2) );

S= S1 + S2;

%equação que descreve os coeficientes resultantes da
%nao-linearidade da capacitancia de emissor.
Cke= 8*gama2e*j*pi*(f1(i)+f2(i)+f3(i))*(B1f1*B2f2f3 +...
      B1f2*B2f1f3 + B1f3*B2f1f2) + 12*gama3e*j*pi*...
      (f1(i)+f2(i)+f3(i))*(B1f1*B1f2*B1f3);

%coeficientes do vetor j(t).
C31= 0;
C32= - Res - Cke + Ckc + S;
C33= - Ckc - S;

%funcoes de transferencia nao-lineares de terceira ordem (FTNL3).
p= j*2*pi*(f1(i)+f2(i)+f3(i));
Zs= (R2 + p*c1p*R1*R2)/(p*c1p*(R1+R2) + 1);

```



```

ZL= (p*c3p*R4*R3 + R3)/(p*c3p*R4 + 1 + p*c3p*R3 + ...
      (p^2)*c3p*c2p*R4*R3 + p*c2p*R3);
y= [(1/Zs + 1/rb + p*c3)(-1/rb)(-p*c3);(gy - 1/rb)...
      (1/rb + k1 + 1/rc - gx + p*(c1 + c2))(-1/rc - p*c1 - gy);...
      (-gy - p*c3)(-p*c1 - 1/rc + gx)(1/ZL + 1/rc + gy + p*(c1+c3))];

FT3(:,i)= (inv(y))*(1/6)*[C31;C32;C33];

C3f1f2f3(i)=FT3(3,i);
H3f1f2f3(i)= 20*log10(abs(C3f1f2f3(i)));

end
figure;
Ha = subplot(1,1,1);
set(Ha,'FontSize',13,'LineWidth',1.5);
semilogx(f2,H3f1f2f3,'LineWidth',1.5)
grid on
hold on
x= [3e6 5e6 7e6 10e6 20e6 30e6 50e6];
y= [26 24 21.5 15 1 -8 -22];
plot(x,y,'b^','LineWidth',1.5)
legend('Calculado','Medido',3);
xlabel('f_{2} [Hz]');
ylabel('|C_{3}(-f_1,f_2,f_2)| [dB]');

```

Anexo E

Programa para Cálculo das Funções de Transferência Não-Lineares do Amplificador de Microondas

Foi apresentado neste Anexo o programa implementado em MATLAB [16], que realiza o cálculo numérico das funções de transferência não-lineares de Volterra, referentes ao amplificador de microondas apresentado no Capítulo 6. Além das funções de Volterra, este programa determina também a potência dos produtos de intermodulação dissipados na carga e o ponto de interceptação de terceira ordem.

```
close all
clear all
%entrada de dados:
%(1) parametros caracteristicos do modelo nao-linear incremental
% do transsistor MESFET.
Rg = 2;
Rd = 1.5;
Rs = 1.5;
Ri = 2;
```

Cgs = 0.25e-12;

Cgd = 0.03e-12;

Cds = 0.1e-12;

Ls = 0.04e-9;

%(2.1) valores dos componentes do circuito de casamento de entrada.

C1 = 0.588e-12;

L1 = 0.703e-9;

L2 = 0.784e-9;

%(2.2) valores dos componentes do circuito de casamento de saída.

C2 = 0.254e-12;

L3 = 2.815e-9;

L4 = 1.294e-9;

%(3) impedância de carga e fonte.

Rin = 50;

RL = 50;

%(4.1) coeficientes resultantes da não-linearidade da fonte
%de corrente controlada por tensão.

gs1 = 0.03311;

gs2 = 0.00401;

gs3 = -0.00426;

%(4.2) coeficientes resultantes da não-linearidade resistiva.

gd1 = 0.00367;

gd2 = -0.000370;

gd3 = 0.000144;

%(5) potência dos tons de entrada.

PASdbm = -20;

```

%implementação das equações resultantes da modelagem do
%amplificador.

f2 = [1e9:.1e9:15e9];
f3 = f2;
f1 = (f2 - 0.1e9);

TAM_F2 = length(f2);

for i = 1:TAM_F2
    %Funções de transferência de primeira ordem do circuito em f1.
    p= j*2*pi*(-f1(i));

    x1 = p*L1;
    x2 = 1/(p*C1);
    x3 = p*L2;
    x4 = p*L3;
    x5 = 1/(p*C2);
    x6 = p*L4;

    Zs = (x1*x3*Rin + x1*x2*(Rin + x3))/(x3*Rin + (x1 + x2)*...
        (x3 + Rin)) ; %impedancia de entrada.
    ZL = (((RL + x6)*x5)/(RL + x6 + x5)) + x4;
        %impedancia da carga.
    y11 = (1/(Zs + Rg)) + Cgs*p + Cgd*p;
    y12 = - Cgs*p;
    y13 = 0;
    y14 = -Cgd*p;
    y21 = Cgs*p;
    y22 = -Cgs*p -(1/Ri);
    y23 = (1/Ri);
    y24 = 0;
    y31 = gs1; %gs1 = gm;

```

```

y32 = (1/Ri) - gs1;
y33 = -(1/Ri) - gd1 - Cds*p - (1/(Rs + p*Ls));
y34 = gd1 + Cds*p;
y41 = Cgd*p - gs1;
y42 = gs1;
y43 = gd1 + Cds*p;
y44 = - Cgd*p - gd1 - Cds*p - (1/(Rd + ZL));

y = [y11 y12 y13 y14;y21 y22 y23 y24;y31 y32 y33 y34;...
      y41 y42 y43 y44];

FT1a = (inv(y))*[(((x1 + x2)*x3*x1)/(( (x1 + x2)*x3 +...
      Rin*(x1 + x2 + x3) )*(x1 + x2)*(Zs + Rg))));0;0;0];

A1f1=FT1a(1,1);
B1f1=FT1a(2,1);
C1f1=FT1a(3,1);
D1f1=FT1a(4,1);

H1f1(i)= 20*log10(abs(D1f1));

YL = 1/(ZL);
GL = real(YL);
Zin = real(Zs);
pas = (1e-3)*10^(PASdbm/10);
PL1 = 4*(pas)*((abs(D1f1))^2)*(Rin)*GL;
PL1adbm(i) = 10*log10(PL1/(1e-3));

IMT1 = 20*log10(abs(D1f1)) + 10*log10(4*Rin*GL);

%Funções de transferencia de primeira ordem do circuito
%em f2.
p= j*2*pi*f2(i);

```

```

x1 = p*L1;
x2 = 1/(p*C1);
x3 = p*L2;
x4 = p*L3;
x5 = 1/(p*C2);
x6 = p*L4;

Zs =(x1*x3*Rin + x1*x2*(Rin + x3))/(x3*Rin + (x1 + x2)*...
    (x3 + Rin)) ; %impedancia de entrada.
ZL = (((RL + x6)*x5)/(RL + x6 + x5)) + x4;
    %impedancia da carga.

y11 = (1/(Zs + Rg)) + Cgs*p + Cgd*p;
y12 = - Cgs*p;
y13 = 0;
y14 = -Cgd*p;
y21 = Cgs*p;
y22 = -Cgs*p -(1/Ri);
y23 = (1/Ri);
y24 = 0;
y31 = gs1; %gs1 = gm;
y32 = (1/Ri) - gs1;
y33 = -(1/Ri) - gd1 - Cds*p - (1/(Rs + p*Ls));
y34 = gd1 + Cds*p;
y41 = Cgd*p - gs1;
y42 = gs1;
y43 = gd1 + Cds*p;
y44 = - Cgd*p - gd1 - Cds*p - (1/(Rd + ZL));

y = [y11 y12 y13 y14;y21 y22 y23 y24;y31 y32 y33 y34;...
    y41 y42 y43 y44];

```

```
FT1b = (inv(y))*[(((x1 + x2)*x3*x1)/(( (x1 + x2)*x3 + ...
    Rin*(x1 + x2 + x3) )*(x1 + x2)*(Zs + Rg)));0;0;0];
```

```
A1f2=FT1b(1,1);
```

```
B1f2=FT1b(2,1);
```

```
C1f2=FT1b(3,1);
```

```
D1f2=FT1b(4,1);
```

```
H1f2(i)= 20*log10(abs(D1f2));
```

```
% Potencia do produto de IM f2 dissipada na carga.
```

```
YL = 1/(ZL);
```

```
GL = real(YL);
```

```
Zin = real(Zs);
```

```
pas = (1e-3)*10^(PASdbm/10);
```

```
PL1 = 4*(pas)*((abs(D1f2))^2)*(Rin)*GL;
```

```
PL1dbm(i) = 10*log10(PL1/(1e-3));
```

```
%Primeira parte da equação para IP3.
```

```
%Funções de transferencia de primeira ordem do circuito em f3.
```

```
p= j*2*pi*f3(i);
```

```
x1 = p*L1;
```

```
x2 = 1/(p*C1);
```

```
x3 = p*L2;
```

```
x4 = p*L3;
```

```
x5 = 1/(p*C2);
```

```
x6 = p*L4;
```

```
Zs =(x1*x3*Rin + x1*x2*(Rin + x3))/(x3*Rin + (x1 + x2)*...
```

```
(x3 + Rin)) ; %impedancia de entrada.
```

```
ZL = (((RL + x6)*x5)/(RL + x6 + x5)) + x4;
```

```
%impedancia da carga.
```

```

y11 = (1/(Zs + Rg)) + Cgs*p + Cgd*p;
y12 = - Cgs*p;
y13 = 0;
y14 = -Cgd*p;
y21 = Cgs*p;
y22 = -Cgs*p -(1/Ri);
y23 = (1/Ri);
y24 = 0;
y31 = gs1; %gs1 = gm;
y32 = (1/Ri) - gs1;
y33 = -(1/Ri) - gd1 - Cds*p - (1/(Rs + p*Ls));
y34 = gd1 + Cds*p;
y41 = Cgd*p - gs1;
y42 = gs1;
y43 = gd1 + Cds*p;
y44 = - Cgd*p - gd1 - Cds*p - (1/(Rd + ZL));

y = [y11 y12 y13 y14;y21 y22 y23 y24;y31 y32 y33 y34;...
      y41 y42 y43 y44];

FT1c = (inv(y))*[(((x1 + x2)*x3*x1)/(( (x1 + x2)*x3 +...
      Rin*(x1 + x2 + x3) )*(x1 + x2)*(Zs + Rg)));0;0;0];

A1f3=FT1c(1,1);
B1f3=FT1c(2,1);
C1f3=FT1c(3,1);
D1f3=FT1c(4,1);

YL = 1/(ZL);
GL = real(YL);
pas = (1e-3)*10^(PASdbm/10);

```

```

PL1 = 4*(pas)*((abs(D1f3))^2)*(Rin)*GL;
PL1cdbm(i) = 10*log10(PL1/(1e-3));

%coeficientes do vetor nao-linear j(t) nas frequencias
%f1 e f2.
C21 = 0;

C22 = 0;

C23 = - 2*gs2*(A1f1*A1f2 - A1f1*B1f2 - A1f2*B1f1 +...
        B1f1*B1f2) - 2*gd2*(D1f1*D1f2 - C1f1*D1f2 -...
        C1f2*D1f1 + C1f1*C1f2);

C24 = 2*gs2*(A1f1*A1f2 - A1f1*B1f2 - A1f2*B1f1 +...
        B1f1*B1f2) + 2*gd2*(D1f1*D1f2 - C1f1*D1f2 -...
        C1f2*D1f1 + C1f1*C1f2);

% Funções de transferencia nao-lineares de 2a ordem na
%frequencia f1 e f2.
p= j*2*pi*(-f1(i)+f2(i));

x1 = p*L1;
x2 = 1/(p*C1);
x3 = p*L2;
x4 = p*L3;
x5 = 1/(p*C2);
x6 = p*L4;

Zs =(x1*x3*Rin + x1*x2*(Rin + x3))/(x3*Rin + (x1 + x2)...
    *(x3 + Rin)) ; %impedancia de entrada.
ZL = (((RL + x6)*x5)/(RL + x6 + x5)) + x4;
    %impedancia da carga.

```

```

y11 = (1/(Zs + Rg)) + Cgs*p + Cgd*p;
y12 = - Cgs*p;
y13 = 0;
y14 = -Cgd*p;
y21 = Cgs*p;
y22 = -Cgs*p -(1/Ri);
y23 = (1/Ri);
y24 = 0;
y31 = gs1; %gs1 = gm;
y32 = (1/Ri) - gs1;
y33 = -(1/Ri) - gd1 - Cds*p - (1/(Rs + p*Ls));
y34 = gd1 + Cds*p;
y41 = Cgd*p - gs1;
y42 = gs1;
y43 = gd1 + Cds*p;
y44 = - Cgd*p - gd1 - Cds*p - (1/(Rd + ZL));

y = [y11 y12 y13 y14;y21 y22 y23 y24;y31 y32 y33 y34;...
      y41 y42 y43 y44];

FTN2a= (inv(y))*(1/2)*[C21;C22;C23;C24];

A2f1f2=FTN2a(1,1);
B2f1f2=FTN2a(2,1);
C2f1f2=FTN2a(3,1);
D2f1f2=FTN2a(4,1);

H2f1f2(i)= 20*log10(abs(D2f1f2));

% Potencia do produto de IM f2-f1 dissipada na carga.
YL = 1/(ZL);
GL = real(YL);
pas = (1e-3)*10^(PASdbm/10);

```

```

PL2 = 32*(pas^2)*((abs(D2f1f2))^2)*(Rin^2)*GL;
PL2dbm(i) = 10*log10(PL2/(1e-3));

%coeficientes do vetor nao-linear j(t) nas frequencias
%f1 e f3.
C21 = 0;

C22 = 0;

C23 = - 2*gs2*(A1f1*A1f3 - A1f1*B1f3 - A1f3*B1f1 +...
        B1f1*B1f3) - 2*gd2*(D1f1*D1f3 - C1f1*D1f3 -...
        C1f3*D1f1 + C1f1*C1f3);

C24 = 2*gs2*(A1f1*A1f3 - A1f1*B1f3 - A1f3*B1f1 +...
        B1f1*B1f3) + 2*gd2*(D1f1*D1f3 - C1f1*D1f3 -...
        C1f3*D1f1 + C1f1*C1f3);

% Funções de transferencia nao-lineares de 2a ordem na
%frequencia f1 e f3.
p = j*2*pi*(-f1(i)+f3(i));

x1 = p*L1;
x2 = 1/(p*C1);
x3 = p*L2;
x4 = p*L3;
x5 = 1/(p*C2);
x6 = p*L4;

Zs =(x1*x3*Rin + x1*x2*(Rin + x3))/(x3*Rin + (x1 + x2)...
    *(x3 + Rin)) ; %impedancia de entrada.
ZL = (((RL + x6)*x5)/(RL + x6 + x5)) + x4;
    %impedancia da carga.

```

```

y11 = (1/(Zs + Rg)) + Cgs*p + Cgd*p;
y12 = - Cgs*p;
y13 = 0;
y14 = -Cgd*p;
y21 = Cgs*p;
y22 = -Cgs*p -(1/Ri);
y23 = (1/Ri);
y24 = 0;
y31 = gs1; %gs1 = gm;
y32 = (1/Ri) - gs1;
y33 = -(1/Ri) - gd1 - Cds*p - (1/(Rs + p*Ls));
y34 = gd1 + Cds*p;
y41 = Cgd*p - gs1;
y42 = gs1;
y43 = gd1 + Cds*p;
y44 = - Cgd*p - gd1 - Cds*p - (1/(Rd + ZL));

y = [y11 y12 y13 y14;y21 y22 y23 y24;y31 y32 y33 y34;...
      y41 y42 y43 y44];

FTN2b= (inv(y))*(1/2)*[C21;C22;C23;C24];

A2f1f3=FTN2b(1,1);
B2f1f3=FTN2b(2,1);
C2f1f3=FTN2b(3,1);
D2f1f3=FTN2b(4,1);

% Modulob=abs(FTN2b(4,1));
% Faseb= (180*angle(FTN2b(4,1)))/pi;

%coeficientes do vetor nao-linear j(t) nas frequencias
%f2 e f3.
C21 = 0;

```

```

C22 = 0;

C23 = - 2*gs2*(A1f2*A1f3 - A1f2*B1f3 - A1f3*B1f2 +...
        B1f2*B1f3) - 2*gd2*(D1f2*D1f3 - C1f2*D1f3 -...
        C1f3*D1f2 + C1f2*C1f3);

C24 = 2*gs2*(A1f2*A1f3 - A1f2*B1f3 - A1f3*B1f2 +...
        B1f2*B1f3) + 2*gd2*(D1f2*D1f3 - C1f2*D1f3 -...
        C1f3*D1f2 + C1f2*C1f3);

% Funções de transferencia nao-lineares de 2a ordem na
%frequencia f2 e f3.
p= j*2*pi*(f2(i)+f3(i));

x1 = p*L1;
x2 = 1/(p*C1);
x3 = p*L2;
x4 = p*L3;
x5 = 1/(p*C2);
x6 = p*L4;

Zs =(x1*x3*Rin + x1*x2*(Rin + x3))/(x3*Rin + (x1 + x2)*...
      (x3 + Rin)) ; %impedancia de entrada.
ZL = (((RL + x6)*x5)/(RL + x6 + x5)) + x4;
      %impedancia da carga.

y11 = (1/(Zs + Rg)) + Cgs*p + Cgd*p;
y12 = - Cgs*p;
y13 = 0;
y14 = -Cgd*p;
y21 = Cgs*p;
y22 = -Cgs*p -(1/Ri);

```

```

y23 = (1/Ri);
y24 = 0;
y31 = gs1; %gs1 = gm;
y32 = (1/Ri) - gs1;
y33 = -(1/Ri) - gd1 - Cds*p - (1/(Rs + p*Ls));
y34 = gd1 + Cds*p;
y41 = Cgd*p - gs1;
y42 = gs1;
y43 = gd1 + Cds*p;
y44 = - Cgd*p - gd1 - Cds*p - (1/(Rd + ZL));

y = [y11 y12 y13 y14;y21 y22 y23 y24;y31 y32 y33 y34;...
      y41 y42 y43 y44];

FTN2c= (inv(y))*(1/2)*[C21;C22;C23;C24];

A2f2f3=FTN2c(1,1);
B2f2f3=FTN2c(2,1);
C2f2f3=FTN2c(3,1);
D2f2f3=FTN2c(4,1);

% Moduloc=abs(FTN2c(4,1));
% Fasec= (180*angle(FTN2c(4,1)))/pi;

H2f2f3(i)= 20*log10(abs(D2f2f3));

%equação que descreve os coeficientes resultantes da
%nao-linearidade da fonte de corrente controlada por tensao.
S1 = 4*gs2*( A1f1*A2f2f3 + A1f2*A2f1f3 + A1f3*A2f1f2 -...
             (A1f1*B2f2f3 + A1f2*B2f1f3 + A1f3*B2f1f2)...
             -(B1f1*A2f2f3 + B1f2*A2f1f3 + B1f3*A2f1f2) +...
             (B1f1*B2f2f3 + B1f2*B2f1f3 + B1f3*B2f1f2) );

```

```

S2 = 6*gs3*( A1f1*A1f2*A1f3 - B1f1*A1f2*A1f3 -...
           B1f2*A1f1*A1f3 - B1f3*A1f1*A1f2 + A1f1*B1f2*B1f3...
           + A1f2*B1f1*B1f3 + A1f3*B1f1*B1f2 - B1f1*B1f2*B1f3 );

```

```

S = S1 + S2;

```

```

%equação que descreve os coeficientes resultantes
% da nao-linearidade resistiva.

```

```

R1 = 4*gd2*( D1f1*D2f2f3 + D1f2*D2f1f3 + D1f3*D2f1f2 -...
           (D1f1*C2f2f3 + D1f2*C2f1f3 + D1f3*C2f1f2) -...
           (C1f1*D2f2f3 + C1f2*D2f1f3 + C1f3*D2f1f2) +...
           (C1f1*C2f2f3 + C1f2*C2f1f3 + C1f3*C2f1f2) );

```

```

R2 = 6*gd3*( D1f1*D1f2*D1f3 - C1f1*D1f2*D1f3 -...
           C1f2*D1f1*D1f3 - C1f3*D1f1*D1f2 + D1f1*C1f2*C1f3...
           + D1f2*C1f1*C1f3 + D1f3*C1f1*C1f2 - C1f1*C1f2*C1f3 );

```

```

R = R1 + R2;

```

```

%coeficientes do vetor j(t).

```

```

C31 = 0;

```

```

C32 = 0;

```

```

C33 = - S - R;

```

```

C34 = S + R;

```

```

%funções de transferencia nao-lineares de terceira
%ordem (FTNL3).

```

```

p= j*2*pi*(-f1(i)+f2(i)+f3(i));

```

```

x1 = p*L1;

```

```

x2 = 1/(p*C1);

```

```

x3 = p*L2;

```

```

x4 = p*L3;

```

```

x5 = 1/(p*C2);
x6 = p*L4;

Zs =(x1*x3*Rin + x1*x2*(Rin + x3))/(x3*Rin + (x1 + x2)...
    *(x3 + Rin)) ; %impedancia de entrada.
ZL = (((RL + x6)*x5)/(RL + x6 + x5)) + x4;
    %impedancia da carga.

y11 = (1/(Zs + Rg)) + Cgs*p + Cgd*p;
y12 = - Cgs*p;
y13 = 0;
y14 = -Cgd*p;
y21 = Cgs*p;
y22 = -Cgs*p -(1/Ri);
y23 = (1/Ri);
y24 = 0;
y31 = gs1; %gs1 = gm;
y32 = (1/Ri) - gs1;
y33 = -(1/Ri) - gd1 - Cds*p - (1/(Rs + p*Ls));
y34 = gd1 + Cds*p;
y41 = Cgd*p - gs1;
y42 = gs1;
y43 = gd1 + Cds*p;
y44 = - Cgd*p - gd1 - Cds*p - (1/(Rd + ZL));

y = [y11 y12 y13 y14 ; y21 y22 y23 y24 ; y31 y32 y33 y34;...
    y41 y42 y43 y44];

FT3(:,i)= (inv(y))*(1/6)*[C31;C32;C33;C34];

D3f1f2f3(i)=FT3(4,i);
H3f1f2f3(i)= 20*log10(abs(D3f1f2f3(i)));

```

```

% Potencia do produto de IM 2f2-f1 dissipada na carga.
YL = 1/(ZL);
GL = real(YL);
pas = (1e-3)*10^(PASdbm/10);
PL3 = 144*(pas^3)*((abs(D3f1f2f3(i)))^2)*(Rin^3)*GL;
PL3dbm(i) = 10*log10(PL3/(1e-3));
Zin = real(Zs);

% Ponto de interceptação de terceira ordem.
IMT3 = 20*log10(abs(D3f1f2f3(i))) + 10*log10( (144e-6)*...
(Rin^3)*GL );

IP3(i) = (3/2)*IMT1 - (1/2)*IMT3;

end

figure;
Ha = subplot(1,1,1);
set(Ha,'FontSize',13);

plot(f2,IP3)
grid on
hold on

x = [1e9 1.5e9 2e9 2.5e9 3e9 3.5e9 4e9 4.5e9 4.75e9 5e9...
5.15e9 5.30e9 5.45e9 6e9 7e9 8e9 9e9 10e9 10.5e9...
11e9 11.5e9 12e9];
y = [19.9 20.7 20.9 21 20.9 20.6 20 19.1 18.9 19.8 20.7...
21.5 21.8 21.8 21.6 21.9 22.3 21.9 21.2 20.2 18.8 17.6];
plot(x,y,'vr')
legend('Calculado','Microwave Office',1);
xlabel('F [Hz]');
ylabel('IP3 [dBm]');

```

```
figure;
Ha = subplot(1,1,1);
set(Ha,'FontSize',13);

plot(f2,PL1dbm)
grid on
hold on

x = [4e9 4.5e9 5e9 6e9 7e9 8e9 9e9 10e9 11e9 12e9];
y = [-21.5 -14.4 -7.21 -9.76 -12.2 -13.1 -13.1 -12.7...
     -12.8 -14.8];
plot(x,y,'bv')

legend('Calculado','Microwave Office',4);

plot(f2,PL2dbm,'g')
hold on

x = [4e9 4.25e9 4.5e9 4.75e9 5e9 6e9 7e9 8e9 9e9 10e9...
     11e9 12e9];
y = [-110 -90.4 -77.3 -66.6 -58.8 -62.4 -68.5 -76.2...
     -87.6 -74.5 -61.8 -57.9];

plot(x,y,'gv')
hold on

plot(f2,PL3dbm,'m')
hold on

x = [4e9 4.5e9 5e9 6e9 7e9 8e9 9e9 10e9 11e9 12e9];
y = [-106 -83.9 -61.4 -72.4 -80.2 -82.9 -84 -82.3...
     -78.3 -78.3];
```

```
plot(x,y,'mv')
```

```
xlabel('F [Hz]');
```

```
ylabel('Potencia [dBm]');
```

Referências Bibliográficas

- [1] GRAHAM, J. W., EHRMAN, L. *Nonlinear System Modeling and Analysis with Applications to Communications Receivers*. Rome Air Development Center. Rome, New York: Tech. Rep. RADCR-TR-73-178. DDC Document AD 766 278. 1973. 8 microfichas.
- [2] WEINER, Donald, SPINA, John. *Sinusoidal Analysis and Modeling of Weakly Nonlinear Circuits*. New York: Van Nostrand Reinhold, 1980.
- [3] MAAS, Stephen. *Nonlinear Microwave Circuits*. New York: Artech House, 1996.
- [4] NARAYANAN, S. Transistor Distortion Analysis Using Volterra Series Representation. *Bell Systems Technical Journal*, [s.l.], v. 46, p. 991-1024, May/June 1967.
- [5] DENG, Junxiong, GUDEM, Prasad S., ASBECK, Peter M. A High Average-Efficiency SiGe HBT Power Amplifier for WCDMA Handset Applications. *IEEE TRANSACTIONS ON MICROWAVE THEORY AND TECHNIQUES*, [s.l.], v. 53, n. 2, p. 529-537, Feb. 2005.
- [6] DENG, Junxiong, GUDEM, Prasad S., LARSON, Lawrence E. Linearity Analysis of SiGe HBT Amplifiers Using a Power-Dependent Coefficient Volterra Technique. In: RADIO AND WIRELESS CONFERENCE, 2004, [s.l.], [s.n.], 19-22 Sept., 2004. p. 479-482.
- [7] ZHU, Anding, BRAZIL, Thomas J. Behavioral Modeling of RF Power Amplifiers Based on Pruned Volterra Series. *IEEE MICROWAVE AND WIRELESS COMPONENTS LETTERS*, [s.l.], v. 14, n. 12, p. 563-565, Dec. 2004.
- [8] KUSUNOKI, Shigeo, KAWAKAMI, Katsuji, HATSUGAI, Tadanaga. Load-Impedance and Bias-Network Dependence of Power Amplifier With Second Har-

- monic Injection. *IEEE TRANSACTIONS ON MICROWAVE THEORY AND TECHNIQUES*, [s.l.], v. 52, n. 9, p. 2169-2176, Sept. 2004.
- [9] AHN, Kwang-Ho, JEONG, Yoon-Ha, LEE, Soong-Hak. Effects of Source and Load Impedance on the Intermodulation Products of GaAs FETs. *IEEE TRANSACTIONS ON MICROWAVE THEORY AND TECHNIQUES*, [s.l.], v. 1, p. 469-472, June 2000.
- [10] LI, Peng, PILEGGI, Lawrence T. Compact Reduced-Order Modeling of Weakly Nonlinear Analog and RF Circuits. *IEEE TRANSACTIONS ON COMPUTER-AIDED DESIGN OF INTEGRATED CIRCUITS AND SYSTEMS*, [s.l.], v. 23, n. 2, p. 184-203, Feb. 2005.
- [11] MASS, Stephen A., CROSMUN, Andrea. Modeling the Gate I/V Characteristic of a GaAs MESFET for Volterra Series Analysis. *IEEE TRANSACTIONS ON MICROWAVE THEORY AND TECHNIQUES*, [s.l.], v. 37, n. 7, p. 1134-1136, July. 1989.
- [12] CROSMUN, Andrea, MASS, Stephen A. Minimization of Intermodulation Distortion in GaAs MESFET Small-Signal Amplifiers. *IEEE TRANSACTIONS ON MICROWAVE THEORY AND TECHNIQUES*, [s.l.], v. 37, n. 9, p. 1411-1416, Sept. 1989.
- [13] AHMED, Arif, ISLAM, Syed S., ANWAR, A. F. M. A Temperature-Dependent Nonlinear Analysis of GaN/AlGaN HMTs Using Volterra Series. *IEEE TRANSACTIONS ON MICROWAVE THEORY AND TECHNIQUES*, [s.l.], v. 49, n. 9, p. 1518-1524, Sept. 2001.
- [14] BAYTEKIN, Burcin, MEYER, Robert G. Analysis and Simulation of Spectral Regrowth in Radio Frequency Power Amplifiers. *IEEE JOURNAL OF SOLID-STATE CIRCUITS*, [s.l.], v. 40, n. 2, p. 370-381, Feb. 2005.
- [15] HUANG, Chien-Chang, CHU, Tah-Hsiung. Analysis of MESFET Injection-Locked Oscillators in Fundamental Mode of Operation. *IEEE TRANSACTIONS ON MICROWAVE THEORY AND TECHNIQUES*, [s.l.], v. 42, n. 10, p. 1851-1857, Oct. 94.
- [16] MATLAB Version 6.5, *THE MATHWORKS, INC*, [s.l.], Mar. 2003.