

Estimação de Parâmetros por
Máxima Verossimilhança para
Ambientes Generalizados do Canal
sem Fio

FERNANDO PALMA BATISTA

DEZ / 2015

Estimação de Parâmetros por Máxima Verossimilhança para Ambientes Generalizados do Canal sem Fio

FERNANDO PALMA BATISTA

Dissertação apresentada ao Instituto Nacional de Telecomunicações, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Telecomunicações.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Rausley Adriano Amaral de Souza.

Santa Rita do Sapucaí
2015

Batista, Fernando Palma

B333e

Estimação de Parâmetros por Máxima Verossimilhança para Ambientes Generalizados do Canal sem Fio. / Rausley Adriano Amaral de Souza. – Santa Rita do Sapucaí, 2015.

97p.

Orientador: Prof. Dr. Rausley Adriano Amaral de Souza.

Dissertação de Mestrado – Engenharia de Telecomunicações – Instituto Nacional de Telecomunicações – INATEL.

Inclui bibliografia e anexo.

1. Estimadores em estatística 2. Máxima verossimilhança 3. Distribuição em estatística 4. Desvanecimento 5. Engenharia de Telecomunicações. I. Souza, Rausley Adriano Amaral de. II. Instituto Nacional de Telecomunicações – INATEL. III. Título.

CDU 621.39

FOLHA DE APROVAÇÃO

Dissertação defendida e aprovada em ____ / ____ / ____,
pela comissão julgadora:

Prof. Dr. Rausley Adriano Amaral de Souza
INATEL

Prof. Dr. Waslon Terlizzie Araújo Lopes
Universidade Federal da Paraíba

Prof. Dr. Antônio Marcos Alberti
INATEL

Coordenador do Curso de Mestrado
Prof. Dr. José Marcos Câmara Brito

“Não deixe de acreditar.”

Journey

Aos meus pais

Agradecimentos

Aos meus pais Neyzi e Luciana, por todo o apoio e companheirismo nesta jornada. Este apoio foi indispensável nas grandes dificuldades. Tudo que sou hoje devo a vocês.

Aos meus avós Antônio e Izanildes, por terem feito parte importante na minha criação e no meu desenvolvimento. Obrigado pelo carinho.

Ao meu Professor orientador Rausley Adriano Amaral de Souza, pelo excelente trabalho de orientação, não só no desenvolvimento do meu mestrado, como também na oportunidade que tive de trabalhar com ele durante minha graduação, quando fui seu monitor.

Aos queridos amigos Renan e Dalyson, que são como uma família que escolhi e estiveram presentes durante todos esses anos de formação profissional.

Aos colegas de mestrado Geordan, Gui, Roberto, Lucas, Mário e todos os demais, por todos os momentos em que me ajudaram, não só nos assuntos relacionados ao curso, e sempre foram generosos e companheiros.

Aos amigos Carol, Camilinha, Mat, Kelle, Luís, Fer, Gabriel, Jordão Yano, Matheus, Mau, Sarah, Monique, Jéssica, Carolzinha, Débora, Isabella, Ana Maria, Ana Paula, Flávia, Gui, Luísa, Clara, Vinícius, entre outros, que viveram comigo os momentos bons e ruins e acompanharam a minha formação. Podem ter certeza que cada um de vocês é um pouco responsável por tudo que alcancei na vida.

E ao Inatel por todas as oportunidades oferecidas ao longo destes 7 anos em que estou na instituição.

Este trabalho foi parcialmente financiado pela Finep, com recursos do Funttel, contrato No 01.14.0231.00, sob o projeto Centro de Referência em Radiocomunicações (CRR) do Instituto Nacional de Telecomunicações - Inatel, Brasil.

Índice

Lista de Figuras	xii
Lista de Siglas	xiii
Lista de Símbolos	xv
Resumo	xvii
Abstract	xix
1 Introdução	1
1.1 Objetivos e Contribuições do Trabalho	4
1.2 Estrutura da Dissertação	4
1.3 Publicações	5
2 Estimação de Parâmetros	7
2.1 Método dos Momentos	8
2.2 Método da Máxima Verossimilhança	10
2.3 Informação de Fisher	14
2.4 Intervalo de Confiança	16
3 As Distribuições α-κ-μ e α-η-μ	19
3.1 A Distribuição α - κ - μ	20
3.1.1 Principais Estatísticas	21
3.1.2 Casos Particulares	21
3.2 A Distribuição α - η - μ	22
3.2.1 Principais Estatísticas	23
3.2.2 Casos Particulares	24
4 Estimador de Máxima Verossimilhança para as Distribuições α-κ-μ e α-η-μ	27

4.1	Estimadores para as Distribuições α - κ - μ e α - η - μ	27
4.2	Métodos de Geração das Amostras	30
4.3	Resultados Numéricos	34
4.3.1	Média Amostral e Intervalo de Confiança	34
4.3.2	CRLB para os Parâmetros das Distribuições Generalizadas	44
5	Conclusões e Propostas para Novas Pesquisas	53
	Referências Bibliográficas	55
A	Códigos em Matlab para Geração de Amostras	60
B	Códigos em Mathematica para Estimação de Parâmetros	67
C	Códigos em Mathematica para Cálculo do CRLB	71

Lista de Figuras

1.1	Comportamento instantâneo da envoltória do sinal que sofre desvanecimento em um ambiente sem fio.	3
2.1	Intervalo de valores da Gaussiana cuja área abaixo da curva corresponde a 95% da área total.	17
3.1	Casos particulares da distribuição $\alpha\text{-}\kappa\text{-}\mu$	22
3.2	Casos particulares da distribuição $\alpha\text{-}\eta\text{-}\mu$	25
4.1	Geração de amostras $\alpha\text{-}\kappa\text{-}\mu$ pelo método do espectro de Smith [1]. . .	33
4.2	Geração de amostras $\alpha\text{-}\eta\text{-}\mu$ pelo método do espectro de Smith [1]. . .	35
4.3	Média amostral de (a) $\hat{\eta}$ e (b) $\hat{\mu}$, em função do número de amostras, para a distribuição $\eta\text{-}\mu$	36
4.4	Médias amostrais e intervalos de confiança de (a) $\hat{\eta}$ e (b) $\hat{\mu}$ da distribuição $\eta\text{-}\mu$, encontrados usando amostras geradas pelo método da Aceitação-Rejeição.	37
4.5	Médias amostrais e intervalos de confiança de (a) $\hat{\alpha}$, (b) $\hat{\kappa}$ e (c) $\hat{\mu}$ da distribuição $\alpha\text{-}\kappa\text{-}\mu$, encontrados usando amostras geradas pela definição da distribuição.	39
4.6	Médias amostrais e intervalos de confiança de (a) $\hat{\alpha}$, (b) $\hat{\kappa}$ e (c) $\hat{\mu}$ da distribuição $\alpha\text{-}\kappa\text{-}\mu$, encontrados usando amostras geradas pelo método da Aceitação-Rejeição.	40
4.7	Médias amostrais e intervalos de confiança de (a) $\hat{\alpha}$, (b) $\hat{\kappa}$ e (c) $\hat{\mu}$ da distribuição $\alpha\text{-}\kappa\text{-}\mu$, encontrados usando amostras geradas pelo método do Espectro de Smith.	41
4.8	Comparação entre as FDPs estimada e teórica para (a) $\alpha = 4, 5$, $\kappa = 2$ e $\mu = 2$, (b) $\alpha = 2$, $\kappa = 0, 5$ e $\mu = 2$ e (c) $\alpha = 2$, $\kappa = 2$ e $\mu = 4$, considerando amostras geradas pelo método do Espectro de Smith, da distribuição $\alpha\text{-}\kappa\text{-}\mu$	43

4.9	Médias amostrais e intervalos de confiança de (a) $\hat{\alpha}$, (b) $\hat{\eta}$ e (c) $\hat{\mu}$ da distribuição α - η - μ , encontrados usando amostras geradas pela definição da distribuição.	45
4.10	Médias amostrais e intervalos de confiança de (a) $\hat{\alpha}$, (b) $\hat{\eta}$ e (c) $\hat{\mu}$ da distribuição α - η - μ , encontrados usando amostras geradas pelo método da Aceitação-Rejeição.	46
4.11	Médias amostrais e intervalos de confiança de (a) $\hat{\alpha}$, (b) $\hat{\eta}$ e (c) $\hat{\mu}$ da distribuição α - η - μ , encontrados usando amostras geradas pelo método do Espectro de Smith.	47
4.12	Comparação entre as FDPs estimada e teórica para (a) $\alpha = 4$, $\eta = 2$ e $\mu = 2$, (b) $\alpha = 2$, $\eta = 4$ e $\mu = 2$ e (c) $\alpha = 2$, $\eta = 2$ e $\mu = 1$, considerando amostras geradas pelo método do Espectro de Smith, da distribuição α - η - μ	48
4.13	Curvas de desvio padrão normalizado, obtidas de (2.30), para os parâmetros (a) α , (b) κ e (c) μ , da distribuição α - κ - μ	50
4.14	Curvas de desvio padrão normalizado, obtidas de (2.30), para os parâmetros (a) α , (b) η e (c) μ , da distribuição α - η - μ	52

Lista de Siglas

- FDP** - Função densidade de probabilidade
- ML** - Máxima verossimilhança (*Maximum likelihood*)
- VA** - Variável aleatória
- i.i.d.** - independentes e identicamente distribuídas
- LOS** - Linha de visada (*line-of-sight*)
- FDC** - Função de distribuição cumulativa
- MSE** - Erro quadrático médio (*Mean squared error*)
- IFFT** - Transformada rápida inversa de Fourier (*Inverse Fast Fourier transform*)

Lista de Símbolos

$g(\cdot)$	- Função que representa um estimador
$\mathbb{E}[\cdot]$	- Operador esperança matemática
$f(\cdot)$	- Função densidade de probabilidade
θ	- Parâmetro a ser estimado
$\boldsymbol{\theta}$	- Vetor de parâmetros a serem estimados
$\hat{\theta}$	- Estimador de máxima verossimilhança
$\hat{\boldsymbol{\theta}}$	- Vetor que contém os estimadores de máxima verossimilhança
$L(\cdot)$	- Função de log-verossimilhança
R	- Variável aleatória correspondente à envoltória do sinal
Ω	- Parâmetro da distribuição Rayleigh
$\mathbb{V}[\cdot]$	- Operador variância
$I_n(\cdot)$	- Informação de Fisher
ϵ	- Eficiência de um estimador
$I(\cdot)$	- Informação de Fisher contida em apenas uma variável aleatória
$\mathbf{I}_n(\cdot)$	- Matriz de informação de Fisher
\mathbf{K}_X	- Matriz de covariância do vetor de variáveis aleatórias \mathbf{X}
$\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	- Variável aleatória Gaussiana de média m e variância σ^2
α	- Parâmetro que modela a não-linearidade do meio de propagação
κ	- Relação entre a potência da componente dominante e a potência total das componentes espalhadas no caso de linha-de-visada direta
μ	- Extensão real do número de <i>clusters</i> de múltiplos percursos
p_i	- Média da componente em fase da envoltória $\alpha\text{-}\kappa\text{-}\mu$
q_i	- Média da componente em quadratura da envoltória $\alpha\text{-}\kappa\text{-}\mu$
σ^2	- Variância das componentes em fase e quadratura para a distribuição $\alpha\text{-}\kappa\text{-}\mu$
$I_\nu(\cdot)$	- Função de Bessel modificada de primeiro tipo e ordem ν
$\Gamma(\cdot)$	- Função Gamma
${}_1F_1(\cdot, \cdot, \cdot)$	- Função Hipergeométrica confluyente de Kummer
$F(\cdot)$	- Função de distribuição cumulativa
η	- Relação entre as variâncias das componentes em fase e quadratura na distribuição $\alpha\text{-}\eta\text{-}\mu$
$\Gamma(\cdot, \cdot)$	- Função Gamma incompleta
$Q_u(\cdot, \cdot)$	- Função Marcum
σ_X^2	- Variância da componente em fase da distribuição $\alpha\text{-}\eta\text{-}\mu$

σ_Y^2	- Variância da componente em quadratura da distribuição α - η - μ
${}_2F_1(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$	- Função Hipergeométrica de Gauss
$Y_\nu(\cdot, \cdot)$	- Função de distribuição cumulativa da distribuição α - η - μ
$I_\nu^{(1,0)}(z)$	- Derivada primeira de $I_\nu(z)$ em relação a ordem ν
$\psi_0(\cdot)$	- Função Digamma
$\hat{\alpha}$	- Estimador de α
$\hat{\kappa}$	- Estimador de κ
$\hat{\mu}$	- Estimador de μ
$\hat{\eta}$	- Estimador de η
f_{\max}	- Máximo desvio Doppler
v	- Velocidade
f_c	- Frequência da portadora
c	- Velocidade da luz no vácuo
Δf	- Variação entre as frequências Doppler consecutivas
$S_{Ez}(f)$	- Espectro de potências Doppler calculado na frequência f

Resumo

Batista, F.P. Estimação de Parâmetros por Máxima Verossimilhança para Ambientes Generalizados do Canal sem Fio. Santa Rita do Sapucaí: Instituto Nacional de Telecomunicações; 2015.

Nesta dissertação, estimadores obtidos pelo método de estimação de Máxima Verossimilhança (ML - *Maximum Likelihood*) para os parâmetros das distribuições α - κ - μ e α - η - μ são propostos. Estas distribuições generalizadas têm sido usadas para modelar a envoltória do sinal recebido em diferentes cenários e demonstram-se aplicáveis do ponto de vista prático. As distribuições α - κ - μ e α - η - μ possuem parâmetros que caracterizam especificamente o comportamento da envoltória do sinal que se propaga por canais de comunicação que são modelados pelas mesmas. Por este motivo, na modelagem de sistemas de comunicação que operam em ambientes α - κ - μ e α - η - μ , é necessário conhecer os valores dos parâmetros das distribuições. Portanto, estimadores eficientes são usados para inferi-los a partir de amostras colhidas com o objetivo de prover a troca de informação de maneira eficiente e com qualidade. Os estimadores ML para as distribuições α - κ - μ e α - η - μ são propostos e verificados em relação aos verdadeiros valores dos parâmetros por meio de simulações. As amostras utilizadas na estimação são geradas por três diferentes métodos de geração de números aleatórios, e uma comparação do desempenho dos estimadores para as amostras geradas por diferentes métodos é feita. Além disso, este trabalho apresenta uma comparação das funções densidade de probabilidade das envoltórias teórica e estimada e uma análise das variâncias dos estimadores considerando um limitante inferior. Como resultados, os estimadores obtidos foram capazes de prever com bom desempenho o comportamento da envoltória do sinal que se propaga no ambiente rádio-móvel. Como contribuição original deste trabalho foram encontradas as expressões simplificadas para as funções de log-verossimilhança das distribuições α - κ - μ e α - η - μ e suas derivadas em relação aos parâmetros das distribuições. Além disso, o método do Espectro de Smith para geração de números aleatórios foi adaptado para gerar amostras aleatórias que seguem as distribuições que são foco deste trabalho.

Palavras-chave: Estimadores de máxima verossimilhança; distribuições; α - κ - μ ; α - η - μ ; κ - μ ; η - μ ; α - μ ; geração de números aleatórios; canais com desvanecimento.

Abstract

Batista, F.P. Maximum Likelihood Parameter Estimation in Generalized Environments of the Wireless Channel . Santa Rita do Sapucaí: Instituto Nacional de Telecomunicações; 2015.

In this Master thesis, Maximum Likelihood (ML) estimators for the parameters of the α - κ - μ and α - η - μ distributions are proposed. These general distributions have been used to model the envelope of the received signal in different scenarios, and they have been considered applicable from a practical point of view. The α - κ - μ and α - η - μ distributions have parameters that characterize specifically the behavior of the envelope of the signal that propagates through communication channels modeled by them. That way, in the modeling of the communication systems that operate in α - κ - μ and α - η - μ environments, it is necessary to know the values of the parameters of the distributions. Hence, efficient estimators are used to infer them from samples of the signal's envelope, aiming to provide an exchange of information with quality and in a reliable way. The ML parameter estimators for the α - κ - μ and the α - η - μ distributions are proposed and verified against true values of the parameters by means of simulations. The samples used in the estimation are generated by three different random sequence generators, and a comparison of the performance of the estimators for the samples generated by different methods is done. Besides, this work presents a comparison of the theoretical and estimated probability density functions of the signal's envelope and an analysis of the variances of the estimators considering a lower bound. The results show that the estimators obtained were capable of predicting, with a good performance, the behavior of the envelope of the signal that propagates in the mobile channel. As an original contribution of this research, the simplified expressions for the log-likelihood function of the α - κ - μ e α - η - μ distributions were found, as well as their derivatives in respect to the parameters of the distributions. Besides, the Smith Spectrum method for random numbers generation was adapted to generate random samples following the distributions regarding this thesis.

Keywords: Maximum Likelihood estimators; distributions; α - κ - μ ; α - η - μ ; κ - μ ; η - μ ; α - μ ; random numbers generators; fading channels.

Capítulo 1

Introdução

O setor de telecomunicações vem crescendo constantemente em âmbito global. Cada vez mais existe a demanda por novas e melhores tecnologias que possam prover aos usuários troca de informações com maiores taxas e qualidade no serviço prestado. Dentre as tecnologias existentes, há uma tendência grande de se focar na transmissão de dados sem fio (*wireless*), uma vez que esta tecnologia viabiliza a mobilidade dos usuários. Neste caso, a comunicação é feita no chamado canal rádio-móvel.

No canal rádio-móvel os fenômenos de propagação da onda eletromagnética atuam sobre o sinal transmitido alterando seu comportamento e, conseqüentemente, sua potência [2]. É possível analisar o comportamento da potência do sinal com dois diferentes enfoques, um chamado de propagação em grande escala e o outro de propagação em pequena escala [2]. A propagação em grande escala analisa o comportamento do nível médio do sinal e é considerada em situações em que há uma longa distância (relativa ao comprimento de onda) entre as antenas transmissora e receptora. Neste caso, o sinal sofre sombreamento, que é a obstrução do sinal por obstáculos, e perda de potência no percurso (atenuação do espaço livre), causando a chegada de um sinal de nível médio consideravelmente menor no receptor [2]. A propagação em pequena escala analisa o comportamento do nível do sinal em curtos instantes de tempo (instantâneo) ou para uma curta distância relativa ao comprimento de onda. Neste caso, a degradação do sinal é causada pelo desvio Doppler, fenômeno físico que modifica a frequência da portadora devido à mobilidade relativa entre transmissor e receptor, ou pelos múltiplos percursos pelos quais o sinal transmitido se propaga, o que causa a chegada no receptor de versões do sinal transmitido com fases e amplitudes diferentes [2].

Para que se possa prover um sistema robusto e que garanta qualidade na troca de

informação, é necessário conhecer o comportamento do sinal que se propaga no meio, neste caso, o ambiente rádio-móvel, de maneira a poder modelar o canal por onde os dados trafegarão. Para a propagação em grande escala, existem modelos teóricos e empíricos bastante consolidados do ponto de vista prático. Como exemplo podem-se citar os modelos de Okumura-Hata e espaço livre [3]. A modelagem da propagação em pequena escala é feita por meio de modelos estocásticos, que consideram a característica aleatória do sinal recebido que sofreu a interferência do canal de comunicação. Alguns exemplos de modelos estocásticos são as distribuições de Rayleigh [4], Rice [5], Hoyt [6], Nakagami- m [7], α - μ [8], κ - μ , η - μ [9] e os modelos generalizados que abrangem os previamente citados, α - κ - μ e α - η - μ [10].

O canal rádio-móvel impõe algumas dificuldades ao sinal que se propaga por ele devido aos fenômenos físicos que a onda eletromagnética sofre, como difração, reflexão, espalhamento e absorção. Esses fenômenos causam variações instantâneas no nível do sinal recebido, caracterizando o efeito chamado de desvanecimento [2].

O sinal transmitido através do canal rádio-móvel terá componentes que se propagam por diferentes caminhos, os chamados múltiplos percursos ou multipercursos. As várias componentes do sinal chegam ao receptor em instantes diferentes, com fases diferentes e potências diferentes. A combinação destas versões do sinal no receptor gera interferências construtivas ou destrutivas, que causam o desvanecimento. Quando isso ocorre de maneira a gerar variações abruptas na envoltória do sinal em um curto período de tempo ou em curtas distâncias, ou seja, na propagação em pequena escala, o fenômeno é caracterizado como desvanecimento rápido. Além disso, ocorre também o efeito Doppler, que causa degradação no sinal devido à movimentação relativa entre antenas receptora e transmissora e culmina em desvios na frequência da portadora do sinal [2]. Os efeitos do desvanecimento que ocorrem na propagação em pequena escala podem ser observados no comportamento da envoltória do sinal mostrado na Figura 1.1.

Para viabilizar a implementação de um sistema de comunicação, é importante conhecer o comportamento do sinal que se propaga pelo canal. No caso do ambiente rádio-móvel, considerando propagação em pequena escala, as distribuições generalizadas utilizadas em sua modelagem possuem parâmetros que se relacionam com os fenômenos físicos que a onda sofre. Do ponto de vista prático, uma vez que se conheça a distribuição que será utilizada para modelar o canal, o comportamento específico da mesma depende dos valores dos seus parâmetros. Por este motivo, existe uma grande importância na estimação de parâmetros dentro de telecomunicações.

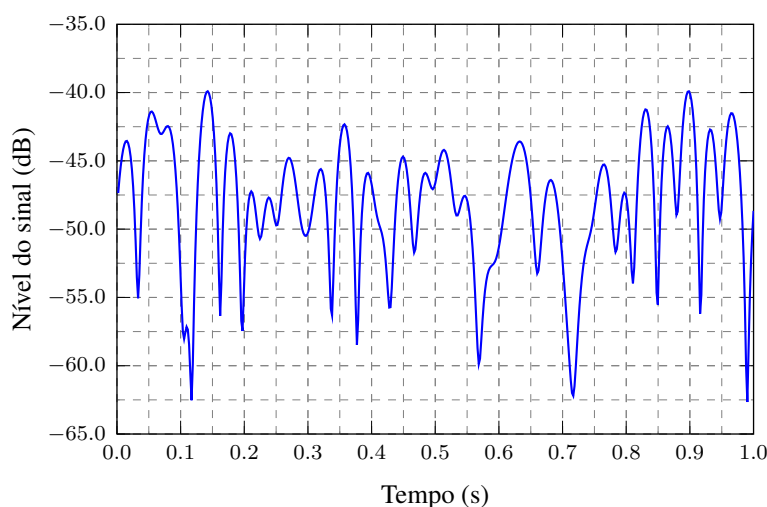


Figura 1.1: Comportamento instantâneo da envoltória do sinal que sofre desvanecimento em um ambiente sem fio.

Algumas aplicações podem ser citadas referente à estimação de parâmetros. Quando um modelo é definido e aplicado para um certo canal, é possível utilizar a estimação dos seus parâmetros para garantir que uma boa predição dos dados experimentais foi feita. Se é necessário implementar um sistema de comunicação, frequentemente é necessário conhecer o comportamento do canal. Uma vez que se sabe que a envoltória do sinal que se propaga pelo meio se comporta de acordo com uma dada distribuição, ainda é necessário conhecer os parâmetros que especificam este comportamento. Este processo é feito com o objetivo de minimizar os efeitos do canal para garantir qualidade e confiabilidade na comunicação. Além disso, os atributos físicos do ambiente de propagação estão relacionados aos valores dos parâmetros. Portanto, mudar as características físicas do sistema de comunicação leva a uma mudança nos valores dos parâmetros da distribuição que é utilizada para modelar o sinal naquele ambiente. Por exemplo, modificar a localização das antenas e suas alturas pode resultar em uma mudança nos valores dos parâmetros que modelam o canal. Neste caso, a estimação de parâmetros pode ser útil na otimização do sistema quando o mesmo está sendo implementado, como exigido por sistemas de comunicação com tecnologia 5G [11].

As distribuições generalizadas possuem um bom desempenho para caracterização do comportamento instantâneo da envoltória do sinal. Estas distribuições foram desenvolvidas com o objetivo de modelar com precisão as influências de canais com desvanecimento no sinal que se propaga pelos mesmos e, portanto, são capazes de abranger diversas características do meio ou do sistema de comunicação, como a presença ou não de linha de visada direta entre transmissor e receptor ou a ocorrência de múltiplos percursos. Vários estudos mostraram suas aplicações em cenários práticos e

comprovam sua capacidade de modelar o comportamento da envoltória do sinal, além de utilizá-las para outras aplicações em telecomunicações [12–31].

Vários estudos já foram realizados para estimar parâmetros de distribuições generalizadas. Os autores de [10] propuseram estimadores envolvendo os parâmetros das distribuições α - κ - μ e α - η - μ baseados no método dos momentos, mas a conclusão obtida a respeito do método foi que o mesmo sofre de falta de estabilidade nas raízes das equações. Em [21], foram feitas estimações pelo método da máxima verossimilhança para os parâmetros da distribuição κ - μ . Recentemente, em [32] foi proposto um novo estimador do parâmetro κ , da distribuição κ - μ , baseado em momentos. Este estimador depende simplesmente de uma média da envoltória normalizada e possui baixos erros de estimação. Os autores de [33] encontraram, pelo método dos momentos em unidades logarítmicas, estimadores para uma variedade de distribuições usadas para modelar desvanecimento rápido e somreamento em comunicações sem fio, como as distribuições Suzuki (Rayleigh-lognormal), Nakagami-lognormal, K (Rayleigh-gamma), K -generalizado (Nakagami-gamma) e α - μ (gamma generalizada).

1.1 Objetivos e Contribuições do Trabalho

Este trabalho tem como objetivo aplicar o método de estimação de máxima verossimilhança para estimar os valores dos parâmetros que caracterizam as distribuições generalizadas α - κ - μ e α - η - μ , ou seja, estimar o comportamento do sinal que se propaga pelo canal caracterizado por estas distribuições. O processo será feito a partir de amostras da envoltória normalizada de um sinal que se propaga por estes canais, geradas por meio de simulações.

1.2 Estrutura da Dissertação

Esta dissertação é organizada da seguinte forma: no Capítulo 2 será feita uma revisão sobre estimação de parâmetros, abordando o Método dos Momentos e o Método da Máxima Verossimilhança, que é o principal foco deste trabalho. As distribuições generalizadas que modelam o desvanecimento em curto prazo, α - κ - μ e α - η - μ , serão apresentadas no Capítulo 3, bem como suas estatísticas e casos particulares. No Capítulo 4 será deduzido o estimador de Máxima Verossimilhança para as distribuições previamente explicitadas, os métodos de geração de amostras utilizados serão descritos

e os resultados obtidos por meio de simulações serão analisados. Por fim, no Capítulo 5, as conclusões deste trabalho serão descritas.

1.3 Publicações

Os seguintes artigos foram produzidos como resultado das pesquisas relacionadas com este trabalho:

- ❶ **On the Maximum Likelihood Estimation for the η - μ Fading Channel.** *Vehicular Technology Conference (VTC2015 - Spring)*. Glasgow, Escócia, 11-14 de Maio. 2015.
- ❷ **Maximum Likelihood Estimator for the α - η - μ Fading Environment.** 2016 *IEEE Radio and Wireless Week (RWW2016)*. Aceito para publicação. Texas, Estados Unidos, 24-27 de Janeiro. 2016.
- ❸ **Maximum Likelihood Estimator for the α - κ - μ Fading Environment.** 2016 *IEEE Wireless Communications and Networking Conference (WCNC)*. Submetido em Setembro de 2015.

Capítulo 2

Estimação de Parâmetros

As variáveis aleatórias (VAs) possuem distribuições que evidenciam seus comportamentos. Estas distribuições possuem características ou combinações de características, os **parâmetros** das mesmas, que as determinam. Portanto, se é desejado saber o comportamento de uma variável aleatória, por exemplo, a envoltória instantânea de um sinal que sofre desvanecimento, é necessário conhecer sua distribuição e os valores dos parâmetros que a caracterizam.

O objetivo da **estimação de parâmetros** é encontrar quais são os valores dos parâmetros da distribuição de uma dada VA a partir de suas amostras e, dessa forma, caracterizá-la de maneira específica. Portanto, a estimação de parâmetros é feita para inferir os valores dos mesmos a partir de um grupo de valores observados da variável aleatória, as **amostras**.

Considere X_1, X_2, \dots, X_n um conjunto de n VAs que representam n observações de X , uma VA aleatória que segue uma distribuição qualquer e possui um parâmetro θ de valor desconhecido. Conhecendo apenas os dados observados e a distribuição que X segue, é desejado encontrar o valor do parâmetro θ . Um **estimador** dos parâmetros é definido como uma função das VAs que representam as amostras, $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$, obtido por meio de um método de estimação que tem como objetivo encontrar o valor exato do parâmetro. Uma **estimativa** é obtida quando se utiliza valores de amostras retiradas da população, ou seja, uma estimativa de θ é obtida por meio de $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Notar que a cada novo conjunto de n amostras retiradas da população, tem-se uma nova estimativa. Consequentemente, a estimativa por si só constitui-se uma variável aleatória passível de métricas tais como média e variância. Finalmente, o valor estimado do parâmetro é obtido a partir da média das estimati-

vas [34, 35].

Em relação a um estimador, $\hat{\Theta}$, relativo a um parâmetro θ de uma distribuição qualquer, de forma geral tem-se que [35]

$$\mathbb{E}[\hat{\Theta}] = \theta + b, \quad (2.1)$$

em que $\mathbb{E}[\cdot]$ é o operador esperança matemática, e b é chamado de polarização (*bias*) do estimador. Estimadores não polarizados são aqueles em que $b = 0$, ou seja, a sua média tende ao valor real do parâmetro. Por outro lado, estimadores polarizados possuem $b \neq 0$, apresentando um desvio da sua média em relação ao valor real do parâmetro.

Nas seções a seguir serão descritos dois métodos de estimação, o método dos momentos e o método da máxima verossimilhança, que são o foco deste trabalho. Além disso, a informação de Fisher e os intervalos de confiança, métricas utilizadas no estudo de estimadores de parâmetros, serão descritos e analisados.

2.1 Método dos Momentos

O método dos momentos para estimação de parâmetros de distribuições consiste em igualar os momentos amostrais aos momentos teóricos das VAs [35], ou seja,

$$\mathbb{E}[P^k] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \rho_i^k, \quad (2.2)$$

em que n é o número de amostras retiradas de um dado processo aleatório, k é a ordem do momento calculado e ρ_i corresponde a i -ésima amostra da variável aleatória P que, neste caso, é uma variável aleatória que segue uma distribuição qualquer que possui um conjunto de parâmetros $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_j$, e é desejado estimar os valores de um ou mais destes parâmetros. O primeiro membro de (2.2) resulta, então, em uma equação que possui um número de variáveis menor ou igual a j .

Para que se possa estimar o(s) parâmetro(s) desejado(s) é necessário resolver (2.2) para diferentes valores de k , cada um resultando em uma equação, até que se tenha um sistema de até j equações que possa ser resolvido para obter o(s) valor(es) do(s) parâmetro(s) que se deseja estimar. Em princípio não há qualquer restrição em relação às ordens dos momentos que serão utilizados, porém é preferível utilizar os de mais

baixa ordem possível, uma vez que resultarão em estimativas mais precisas [36].

Para exemplificar a estimação de parâmetros pelo método dos momentos, considere uma variável aleatória X de distribuição Gaussiana, cuja função densidade de probabilidade (FDP) é dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - m_X)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (2.3)$$

Os parâmetros que devem ser estimados são m_X , a média da VA Gaussiana, e σ^2 , a variância da VA Gaussiana. A partir de um conjunto de amostras X_1, X_2, \dots, X_n , para estimar os parâmetros m_X e σ^2 basta que sejam calculadas a média amostral, que é o primeiro momento, e a variância amostral, que constitui-se o segundo momento central, respectivamente [34]. São obtidos os seguintes estimadores

$$\hat{m}_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (2.4)$$

e

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{m}_X)^2 \quad (2.5)$$

que são estimadores não polarizados dos parâmetros da VA Gaussiana.

Considere agora R uma VA que segue uma distribuição Rayleigh. Sua FDP é dada por

$$f_R(r) = \frac{2r}{\Omega} \exp\left(-\frac{r^2}{\Omega}\right), r \geq 0. \quad (2.6)$$

Neste caso, o parâmetro a ser estimado é $\Omega = \mathbb{E}[R^2]$, a potência média do sinal Rayleigh. O estimador obtido pelo método dos momentos a partir de um conjunto de amostras R_1, R_2, \dots, R_n é [36]

$$\hat{\Omega} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i^2, \quad (2.7)$$

que é um estimador não polarizado do parâmetro Ω .

Estimadores obtidos pelo método dos momentos têm como principal vantagem a facilidade de se computar momentos em softwares de cálculo. Entretanto, para distribuições com expressões complexas de cálculo de momentos, há a dificuldade em resolver o sistema de equações resultante do método para estimar os parâmetros.

Como exemplo disto, considere agora P uma VA que segue uma distribuição α - κ - μ normalizada, cujos parâmetros que se deseja estimar são $\boldsymbol{\theta} = [\alpha \ \kappa \ \mu]$. Sua FDP é dada por [10]

$$f_P(\rho; \boldsymbol{\theta}) = \frac{\alpha \kappa^{\frac{1-\mu}{2}} (1 + \kappa)^{\frac{1+\mu}{2}} \mu \rho^{\frac{\alpha(1+\mu)}{2} - 1}}{\exp(\mu(\kappa + \rho^\alpha + \kappa \rho^\alpha))} I_{\mu-1} \left(2\sqrt{\kappa(1 + \kappa)} \mu \rho^{\frac{\alpha}{2}} \right), \quad (2.8)$$

em que $I_\nu(\cdot)$ é a função de Bessel modificada de primeiro tipo e ordem ν [37, Equação (9.6.20)], e seus momentos são dados por [10]

$$\mathbb{E}[P^t] = \frac{\Gamma\left(\frac{t}{\alpha} + \mu\right) {}_1F_1\left(\frac{t}{\alpha} + \mu, \mu, \kappa\mu\right)}{\exp(\kappa\mu) (1 + \kappa)^{\frac{t}{\alpha}} \mu^{\frac{t}{\alpha}} \Gamma(\mu)}, \quad (2.9)$$

em que $\Gamma(\cdot)$ é a função Gama [37, Equação (6.1.1)] e ${}_1F_1(\cdot, \cdot, \cdot)$ é a função Hipergeométrica confluyente de Kummer [37, Equação (13.1.2)]. Para estimar os valores de α , κ e μ simultaneamente é necessário calcular (2.9) para três diferentes valores de t e igualá-los simultaneamente aos respectivos momentos amostrais. A resolução do sistema de equações resultante é tarefa árdua e, na maioria dos casos, não é possível encontrar expressões fechadas para os estimadores. Além disso, é comum que se encontre mais de uma solução possível e, neste caso, deve-se utilizar algum outro método, como comparar a FDP estimada ao histograma normalizado das amostras [38], para encontrar as estimativas.

Uma outra dificuldade que o método pode apresentar está relacionado com a piora no desempenho das estimações obtidas pelo método dos momentos ao se usar momentos de ordem mais alta, o que pode ser necessário dependendo das características da distribuição [36].

2.2 Método da Máxima Verossimilhança

O método da máxima verossimilhança é uma técnica de estimação de parâmetros consolidada dentro da estatística [34], pois seus estimadores possuem características que evidenciam um bom desempenho. Estas características serão apresentadas ao final desta seção.

O método de máxima verossimilhança consiste em encontrar o conjunto de parâmetros que maximiza a função de verossimilhança das amostras da população. A função de verossimilhança consiste na função densidade de probabilidade conjunta das VAs

que representam as amostras [34]. Para a aplicação do método, basta que se conheça a expressão da função densidade de probabilidade da variável aleatória da qual se quer estimar os parâmetros, uma vez que se considera as amostras como sendo variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Nesta seção a aplicação do método será descrita.

Considere um conjunto de n variáveis aleatórias que representam amostras de uma distribuição qualquer descritas no vetor $\mathbf{P} = [P_1 \ P_2 \ \cdots \ P_n]$. A partir destas variáveis, é possível escrever uma FDP conjunta $f_{\mathbf{P}}(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n; \boldsymbol{\theta})$ em que $\boldsymbol{\theta} \triangleq [\theta_1 \ \theta_2 \ \cdots \ \theta_j]$ é o vetor de parâmetros da distribuição. Admitindo que P_1, P_2, \dots, P_n são VAs independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.), obtém-se

$$f_{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\rho}; \boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^n f_P(\rho_i; \boldsymbol{\theta}), \quad (2.10)$$

sendo $f_P(\rho_i; \boldsymbol{\theta})$ a FDP marginal com $i = 1, 2, \dots, n$ e $\boldsymbol{\rho} = [\rho_1 \ \rho_2 \ \cdots \ \rho_n]$. A equação (2.10) é também chamada de função de verossimilhança. O estimador de Máxima Verossimilhança (ML - *Maximum Likelihood*), $\hat{\boldsymbol{\Theta}} \triangleq [\hat{\Theta}_1 \ \hat{\Theta}_2 \ \cdots \ \hat{\Theta}_j]$, é o conjunto de valores $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_n$ dos parâmetros que maximiza (2.10), ou seja, o método ML consiste em maximizar a função de verossimilhança [34, 35].

Considerando agora o logaritmo natural de (2.10), e como o logaritmo de um produto se transforma em soma de logaritmos, obtém-se a função de log-verossimilhança da distribuição, dada por

$$L(\boldsymbol{\rho}; \boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \ln [f_{\mathbf{P}}(\rho_i; \boldsymbol{\theta})]. \quad (2.11)$$

Como os valores dos parâmetros que maximizam (2.10) também maximizam (2.11), é mais comum que seja utilizada a função de log-verossimilhança para realizar a estimação, por ser uma função de manipulação mais simples.

Com o objetivo de encontrar quais são os valores dos parâmetros que, em conjunto, maximizam (2.11), é necessário realizar a derivada da função de log-verossimilhança em relação a cada um dos parâmetros e igualar os resultados simultaneamente a 0, ou seja

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\rho}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_k} = 0, \quad (2.12)$$

para $k = 1, 2, \dots, j$. Assim, um sistema de j equações e $j < n$ variáveis é criado e a sua solução é o vetor de parâmetros estimados $\hat{\boldsymbol{\Theta}}$.

Com o objetivo de exemplificar o processo descrito anteriormente, o método ML será aplicado à distribuição Rayleigh. A função de verossimilhança da envoltória Rayleigh, utilizando (2.6) e (2.10), será dada por

$$f_R(\mathbf{r}; \boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^n \frac{2r_i}{\Omega} \exp\left(-\frac{r_i^2}{\Omega}\right), r_i \geq 0, \quad (2.13)$$

com $\boldsymbol{\theta}$ sendo, neste caso, um vetor unidimensional igual a Ω . Tomando o logaritmo natural de (2.13), obtém-se a função de log-verossimilhança desta distribuição, dada por

$$L(\mathbf{r}; \boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{2r_i}{\Omega}\right) - \frac{1}{\Omega} \sum_{i=1}^n r_i^2. \quad (2.14)$$

Para encontrar um estimador ML para Ω da distribuição Rayleigh, é necessário maximizar (2.14) em relação ao parâmetro, ou seja, tomar a derivada da função de log-verossimilhança de R em relação a Ω , que resulta em

$$\frac{\partial L(\mathbf{r}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \Omega} = -\frac{n}{\Omega} + \frac{1}{\Omega^2} \sum_{i=1}^n r_i^2. \quad (2.15)$$

O próximo passo é igualar (2.15) a 0, de onde se obtém que o estimador ML para o parâmetro Ω , denotado por $\hat{\Omega}$, é dado por

$$\hat{\Omega} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i^2. \quad (2.16)$$

Conclui-se que o estimador ML do parâmetro Ω da distribuição de Rayleigh, que é de fato o segundo momento populacional, é o segundo momento amostral. Neste caso os estimadores de Ω obtidos pelo método dos momentos e pelo método da máxima verossimilhança são iguais.

Considerando agora uma variável aleatória Gaussiana. A função de log-verossimilhança, obtida por intermédio de (2.3) e (2.11) para esta distribuição é

$$L(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) = n \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m_X)^2. \quad (2.17)$$

Neste caso, $\boldsymbol{\theta} = [m_X \ \sigma]$ é o vetor de parâmetros que se deseja estimar. Tomando as derivadas de (2.17) em relação aos dois parâmetros, obtém-se

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial m_X} = \frac{1}{\sigma^2} \left(-nm_X + \sum_{i=1}^n x_i - nm_X \right) \quad (2.18)$$

e

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n (x_i - m_X)^2. \quad (2.19)$$

Igualando (2.18) e (2.19) simultaneamente a 0, obtém-se os estimadores ML \hat{m}_X e $\hat{\sigma}^2$, dados por

$$\hat{m}_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (2.20)$$

que é a média amostral da VA, e

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{m}_X)^2. \quad (2.21)$$

Comparando os estimadores obtidos por meio do método dos momentos com os estimadores ML dos parâmetros de uma distribuição Gaussiana, é possível observar que os estimadores de m_X são dados pela mesma expressão. Quanto ao parâmetro σ , o estimador obtido pelo método dos momentos é não polarizado e o estimador ML é polarizado. Entretanto, para um grande número de amostras o estimador obtido em (2.21) tende a não apresentar polarização, o que é uma característica de estimadores ML [34] que será descrita adiante neste trabalho.

É importante citar que, além de igualar as derivadas da função de log-verossimilhança em relação aos parâmetros simultaneamente a 0, é necessário garantir que os valores encontrados serão correspondentes a um ponto de máximo da função. Isso pode ser feito por meio das derivadas segundas, que devem ser menores que 0, no caso de distribuições de um parâmetro. No caso de distribuições com mais de um parâmetro, deve-se calcular a matriz Hessiana da função de log-verossimilhança que deve ser definida negativa [36].

Para o caso de distribuições cujas expressões sejam mais elaboradas ou que contenham um número maior de parâmetros, estimar os mesmos algebricamente pode ser mais complexo. Com base nisto, muitas vezes é necessário utilizar um método numérico em (2.12), ou um algoritmo de otimização para encontrar o valor máximo de (2.11) para estimar $\boldsymbol{\theta}$.

O método ML possui propriedades que tornam seu uso interessante na estimação de parâmetros [34, 35]. Todas elas estão relacionadas ao comportamento assintótico dos estimadores ML, isto é, para grandes valores de n . As propriedades são [34]:

1. Os estimadores obtidos pelo método da máxima verossimilhança são assintotica-

mente não polarizados, ou seja, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} [\hat{\Theta}] = \theta$. Estimadores assintoticamente não polarizados podem ser classificados como consistentes.

2. Estimadores ML possuem, assintoticamente, distribuição Gaussiana de média θ , o valor real do parâmetro, e com uma variância associada ao estimador, $\mathbb{V}[\hat{\Theta}]$, sendo $\mathbb{V}[\cdot]$ o operador variância.
3. Um valor mínimo para a variância de um estimador pode ser encontrado por um limitante inferior, que será descrito na Seção 2.3. Os estimadores ML alcançam a mínima variância possível quando $n \rightarrow \infty$. Esta característica faz com que eles sejam classificados como estimadores eficientes.

2.3 Informação de Fisher

A variância de um estimador é a medida da incerteza em torno da estimativa do parâmetro. Trata-se de uma medida importante, uma vez que ela se relaciona diretamente com a eficiência do estimador. Para qualquer estimador não polarizado que atenda à alguns critérios de regularidade verificadas em [35, 39], um valor mínimo para a sua variância é determinado pelo Limitante Inferior de Crámer-Rao (CRLB - *Crámer-Rao Lower Bound*) [36] dado por

$$\mathbb{V} [\hat{\Theta}] \geq \frac{1}{\mathbb{E} \left[\left(\frac{\partial L(\boldsymbol{\rho}; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right]} = \frac{1}{-\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\rho}; \theta)}{\partial \theta^2} \right]}. \quad (2.22)$$

Com o objetivo de provas a relação entre os denominadores de (2.22), de acordo com [34],

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\frac{\partial \ln f_{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\rho}; \theta)}{\partial \theta} \right] &= 0 \\ \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \left(\frac{\partial \ln f_{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\rho}; \theta)}{\partial \theta} \right) f_{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\rho}; \theta) d\rho_1 \cdots d\rho_n &= 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Tomando a derivada de (2.23) em relação a θ , obtém-se

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \left[\frac{\partial^2 \ln f_{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\rho}; \theta)}{\partial \theta^2} f_{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\rho}; \theta) + \frac{\partial \ln f_{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\rho}; \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial f_{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\rho}; \theta)}{\partial \theta} \right] d\rho_1 \cdots d\rho_n = 0. \quad (2.24)$$

Finalmente, utilizando a relação [34]

$$\frac{\partial f_{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\rho}; \theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial \ln f_{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\rho}; \theta)}{\partial \theta} f_{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\rho}; \theta) \quad (2.25)$$

em (2.24), resulta

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\frac{\partial L(\boldsymbol{\rho}; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right] + \mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\rho}; \theta)}{\partial \theta^2} \right] &= 0 \\ \mathbb{E} \left[\left(\frac{\partial L(\boldsymbol{\rho}; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right] &= -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\rho}; \theta)}{\partial \theta^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.26)$$

O denominador em (2.22) é chamado de Informação de Fisher [35], $I_n(\theta)$, do parâmetro e representa a quantidade de informação que um estimador pode conter sobre um determinado parâmetro a ser estimado em um conjunto de n amostras aleatórias. Daí, vem

$$I_n(\theta) = \mathbb{E} \left[\left(\frac{\partial L(\boldsymbol{\rho}; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right] = -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\rho}; \theta)}{\partial \theta^2} \right]. \quad (2.27)$$

Como as variáveis aleatórias P_1, P_2, \dots, P_n foram consideradas como i.i.d.,

$$\mathbb{E} \left[\left(\frac{\partial L(\boldsymbol{\rho}; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[\left(\frac{\partial \ln f_P(\rho_i; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right] = nI(\theta), \quad (2.28)$$

em que $I(\theta)$ é a informação de Fisher contida em apenas uma VA correspondente a uma amostra, ρ_i , e $\ln f_P(\rho_i; \theta)$ é o logaritmo natural da FDP de uma das VAs.

No caso de múltiplos parâmetros, a informação de Fisher é representada por uma matriz quadrada de ordem j , que é o número de parâmetros a serem estimados, cujos elementos são dados por

$$\begin{aligned} [\mathbf{I}_n(\boldsymbol{\theta})]_{kl} &= \mathbb{E} \left[\left(\frac{\partial L(\boldsymbol{\rho}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_k} \right) \left(\frac{\partial L(\boldsymbol{\rho}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_l} \right) \right] \\ &= n \mathbb{E} \left[\left(\frac{\partial \ln f_P(\rho_i; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_k} \right) \left(\frac{\partial \ln f_P(\rho_i; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_l} \right) \right] = n [\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]_{kl} \end{aligned} \quad (2.29)$$

com $k, l = 1, 2, \dots, j$. O CRLB resulta em uma matriz de covariância dos estimadores dos parâmetros dada por $\mathbf{K}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} \geq \mathbf{I}_n^{-1}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{n} \mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$, em que $(\cdot)^{-1}$ denota a matriz inversa. Portanto, o elemento $[\mathbf{K}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}]_{kl}$ representa a mínima covariância entre o k -ésimo estimador e o l -ésimo estimador, para $k \neq l$, ou a variância do k -ésimo estimador para

$k = l$. Se é necessário encontrar a mínima variância de um parâmetro específico de uma distribuição com múltiplos parâmetros, deve-se então utilizar a relação

$$\mathbb{V}[\hat{\Theta}_k] \geq \frac{1}{n} [\mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})]_{kk}. \quad (2.30)$$

2.4 Intervalo de Confiança

Considere agora uma distribuição com múltiplos parâmetros. Um intervalo de confiança em relação a um estimador de um destes parâmetros é um intervalo que contenha o valor real do parâmetro com uma dada probabilidade [34, 36]. Para determinar qualquer intervalo de confiança, é desejável que se conheça a distribuição do estimador do parâmetro. Das características de um estimador ML, pode-se afirmar que $\hat{\Theta}$ possui um comportamento assintoticamente Gaussiano [34], com vetor de médias $\boldsymbol{\theta}$ e uma matriz de covariância com elementos diagonais correspondentes às suas variâncias, $\mathbb{V}[\hat{\Theta}_1], \mathbb{V}[\hat{\Theta}_2], \dots, \mathbb{V}[\hat{\Theta}_j]$, ou seja, quando $n \rightarrow \infty$,

$$\frac{\hat{\Theta} - \boldsymbol{\theta}}{\sqrt{\mathbb{V}[\hat{\Theta}]}} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1), \quad (2.31)$$

em que $\mathcal{N}(0, 1)$ denota uma VA Gaussiana de média nula e variância unitária.

A probabilidade de se encontrar o valor real do parâmetro dentro do intervalo de confiança é definido como nível de confiança. Para os estimadores ML, que possuem distribuição Gaussiana quando um grande número de amostras é usado, pode-se calcular diretamente um intervalo de confiança uma vez que o nível de confiança é estabelecido.

Especificamente para um estimador ML com nível de confiança 95%, o intervalo de confiança é o intervalo em torno da média cuja área abaixo da curva da FDP Gaussiana representa 95% da área total abaixo da mesma. Este nível de confiança corresponde a aproximadamente 1,96 desvios padrões à direita e à esquerda da média da Gaussiana, ou seja, o intervalo de confiança é [34]

$$\left[\hat{\Theta}_i - 1.96\sqrt{\mathbb{V}[\hat{\Theta}_i]}, \hat{\Theta}_i + 1.96\sqrt{\mathbb{V}[\hat{\Theta}_i]} \right]. \quad (2.32)$$

A Figura 2.1 mostra este intervalo na FDP de uma variável aleatória Gaussiana X , com média $\mathbb{E}[X]$ e variância σ_X^2 arbitrárias.

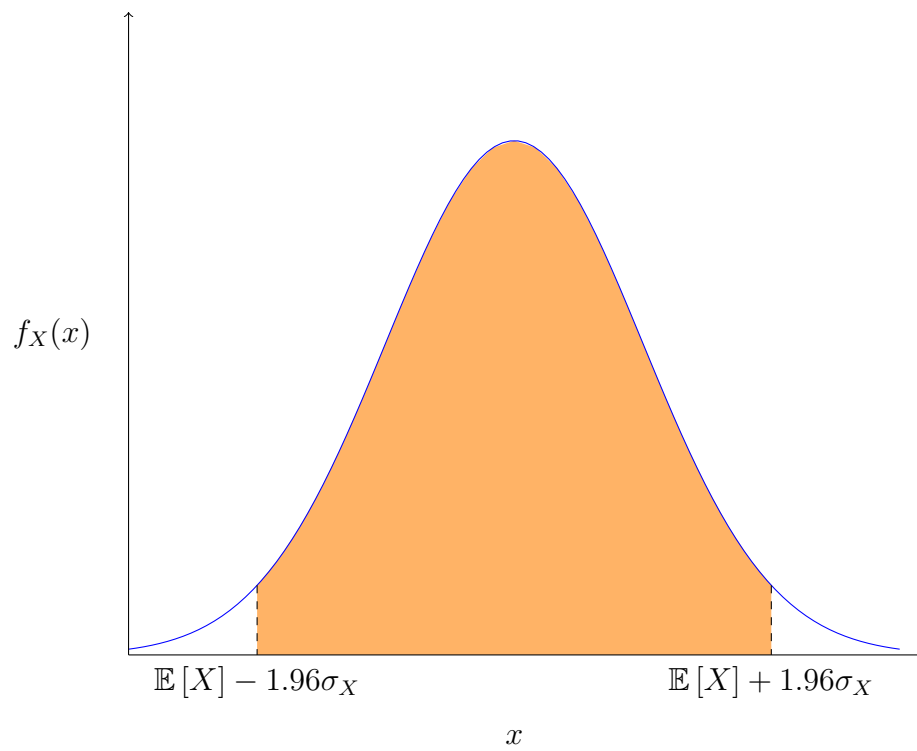


Figura 2.1: Intervalo de valores da Gaussiana cuja área abaixo da curva corresponde a 95% da área total.

Capítulo 3

As Distribuições α - κ - μ e α - η - μ

O sinal que transporta a informação no canal rádio-móvel é degradado durante a sua propagação entre o transmissor e o receptor. Isso ocorre devido aos fenômenos de propagação que a onda eletromagnética sofre ao trafegar neste tipo de meio. Estes fenômenos causam efeitos como os múltiplos percursos, que faz com que componentes do sinal cheguem no receptor provenientes de caminhos diferentes em instantes diferentes e com fases e níveis diferentes. As interferências entre estas componentes levam a degradação no nível instantâneo do sinal. Este efeito associado ao efeito Doppler leva ao desvanecimento de curto prazo no nível do sinal [2].

O desvanecimento de curto prazo faz com que o sinal tenha comportamento estocástico e, por isso, os modelos utilizados devem ser probabilísticos [2]. Dentre os modelos consolidados, pode-se citar Rayleigh, Rice, Hoyt, Nakagami- m , α - μ , κ - μ , η - μ e os modelos mais generalizados, que englobam todos os previamente citados, α - κ - μ e α - η - μ [10].

Os efeitos sofridos pelo sinal na sua propagação pelo canal rádio-móvel causam os múltiplos percursos no sinal. O campo de espalhamento, isto é, o ambiente pelo qual o sinal se propaga, é considerado homogêneo quando se considera as seguintes características: grande número de ondas parciais com amplitudes idênticas, correlação entre as diferentes ondas parciais nula e entre a fase e a amplitude de uma única onda parcial também nula e distribuição de fase homogênea no intervalo $[0, 2\pi]$ [40]. Para distribuições generalizadas, como a α - κ - μ e a α - η - μ , o ambiente é considerado não homogêneo [10].

Os fenômenos de propagação que a onda transmitida sofre no ambiente sem fio faz com que sejam criadas várias versões do sinal originalmente transmitido, provenientes

dos múltiplos percursos. Estas versões são chamadas de ondas parciais [40]. As ondas parciais chegam no receptor e se combinam, podendo ou não haver uma componente com potência predominante correspondente a uma linha de visada direta entre transmissor e receptor. Nas distribuições generalizadas, cada conjunto de ondas parciais que possuem atrasos temporais semelhantes é denominado *cluster* e entre *clusters* admite-se que os atrasos temporais das ondas parciais são relativamente grandes. Dentro de cada *cluster* é possível que se tenha uma componente dominante [2].

Neste capítulo, as distribuições α - κ - μ e α - η - μ serão descritas, bem como suas estatísticas e as distribuições que podem ser obtidas por meio delas como casos particulares.

3.1 A Distribuição α - κ - μ

A distribuição α - κ - μ é utilizada para modelar o sinal que se propaga por canais com linha-de-visada direta (LOS - *line-of-sight*) e leva em conta os múltiplos percursos e a não-linearidade do canal. A envoltória de um sinal α - κ - μ pode ser descrita por

$$R = \sqrt[\alpha]{\sum_{i=1}^{\mu} (X_i + p_i)^2 + (Y_i + q_i)^2}, \quad (3.1)$$

em que R representa a envoltória do sinal, X_i e Y_i são VAs Gaussianas de média nula e variâncias $\mathbb{V}[X_i] = \mathbb{V}[Y_i] = \sigma^2$, p_i e q_i são as médias das componentes em fase e quadratura, respectivamente, e μ é o número de *clusters* provenientes dos múltiplos percursos. Apesar da envoltória da distribuição ser função de um somatório, para a distribuição é possível que o parâmetro μ admita quaisquer valores reais.

O parâmetro $\alpha > 0$ tem como função modelar a não-linearidade do canal de comunicação. O parâmetro $\kappa \geq 0$ é definido como a relação entre a potência total da componente dominante e a potência total das componentes espalhadas. É possível encontrá-lo usando [10]

$$\kappa = \frac{\sum_{i=1}^{\mu} (p_i^2 + q_i^2)}{2\mu\sigma^2}. \quad (3.2)$$

3.1.1 Principais Estatísticas

Partindo de (3.1) e fazendo uma normalização da envoltória, R , do sinal no ambiente $\alpha\text{-}\kappa\text{-}\mu$, da forma $P = \frac{R}{\sqrt{\mathbb{E}[R^2]}}$, em que P representa a envoltória normalizada, é possível obter a FDP, dada por (2.8), apresentada na Seção 2.1.

Os momentos da envoltória normalizada $\alpha\text{-}\kappa\text{-}\mu$ podem ser obtidos por meio da Equação (2.9), apresentada na Seção 2.1.

Para encontrar a função de distribuição cumulativa (FDC) da envoltória $\alpha\text{-}\kappa\text{-}\mu$ normalizada, é necessário tomar a integral de (2.8), na forma $F_P(\rho; \boldsymbol{\theta}) = \int_0^\rho f_P(x; \boldsymbol{\theta}) dx$ que, expandindo em séries, resulta em [10]

$$F_P(\rho; \boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\kappa^i \mu^i \Gamma(i + \mu, (1 + \kappa) \mu \rho^\alpha)}{i! \exp(\kappa \mu) \Gamma(i + \mu)}, \quad (3.3)$$

sendo $\Gamma(\cdot, \cdot)$ a função Gama incompleta [37, Equação (6.5.3)]. Alternativamente, pode-se utilizar [10]

$$F_P(\rho; \boldsymbol{\theta}) = 1 - Q_u\left(\sqrt{2\mu\kappa}, \rho^{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{2\mu(1 + \kappa)}\right), \quad (3.4)$$

com

$$Q_u(a, b) = \int_b^\infty x \left(\frac{x}{a}\right)^{u-1} \exp\left(-\frac{x^2 + a^2}{2}\right) I_{u-1}(ax) dx \quad (3.5)$$

sendo a função Q-Marcum [41, Equação (4.10)].

3.1.2 Casos Particulares

Como citado anteriormente, a distribuição $\alpha\text{-}\kappa\text{-}\mu$ é uma distribuição generalizada usada para modelar ambientes com desvanecimento de curto prazo. Utilizando alguns valores específicos de seus parâmetros em (3.1) e, conseqüentemente, nas estatísticas descritas na Seção 3.1.1, é possível obter casos particulares da mesma, resultando em outras distribuições conhecidas.

Da distribuição $\alpha\text{-}\kappa\text{-}\mu$ com $\alpha = 2$ obtém-se a distribuição $\kappa\text{-}\mu$. A partir da $\kappa\text{-}\mu$ com $\kappa \rightarrow 0$ o resultado é a distribuição Nakagami- m . Fazendo $m = 1$ na distribuição Nakagami- m obtém-se a distribuição Rayleigh. A partir da distribuição $\kappa\text{-}\mu$, fazendo $\mu = 1$ é obtida a distribuição de Rice, que possui parâmetro K equivalente ao κ e com mesmo significado físico. A partir da distribuição Rice, se $K \rightarrow 0$, obtém-se a distri-

buição Rayleigh. Partindo novamente da distribuição α - κ - μ , obtém-se a distribuição α - μ ajustando-se $\kappa \rightarrow 0$ e, a partir da distribuição α - μ , fazendo $\mu = 1$ o resultado é a distribuição de Weibull [10]. Com $\alpha = 2$ na distribuição α - μ é obtida a distribuição Nakagami- m . A Figura 3.1 ilustra os casos particulares citados e como obtê-los.

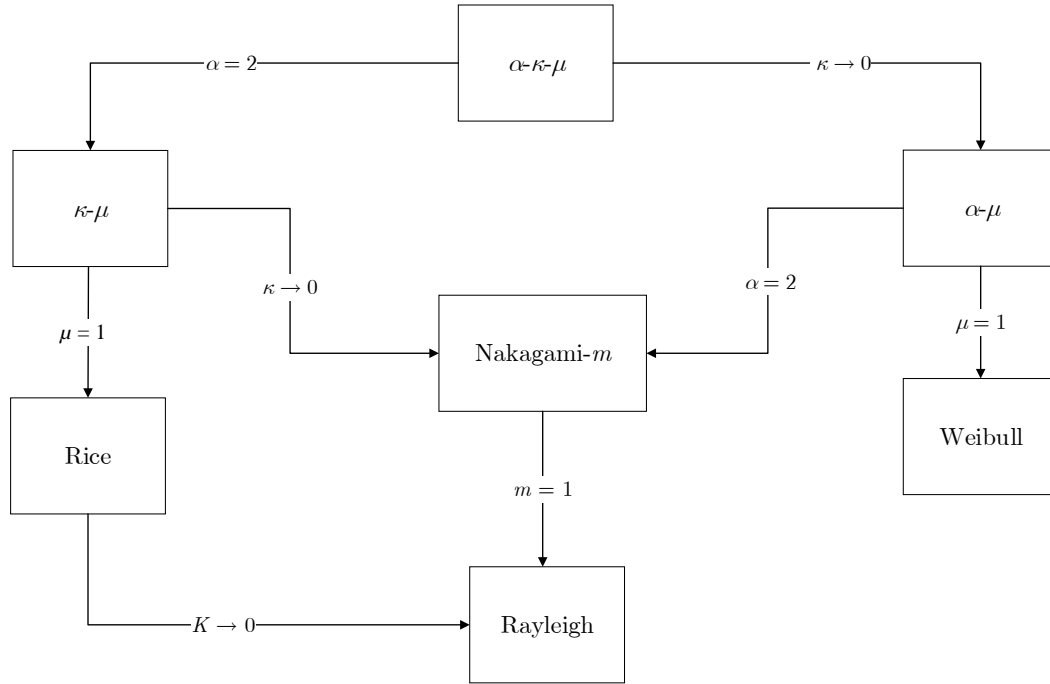


Figura 3.1: Casos particulares da distribuição α - κ - μ .

3.2 A Distribuição α - η - μ

A distribuição α - η - μ modela um sinal que se propaga em um meio não-linear, sem LOS, com múltiplos percursos e com a presença de um desbalanceamento entre as componentes em fase e quadratura, resultando em valores diferentes para as variâncias das mesmas. A envoltória do sinal em um ambiente α - η - μ é definida como

$$R = \sqrt{\alpha \sum_{i=1}^{2\mu} X_i^2 + Y_i^2}. \quad (3.6)$$

Neste caso, X_i e Y_i são as componentes em fase e quadratura, sendo estas VAs Gaussianas de média nula e variâncias $\mathbb{V}[X_i] = \sigma_X^2$ e $\mathbb{V}[Y_i] = \sigma_Y^2$.

Os parâmetros $\alpha > 0$ e $\mu > 0$ são, assim como na distribuição α - κ - μ , o fator

de não-linearidade do canal e a extensão real do número de *clusters*. Por sua vez, o parâmetro $\eta > 0$ é definido como a relação entre as variâncias da componente em fase e da componente em quadratura, da forma

$$\eta = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}. \quad (3.7)$$

Devido à definição do parâmetro η , é importante notar uma característica de simetria da distribuição em torno de $\eta = 1$. Isso significa que a distribuição tem o mesmo comportamento para um dado valor de η e para seu valor inverso [10].

3.2.1 Principais Estatísticas

Realizando novamente uma normalização da envoltória R dada em (3.6), ou seja, $P = \frac{R}{\sqrt[\alpha]{\mathbb{E}[R^\alpha]}}$, é possível obter a FDP da envoltória normalizada para a distribuição α - η - μ [10],

$$\begin{aligned} f_P(\rho; \boldsymbol{\theta}) &= \frac{\alpha (\eta - 1)^{\frac{1}{2}-\mu} (\eta + 1)^{\frac{1}{2}+\mu} \rho^{\alpha(\frac{1}{2}+\mu)-1}}{\exp\left(\frac{(1+\eta)^2 \mu \rho^\alpha}{2\eta}\right) \Gamma(\mu) \sqrt{\eta}} \\ &\quad \times \sqrt{\pi} \mu^{\frac{1}{2}+\mu} I_{\mu-\frac{1}{2}}\left(\frac{(\eta^2 - 1) \mu \rho^\alpha}{2\eta}\right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Para esta distribuição, é possível encontrar o t -ésimo momento da envoltória normalizada por meio de

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[P^t] &= \frac{2^{\frac{t}{\alpha}+2\mu} \eta^{\frac{t}{\alpha}+\mu} (1+\eta)^{-2(\frac{t}{\alpha}+\mu)} \Gamma\left(\frac{t}{\alpha} + 2\mu\right)}{\mu^{\frac{t}{\alpha}} \Gamma(2\mu)} \\ &\quad \times {}_2F_1\left(\frac{t}{2\alpha} + \mu, \frac{t+\alpha}{2\alpha} + \mu, \frac{1}{2} + \mu, \frac{(\eta-1)^2}{(\eta+1)^2}\right), \end{aligned} \quad (3.9)$$

com ${}_2F_1(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ sendo a Função Hipergeométrica de Gauss [37, Equação (15.1.1)].

Para encontrar a FDC α - η - μ basta integrar a FDP na forma $F_P(\rho; \boldsymbol{\theta}) = \int_0^\rho f_P(x; \boldsymbol{\theta}) dx$.

O resultado pode ser escrito por intermédio de uma série infinita [10],

$$F_P(\rho; \boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^{1-2i} \sqrt{\pi} (\eta - 1)^{2i} \eta^\mu (\eta + 1)^{-2i-2\mu}}{i! \Gamma(\mu) \Gamma\left(\frac{1}{2} + i + \mu\right)} \times \Gamma\left(2(i + \mu), \frac{\rho^\alpha (1 + \eta)^2 \mu}{2\eta}\right), \quad (3.10)$$

ou, alternativamente,

$$F_P(\rho; \boldsymbol{\theta}) = 1 - Y_\mu\left(\frac{1 - \eta}{1 + \eta}, (1 + \eta) \sqrt{\frac{\mu}{2\eta}} \rho^{\frac{\alpha}{2}}\right), \quad (3.11)$$

em que a função $Y_\nu(a, b)$ é definida como [10, Equação (5)]

$$Y_\nu(a, b) = \frac{2^{\frac{2}{3}-\nu} (1 - a^2)^\nu \sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu) a^{\nu-\frac{1}{2}}} \int_b^\infty x^{2\nu} \exp(-x^2) I_{\nu-\frac{1}{2}}(ax^2) dx. \quad (3.12)$$

3.2.2 Casos Particulares

Assim como a distribuição α - κ - μ , a distribuição α - η - μ é uma distribuição generalizada, ou seja, para alguns conjuntos de valores de seus parâmetros, pode-se obter outras distribuições que também são usadas na modelagem do desvanecimento em pequena escala como casos particulares.

Para $\alpha = 2$ na distribuição α - η - μ , obtém-se a distribuição η - μ . Para esta distribuição, o parâmetro η pode ter dois diferentes significados. Na distribuição η - μ no Formato 1, η é definido como a razão entre as variâncias da componente em fase e da componente em quadratura, da mesma forma que na distribuição α - η - μ . No Formato 2, considera-se que as componentes em fase e quadratura são correlacionadas e, neste caso, η é o coeficiente de correlação entre elas. Os estimadores de parâmetros para a distribuição η - μ foram os primeiros desenvolvidos no andamento deste trabalho.

A FDP da envoltória η - μ é dada por [9]

$$f_P(\rho; \boldsymbol{\theta}) = \frac{4\sqrt{\pi} \mu^{\mu+\frac{1}{2}} h^\mu \rho^{2\mu}}{\Gamma(\mu) H^{\mu-\frac{1}{2}} \exp(2\mu h \rho^2)} I_{\mu-\frac{1}{2}}(2\mu H \rho^2), \quad (3.13)$$

sendo os parâmetros $h = (\eta + 1)^2 / (4\eta)$ e $H = (1 - \eta^2) / (4\eta)$, considerando o Formato 1. Para o Formato 2, $h = 1 / (1 - \eta^2)$ e $H = \eta / (1 - \eta^2)$. Os momentos da

distribuição η - μ podem ser obtidos por meio de

$$\mathbb{E} [P^t] = \frac{\Gamma(2\mu + \frac{t}{2})}{h^{\mu + \frac{t}{2}} (2\mu)^{\frac{t}{2}} \Gamma(2\mu)} {}_2F_1 \left[\mu + \frac{t}{4} + \frac{1}{2}, \mu + \frac{t}{4}, \mu + \frac{1}{2}, \left(\frac{H}{h}\right)^2 \right], \quad (3.14)$$

e sua FDC é

$$F_P(\rho) = 1 - Y_\mu \left(\frac{H}{h}, \sqrt{2h\mu\rho} \right). \quad (3.15)$$

Tomando a distribuição η - μ no Formato 1 é possível obter as distribuição Nakagami- m fazendo $\eta = 1$. Neste caso, o parâmetro μ é trocado por m de acordo com a relação $m = 2\mu$. A distribuição Hoyt é obtida da η - μ fazendo $\mu = 0.5$. No caso da distribuição de Hoyt, o parâmetro q substitui η , sendo equivalente a ele e possuindo o mesmo significado físico. Com $q = 1$ na distribuição Hoyt ou $m = 1$ na distribuição Nakagami- m , obtém-se a distribuição Rayleigh. Partindo novamente da distribuição α - η - μ , obtém-se a distribuição α - μ fazendo $\eta = 1$. A distribuição α - μ com $\mu = 1$ se torna a distribuição Weibull e com $\alpha = 2$ uma VA α - μ passa a ter uma distribuição Nakagami- m . A Figura 3.2 ilustra os casos particulares da distribuição α - η - μ .

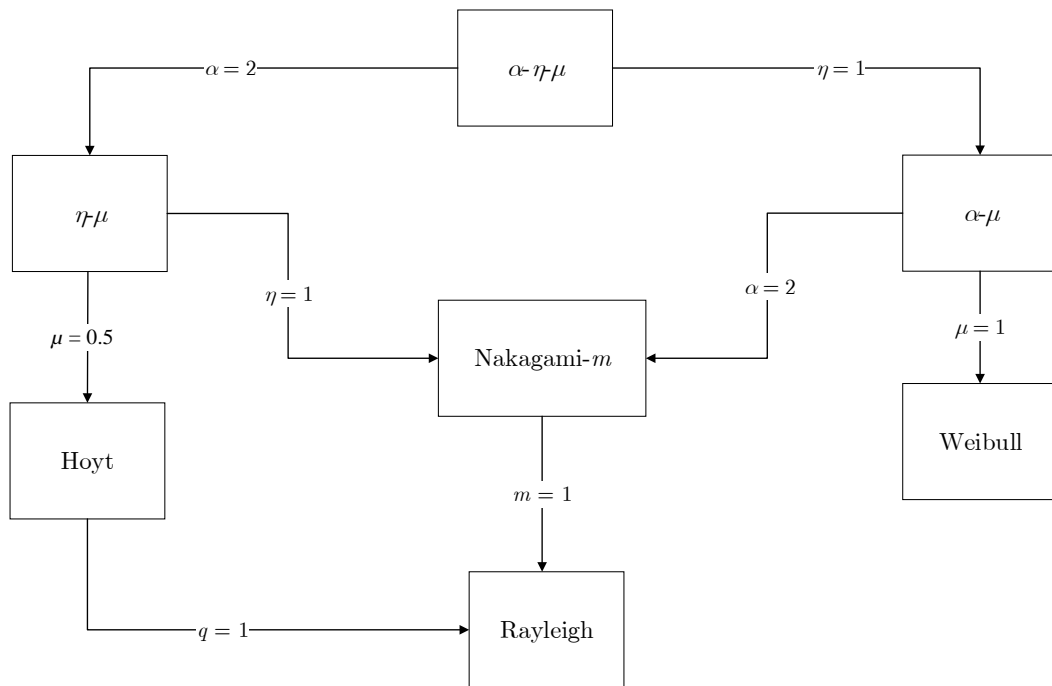


Figura 3.2: Casos particulares da distribuição α - η - μ .

Capítulo 4

Estimador de Máxima

Verossimilhança para as Distribuições

α - κ - μ e α - η - μ

Neste capítulo o método será ML aplicado nas distribuições α - κ - μ e α - η - μ para encontrar os estimadores $\hat{\Theta} = [\hat{\alpha} \ \hat{\kappa} \ \hat{\mu}]$ e $\hat{\Theta} = [\hat{\alpha} \ \hat{\eta} \ \hat{\mu}]$, respectivamente, bem como as expressões desenvolvidas e a descrição do procedimento para estimar os parâmetros. Também serão descritos os métodos utilizados para a geração das amostras e os resultados obtidos para os estimadores, os intervalos de confiança, a informação de Fisher dos parâmetros e uma comparação entre algumas FDPs teóricas, geradas com os valores dos parâmetros utilizados para gerar as amostras, e as respectivas FDPs obtidas com os valores dos conjuntos de parâmetros estimados.

4.1 Estimadores para as Distribuições α - κ - μ e α - η - μ

Tomando n amostras i.i.d. de VAs α - κ - μ , é possível escrever uma função de log-verossimilhança para esta distribuição, utilizando (2.8) em (2.11), que resulta em

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\rho}; \boldsymbol{\theta}) = & n \left[\ln \left(\alpha \kappa^{\frac{1-\mu}{2}} (1 + \kappa)^{\frac{1+\mu}{2}} \mu \right) - \mu \kappa \right] + \left(\frac{\alpha(1 + \mu)}{2} - 1 \right) \sum_{i=1}^n \ln(\rho_i) \\ & - \mu(1 + \kappa) \sum_{i=1}^n \rho_i^\alpha + \sum_{i=1}^n \ln \left[I_{\mu-1} \left(2\sqrt{\kappa(1 + \kappa)} \mu \rho_i^{\frac{\alpha}{2}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Como descrito no Capítulo 2, para estimar os parâmetros é necessário maximizar (4.1). Utilizando as derivadas em relação aos três parâmetros, α , κ e μ , é necessário igualá-las simultaneamente a 0 para encontrar os estimadores. Fazendo o processo de derivação, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\boldsymbol{\rho}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha} &= \frac{n}{\alpha} + \frac{1+\mu}{2} \sum_{i=1}^n \ln(\rho_i) - (1+\kappa)\mu \sum_{i=1}^n \ln(\rho_i) \rho_i^\alpha + \frac{\sqrt{\kappa(1+\kappa)}\mu}{2} \\ &\times \sum_{i=1}^n \frac{\left[I_{\mu-2} \left(2\sqrt{\kappa(1+\kappa)}\mu\rho_i^\alpha \right) + I_\mu \left(2\sqrt{\kappa(1+\kappa)}\mu\rho_i^\alpha \right) \right] \ln(\rho_i)}{I_{\mu-1} \left(2\sqrt{\kappa(1+\kappa)}\mu\rho_i^\alpha \right)}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\boldsymbol{\rho}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \kappa} &= n \left(\frac{1-\mu}{2\kappa} + \frac{1+\mu}{2(1+\kappa)} - \mu \right) - \mu \sum_{i=1}^n \rho_i^\alpha + \frac{(1+2\kappa)\mu}{2\sqrt{\kappa(1+\kappa)}} \\ &\times \sum_{i=1}^n \frac{\left[I_{\mu-2} \left(2\sqrt{\kappa(1+\kappa)}\mu\rho_i^\alpha \right) + I_\mu \left(2\sqrt{\kappa(1+\kappa)}\mu\rho_i^\alpha \right) \right] \rho_i^{\frac{\alpha}{2}}}{I_{\mu-1} \left(2\sqrt{\kappa(1+\kappa)}\mu\rho_i^\alpha \right)} \end{aligned} \quad (4.3)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\boldsymbol{\rho}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \mu} &= n \left[\frac{1}{\mu} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\kappa}{\kappa} \right) - \kappa \right] + \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^n \ln(\rho_i) - (1+\kappa) \sum_{i=1}^n \rho_i^\alpha \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{\left[I_{\mu-2} \left(2\sqrt{\kappa(1+\kappa)}\mu\rho_i^\alpha \right) + I_\mu \left(2\sqrt{\kappa(1+\kappa)}\mu\rho_i^\alpha \right) \right] \sqrt{\kappa(1+\kappa)}}{I_{\mu-1} \left(2\sqrt{\kappa(1+\kappa)}\mu\rho_i^\alpha \right)} \\ &+ \frac{I_{\mu-1}^{1,0} \left(2\sqrt{\kappa(1+\kappa)}\mu\rho_i^\alpha \right)}{I_{\mu-1} \left(2\sqrt{\kappa(1+\kappa)}\mu\rho_i^\alpha \right)}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

com $I_\nu^{1,0}(z)$ sendo a derivada de $I_\nu(z)$ em relação a ordem, ν [37, Equação (9.6.42)], dada por

$$I_\nu^{(1,0)}(z) = I_\nu(z) \log \left(\frac{z}{2} \right) - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\psi_0(i+\nu+1)}{i! \Gamma(i+\nu+1)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2i+\nu}, \quad (4.5)$$

com

$$\psi_0(z) = \int_0^\infty \left(\frac{\exp(-t)}{t} - \frac{\exp(-zt)}{1-\exp(-t)} \right) dt \quad (4.6)$$

sendo a função Digamma [37, Equação (6.3.1)].

Da mesma forma, com n amostras i.i.d. de VAs α - η - μ , é possível obter a função

de log-verossimilhança para esta distribuição, utilizando (3.8) em (2.11), dada por

$$L(\boldsymbol{\rho}; \boldsymbol{\theta}) = n \ln \left(\frac{\alpha (\mu (\eta + 1))^{\frac{1}{2} + \mu} \sqrt{\pi}}{(\eta - 1)^{\mu - \frac{1}{2}} \Gamma(\mu) \sqrt{\eta}} \right) - \frac{(1 + \eta)^2 \mu}{2\eta} \sum_{i=1}^n \rho_i^\alpha + \left[\alpha \left(\frac{1}{2} + \mu \right) - 1 \right] \sum_{i=1}^n \ln(\rho_i) + \sum_{i=1}^n \ln \left[I_{\mu - \frac{1}{2}} \left(\frac{(\eta^2 - 1) \mu}{2\eta} \rho_i^\alpha \right) \right]. \quad (4.7)$$

Tomando as derivadas de (4.7) em relação aos três parâmetros, α , η e μ , com o objetivo de igualá-las a zero para maximizar (4.7), resultam

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\rho}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + \left(\frac{1}{2} + \mu \right) \sum_{i=1}^n \ln(\rho_i) - \frac{(1 + \eta^2) \mu}{2\eta} \sum_{i=1}^n \ln(\rho_i) \rho_i^\alpha + \sum_{i=1}^n \frac{I_{\mu - \frac{3}{2}} \left(\frac{(\eta^2 - 1) \mu}{2\eta} \rho_i^\alpha \right) + I_{\mu + \frac{1}{2}} \left(\frac{(\eta^2 - 1) \mu}{2\eta} \rho_i^\alpha \right)}{2I_{\mu - \frac{1}{2}} \left(\frac{(\eta^2 - 1) \mu}{2\eta} \rho_i^\alpha \right)} \left(\frac{(\eta^2 - 1) \mu}{2\eta} \rho_i^\alpha \right) \ln(\rho_i), \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\rho}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \eta} = n \left(\frac{1}{2} - \frac{2\eta^2 \mu + 1}{2\eta(\eta + 1)} \right) + \mu \frac{1 - \eta^2}{2\eta^2} \sum_{i=1}^n \rho_i^\alpha + \sum_{i=1}^n \frac{I_{\mu - \frac{3}{2}} \left(\frac{(\eta^2 - 1) \mu}{2\eta} \rho_i^\alpha \right) + I_{\mu + \frac{1}{2}} \left(\frac{(\eta^2 - 1) \mu}{2\eta} \rho_i^\alpha \right) \frac{\mu \rho_i^\alpha (\eta^2 + 1)}{2\eta^2}}{2I_{\mu - \frac{1}{2}} \left(\frac{(\eta^2 - 1) \mu}{2\eta} \rho_i^\alpha \right)} \quad (4.9)$$

e

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\rho}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \mu} = n \left[\ln \left(\frac{\mu (\eta + 1)}{\eta - 1} \right) + \frac{2\mu + 1}{2\mu} - \psi_0(\mu) \right] + \alpha \sum_{i=1}^n \ln(\rho_i) - \frac{(\eta + 1)^2}{2\eta} \sum_{i=1}^n \rho_i^\alpha + \sum_{i=1}^n \frac{\left[I_{\mu - \frac{3}{2}} \left(\frac{(\eta^2 - 1) \mu}{2\eta} \rho_i^\alpha \right) + I_{\mu + \frac{1}{2}} \left(\frac{(\eta^2 - 1) \mu}{2\eta} \rho_i^\alpha \right) \right] \frac{\eta^2 - 1}{4\eta} \rho_i^\alpha + I_{\mu - \frac{1}{2}}^{1,0} \left(\frac{(\eta^2 - 1) \mu}{2\eta} \rho_i^\alpha \right)}{I_{\mu - \frac{1}{2}} \left(\frac{(\eta^2 - 1) \mu}{2\eta} \rho_i^\alpha \right)}, \quad (4.10)$$

respectivamente.

As deduções das derivadas mostradas em (4.2), (4.3), (4.4), (4.8), (4.9) e (4.10) são contribuições originais deste trabalho. As mesmas foram calculadas no software Mathematica e, posteriormente, simplificadas e validadas. As funções que as compõem

encontram-se disponíveis nos programas de cálculo atuais, como Matlab e Mathematica, o que faz ser possível manipulá-las sem dificuldades adicionais.

Em alguns casos, resolver as equações obtidas ao se igualar a 0 as derivadas das funções de log-verossimilhança em relação aos parâmetros pode apresentar um alto nível de complexidade. Portanto, com o objetivo de estimar os parâmetros é possível utilizar um método numérico que encontre o vetor de parâmetros estimados pela maximização da função de log-verossimilhança da distribuição, por exemplo, (4.1), para a distribuição α - κ - μ , ou de (4.7), para a α - η - μ . Neste trabalho, a função *FindMaximum* [·] disponível no programa Mathematica foi utilizada para encontrar os conjuntos de parâmetros que maximizam as funções de log-verossimilhança obtidas, ou seja, as estimativas. As expressões das derivadas das funções de log-verossimilhança mostradas nas equações (4.2), (4.3), (4.4), (4.8), (4.9) e (4.10) serão utilizadas no cálculo do CRLB dos parâmetros das distribuições.

4.2 Métodos de Geração das Amostras

Nos resultados numéricos que serão apresentados na Seção 4.3 deste trabalho, as estimações foram realizadas em amostras geradas por três diferentes métodos de geração de amostras: a partir da definição teórica das envoltórias das distribuições, o método da Aceitação-Rejeição [34] e o método do Espectro de Smith [1]. A utilização de amostras geradas por três diferentes métodos tem como objetivo realizar comparações a respeito do desempenho dos estimadores quando aplicados nas amostras geradas por cada um deles. Ao longo desta seção, o método de geração a partir da definição teórica das envoltórias das distribuições e o método da Aceitação-Rejeição serão descritos de maneira resumida, enquanto o método do Espectro de Smith será descrito com maior detalhamento, uma vez que o método é adaptado para gerar amostras α - κ - μ e α - η - μ . Originalmente o método do Espectro de Smith é usado para geração de amostras que seguem uma distribuição Rayleigh, e a adaptação do mesmo para gerar amostras das distribuições generalizadas é uma contribuição original deste trabalho.

O primeiro método de geração de amostras usado foi a partir definição teórica das envoltórias das distribuições. Para a distribuição α - κ - μ , de acordo com (3.1), foram geradas 2μ VAs Gaussianas, metade delas correspondente à componente em fase e a outra metade à componente em quadratura, com variâncias iguais e médias p_i , para as componentes em fase, e q_i , para as componentes em quadratura, de maneira que se tenha o valor de κ desejado, de acordo com (3.2). Feito isso, as VAs foram somadas e

a α -ésima raiz foi tomada do resultado. Finalmente, a normalização para gerar amostras da envoltória α - κ - μ normalizada foi feita. Realizando este procedimento n vezes, obtém-se as n amostras que serão usadas na estimação. Para a distribuição α - η - μ , o procedimento semelhante foi realizado, de acordo com (3.6) com as VAs Gaussianas que compõem as componentes em fase e em quadratura geradas com média 0 e variâncias arbitrárias σ_X^2 e σ_Y^2 , respectivamente, de maneira a atingir o valor do parâmetro η desejado, como em (3.7).

O segundo método de geração das amostras utilizado foi a técnica da Aceitação-Rejeição. Este método é bastante consolidado na área de geração de variáveis aleatórias. O método consiste na geração de números aleatórios que seguem uma distribuição majoritária que serão, após um processo, aceitos ou rejeitados como amostras pertencentes à distribuição da qual se deseja gerar os números aleatórios. O conjunto de números aceitos deste critério formará as amostras que seguem a distribuição almejada. Para aplicação do método da Aceitação-Rejeição é necessário apenas que se conheça a FDP da distribuição da qual se quer gerar amostras e que se tenha uma função majoritária em relação à esta função [34].

O terceiro método utilizado foi o método do Espectro de Smith [1], que consiste, originalmente, na geração de VAs com distribuição Rayleigh. Porém há a possibilidade de empregar o método adaptando-o para gerar VAs Rice, Hoyt, Nakagami- m , α - μ , κ - μ , η - μ e as generalizadas α - κ - μ e α - η - μ .

O método do Espectro de Smith consiste em gerar VAs Gaussianas complexas e um Espectro de Potências Doppler e utilizá-los para criar as componentes em fase e quadratura da envoltória do sinal no domínio do tempo. O processo se dá da seguinte maneira

1. Definir o número de VAs, n . Usualmente n é definido como uma potência de 2 em razão da inversa da transformada rápida de Fourier (IFFT - *Inverse Fast Fourier Transform*) que será utilizada em um passo posterior. O parâmetro n determinará o número de pontos que serão usados no domínio da frequência para representar o Espectro de Potências Doppler. Definir a frequência da portadora e a velocidade do móvel para encontrar o máximo desvio Doppler (f_{\max}), de acordo com $f_{\max} = v f_c / c$, sendo v sendo a velocidade do móvel em m/s, f_c a frequência da portadora e $c \approx 3 \times 10^8$ m/s é a velocidade da luz no vácuo.
2. Calcular a variação entre as frequências Doppler consecutivas dada por $\Delta f = 2f_{\max} / (n - 1)$

3. Gerar $n/2$ VAs Gaussianas complexas com médias nulas e variâncias quaisquer, correspondentes às componentes de frequência positivas, e calcular os conjugados para encontrar as componentes de frequência negativas.
4. Gerar o Espectro de Potências Doppler, dado por

$$S_{E_z}(f) = \frac{1.5}{\pi f_{\max} \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_{\max}}\right)^2}}, \quad (4.11)$$

com $f \in (-f_{\max}, f_{\max})$.

5. Multiplicar a raiz quadrada de (4.11) pelo sinal gerado no passo 3.
6. Realizar uma IFFT nas amostras geradas no passo 5, e multiplicar cada uma delas por uma VA discreta que admita os valores -1 e 1 de forma equiprovável. O resultado será um conjunto \mathbf{X} de n amostras de VAs Gaussianas de média nula e desvio padrão σ que serão usadas como componente em fase da envoltória.
7. Repetir os passos de 1 a 6, com os mesmos valores de n , v e f_c . O resultado será um outro conjunto \mathbf{Y} de n amostras de VAs Gaussianas de média nula e desvio padrão σ , que serão usadas como componentes em quadratura da envoltória.

Com os conjuntos de amostras \mathbf{X} e \mathbf{Y} gerados, é necessário fazer as devidas modificações para que se tornem amostras das distribuições generalizadas. Considerando a distribuição $\alpha\text{-}\kappa\text{-}\mu$, o conjunto de valores \mathbf{X} deve ser acrescido de uma média p e o conjunto de valores \mathbf{Y} deve ser acrescido de q , seguindo o valor de κ arbitrado, como em (3.2) para $\mu = 1$. Desta forma, são obtidas as componentes em fase e quadratura da distribuição de Rice. Repetindo este processo μ vezes e depois somando os μ vetores de n amostras das componentes em fase e os μ vetores de n amostras das componentes em quadratura, obtém-se um vetor final, que também conterà n amostras. A α -ésima raiz de cada elemento deste vetor corresponde a uma amostra aleatória da envoltória R de um sinal que segue a distribuição $\alpha\text{-}\kappa\text{-}\mu$. A Figura 4.1 representa, por meio de um fluxograma, este processo.

Para gerar os números aleatórios com distribuição $\alpha\text{-}\eta\text{-}\mu$, o conjunto de Gaussianas que formarão as componentes em quadratura deve ser multiplicado por $\sqrt{\eta\sigma^2}$, para o valor de η especificado. Deste processo resultam as n amostras das componentes em fase e quadratura da distribuição de Hoyt. Repetindo este processo 2μ vezes e somando os vetores de n amostras entre si, obtém-se um vetor final, que também conterà n amostras. A α -ésima raiz de cada elemento desse vetor corresponderá a uma amostra

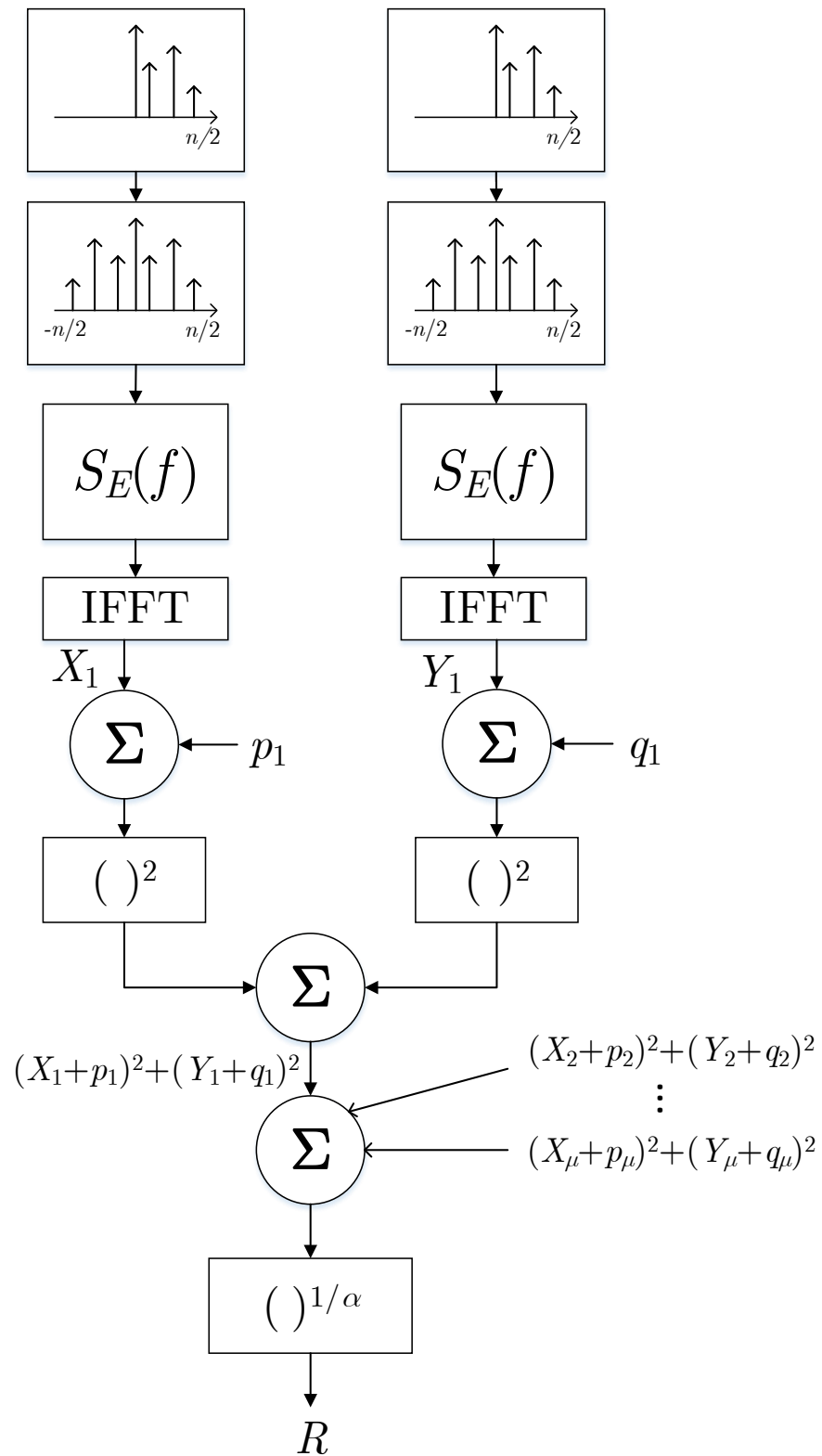


Figura 4.1: Geração de amostras α - κ - μ pelo método do espectro de Smith [1].

aleatória da envoltória R de um sinal que segue a distribuição α - η - μ . A Figura 4.2 representa, por meio de um fluxograma, este processo.

É importante notar que a geração das amostras pela definição e pelo método do Espectro de Smith possui uma limitação quanto ao valor de μ utilizado, que não pode assumir qualquer valor real, pois μ está relacionado ao número de vezes em que se repete o processo. O método da Aceitação-Rejeição não possui esta limitação. Todos os códigos em Matlab usados para a geração de amostras se encontram no Apêndice A deste trabalho.

4.3 Resultados Numéricos

Para o desenvolvimento deste trabalho, de acordo com o que foi descrito na Seção 4.1, todas as estimações feitas foram obtidas por meio da busca do valor máximo das funções de log-verossimilhança utilizando a função *FindMaximum* [\cdot] do programa Mathematica, que encontra numericamente o conjunto de valores que maximiza a função de entrada, bem como seu valor máximo. As derivadas apresentadas em (4.2), (4.3), (4.4), (4.8), (4.9) e (4.10), que constituem uma contribuição original deste trabalho, serão utilizadas na obtenção do CRLB de cada parâmetro.

4.3.1 Média Amostral e Intervalo de Confiança

Neste trabalho, seguindo o procedimento adotado em [42], para cada resultado mostrado foram feitas 500 estimações, com $\hat{\Theta}_i = \frac{1}{500} \sum_{k=1}^{500} [\hat{\Theta}_k]_i$, sendo $[\hat{\Theta}_k]_i$ a k -ésima estimativa do i -ésimo parâmetro. As estimações dos parâmetros foram feitas em conjunto, ou seja, assume-se que nenhum parâmetro é conhecido. O nível de confiança de 95% foi, então, arbitrado e o intervalo de confiança foi encontrado de acordo com (2.32) e com [42], sendo a variância dos estimadores calculada por

$$\mathbb{V}[\hat{\Theta}_i] = \frac{1}{500 - 1} \sum_{k=1}^{500} \left([\hat{\Theta}_k]_i - \mathbb{E} [\hat{\Theta}_k] \right)^2. \quad (4.12)$$

Inicialmente foram produzidos resultados para estimadores da distribuição η - μ , que é um caso particular da distribuição α - η - μ , de acordo com o que foi evidenciado na Seção 3.2.2. A Figura 4.3 mostra os valores estimados dos parâmetros (a) η e (b) μ , com amostras sendo geradas para os valores $\eta = 2$ e $\mu = 2$, respectivamente, em

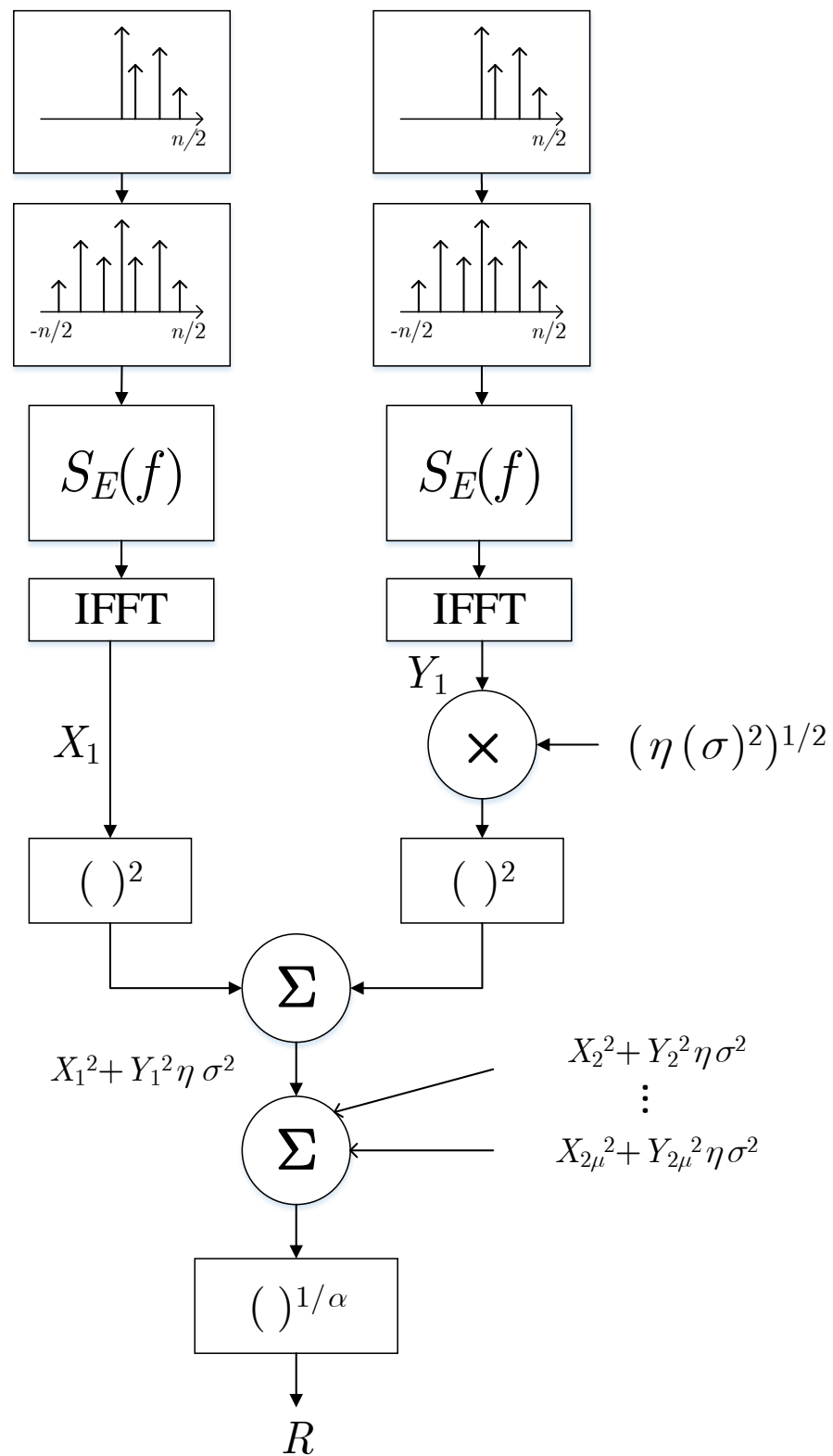


Figura 4.2: Geração de amostras α - η - μ pelo método do espectro de Smith [1].

função do número de amostras geradas, n . Na geração de amostras foi utilizado o método da Aceitação-Rejeição. Pode-se notar uma melhora na precisão dos estimadores conforme n aumenta. De acordo com estes resultados e com estudos feitos em [36,43], para cada estimação realizada nas simulações a seguir são usados conjuntos de $n = 25000$ amostras, no caso da geração de amostras pela definição das distribuições e pelo método da Aceitação-Rejeição, ou $n = 2^{15}$, no caso da geração pelo método do Espectro de Smith, em que recomenda-se que n seja uma potência de 2.

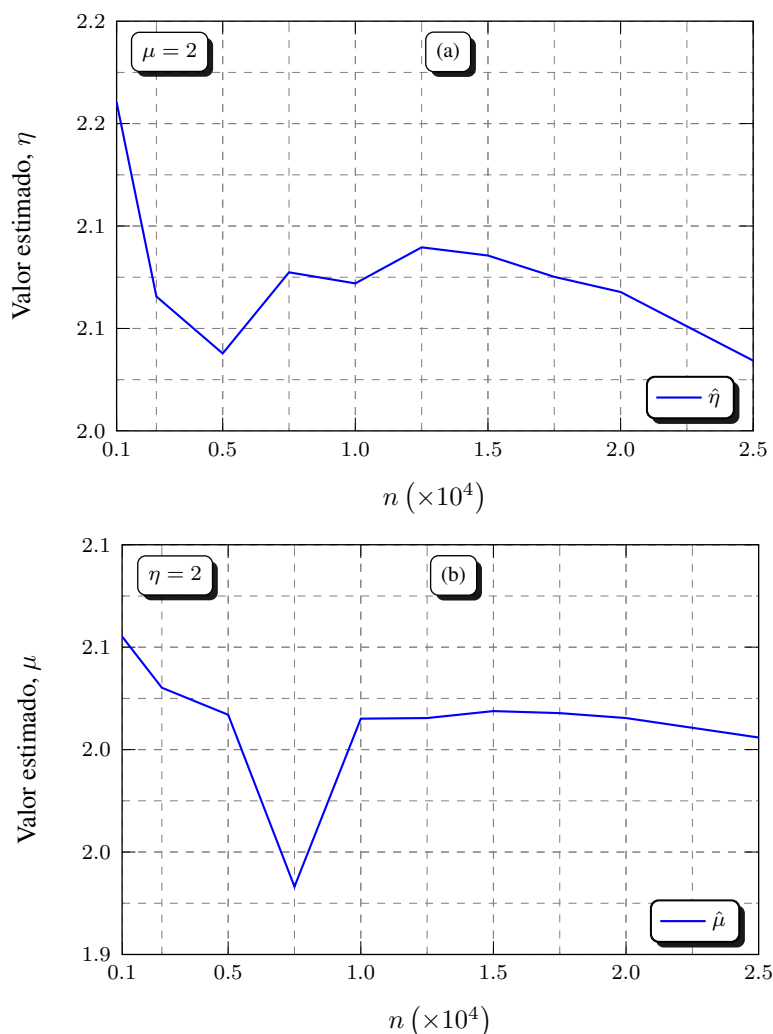


Figura 4.3: Média amostral de (a) $\hat{\eta}$ e (b) $\hat{\mu}$, em função do número de amostras, para a distribuição η - μ .

A Figura 4.4(a) mostra os resultados da estimação e dos intervalos de confiança, em comparação com os valores reais dos parâmetros, usados para gerar as amostras, para os valores de $\eta = \{0.5; 1; 1.5; 2; \dots; 5\}$, com $\mu = 2$. A geração das amostras, neste caso, foi feita apenas para o método da Aceitação-Rejeição. A Figura 4.4(b) evidencia

resultados dos estimadores e dos intervalos de confiança de μ , em comparação com os valores reais dos parâmetros, usados para gerar as amostras, para os valores $\mu = \{0,5; 1; 1,5; \dots; 5\}$, com $\eta = 2$, também para as amostras geradas pelo método da Aceitação-Rejeição. Pode-se notar pela precisão dos valores estimados e pelo tamanho do intervalo de confiança que $\hat{\mu}$ é mais preciso que $\hat{\eta}$.

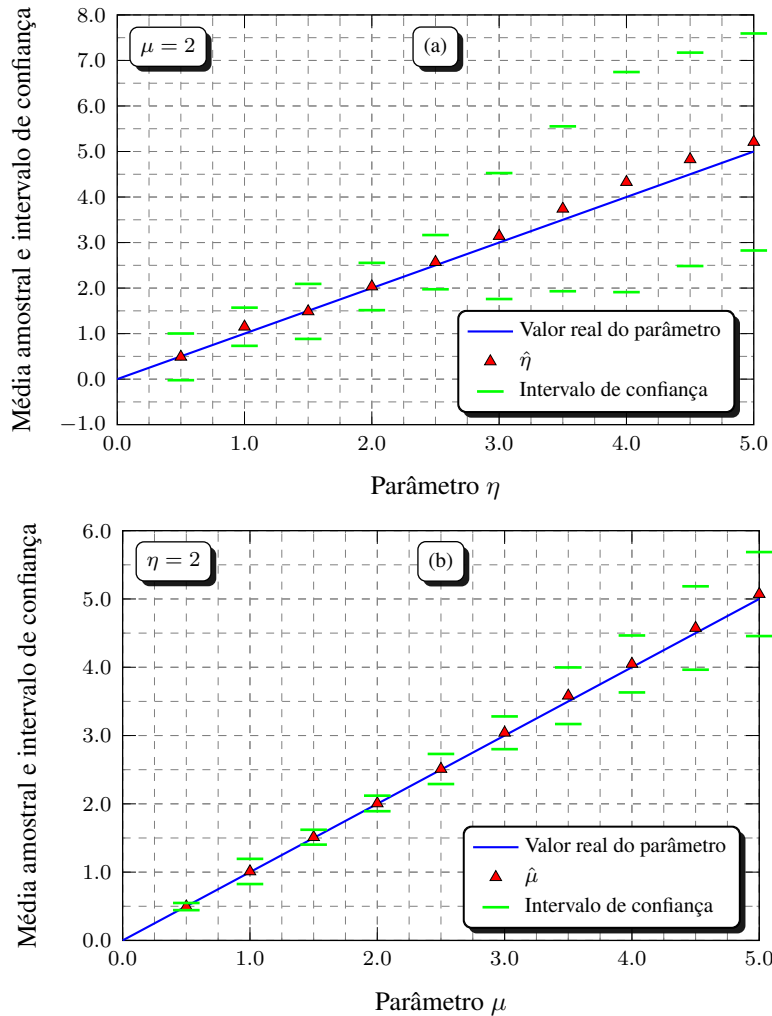


Figura 4.4: Médias amostrais e intervalos de confiança de (a) $\hat{\eta}$ e (b) $\hat{\mu}$ da distribuição η - μ , encontrados usando amostras geradas pelo método da Aceitação-Rejeição.

Com relação ao estimador ML dos parâmetros da distribuição α - κ - μ , para verificar os resultados a respeito do parâmetro α , o método ML foi aplicado em amostras geradas com os valores $\alpha = \{0,5; 1; 1,5; \dots; 5\}$, enquanto κ e μ foram mantidos com o valor 2. As Figuras 4.5(a), 4.6(a) e 4.7(a) mostram os resultados obtidos com as amostras geradas pelos três métodos descritos na Seção 4.2.

Para avaliar o desempenho do estimador ML do parâmetro κ , o mesmo procedi-

mento foi feito, também para os valores $\kappa = \{0.5; 1; 1.5; \dots; 5\}$, com α e μ fixados em 2. As Figuras 4.5(b), 4.6(b) e 4.7(b) mostram os resultados obtidos com as amostras geradas pelos três métodos descritos na Seção 4.2.

Para verificar o desempenho do estimador ML relacionado ao parâmetro μ , as estimações foram feitas em amostras geradas com os valores $\mu = \{0.5; 1; 1.5; \dots; 5\}$, com α e κ fixados em 2. As Figuras 4.5(c), 4.6(c) e 4.7(c) mostram os resultados obtidos com as amostras geradas pelos três métodos descritos na Seção 4.2.

A partir dos resultados, é possível afirmar que os estimadores do parâmetro α apresentam maior proximidade do valor real do parâmetro que os estimadores relacionados a μ , que por sua vez são mais precisos que $\hat{\kappa}$. Quando comparando os estimadores obtidos com base em diferentes métodos de geração de amostras, pode-se notar pelas Figuras 4.5 e 4.7 que $\hat{\Theta}$ possui desempenho equivalente para amostras geradas pela definição da distribuição e pelo método do Espectro de Smith. O método da Aceitação-Rejeição, por sua vez, tem um desempenho melhor que os outros, evidenciada pela precisão das estimativas e pelos intervalos de confiança mais estreitos, que significam uma menor variabilidade nos valores das estimações. É importante notar também que há um problema na geração de amostras pelo método da Aceitação-Rejeição para valores de $\alpha < 0.5$, pois a FDP da distribuição tende ao infinito à medida que $\rho \rightarrow 0$, e o método requer uma função majoritária em relação à FDP da distribuição.

Apesar de algumas estimações evidenciadas parecerem imprecisas, a partir de uma análise das FDPs resultantes das envoltórias do sinal, sendo a FDP teórica obtida utilizando os valores dos parâmetros usados na geração de amostras e a FDP estimada obtida utilizando os valores dos parâmetros estimados em conjunto, pode-se mostrar que o método ML é eficaz na predição do comportamento da envoltória do sinal no ambiente α - κ - μ . Isto pode ser mostrado por meio da Figura 4.8. Nela é possível comparar as FDPs teóricas para os conjuntos de parâmetros (a) $\theta = [4.5 \ 2 \ 2]$, (b) $\theta = [2 \ 0.5 \ 2]$ e (c) $\theta = [2 \ 2 \ 4]$, com as amostras tendo sido geradas pelo método do Espectro de Smith, com as FDPs obtidas com os conjuntos de valores de parâmetros estimados, que foram (a) $\hat{\Theta} = [2.4311 \ 2.6956 \ 2.9271]$, (b) $\hat{\Theta} = [1.8598 \ 1.6744 \ 1.646]$ e (c) $\hat{\Theta} = [2.2959 \ 2.4253 \ 2.8383]$, respectivamente. Adicionalmente, o erro quadrático médio (MSE - *Mean Squared Error*) foi calculado e apresentado nos gráficos para cada comparação de FDPs. É possível concluir que o comportamento da envoltória normalizada do sinal foi estimado de maneira precisa devido aos baixos valores de MSE e à semelhança entre as FDPs.

O MSE é uma medida de diferença entre conjuntos de dados. Ele é calculado pela

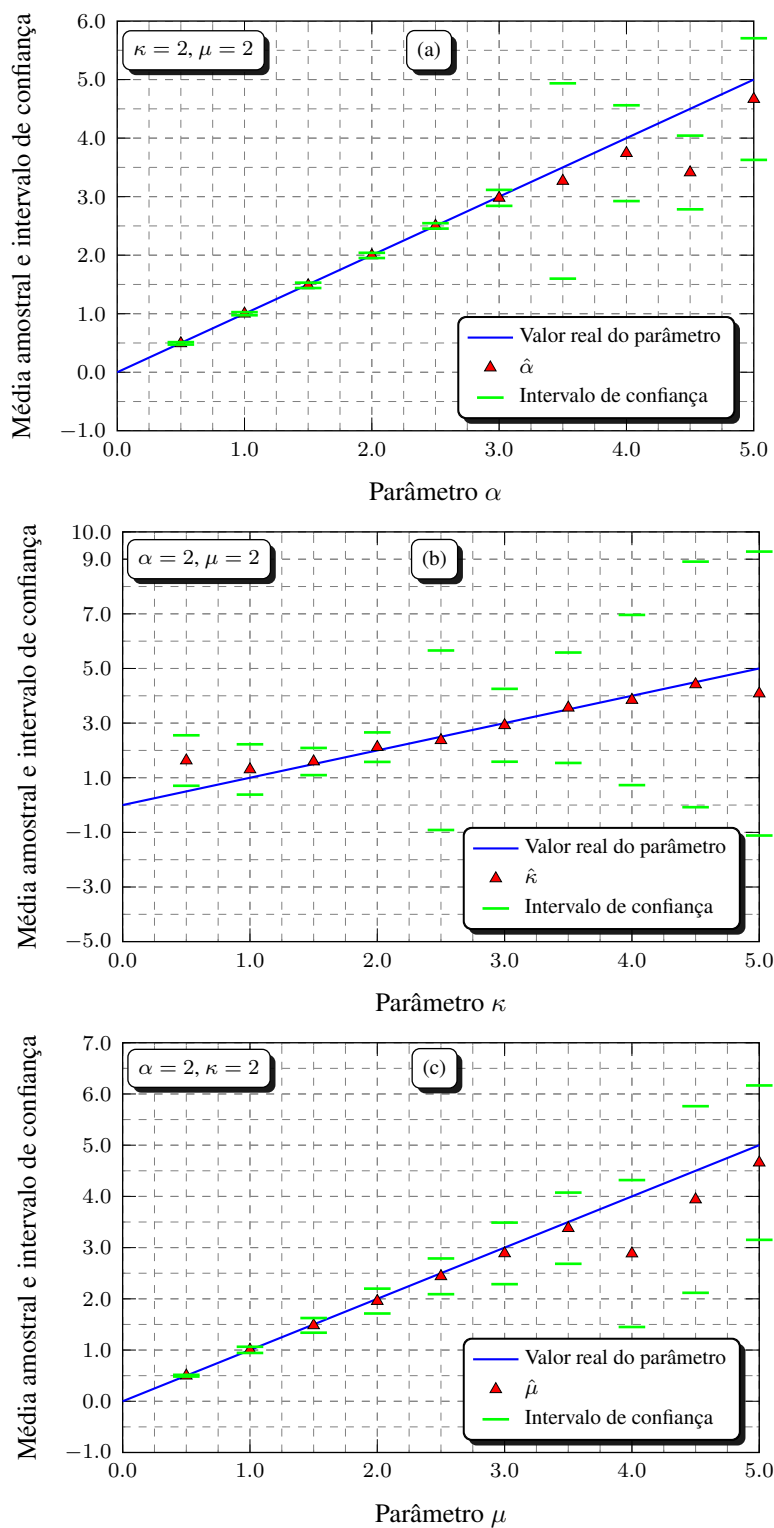


Figura 4.5: Médias amostrais e intervalos de confiança de (a) $\hat{\alpha}$, (b) $\hat{\kappa}$ e (c) $\hat{\mu}$ da distribuição α - κ - μ , encontrados usando amostras geradas pela definição da distribuição.

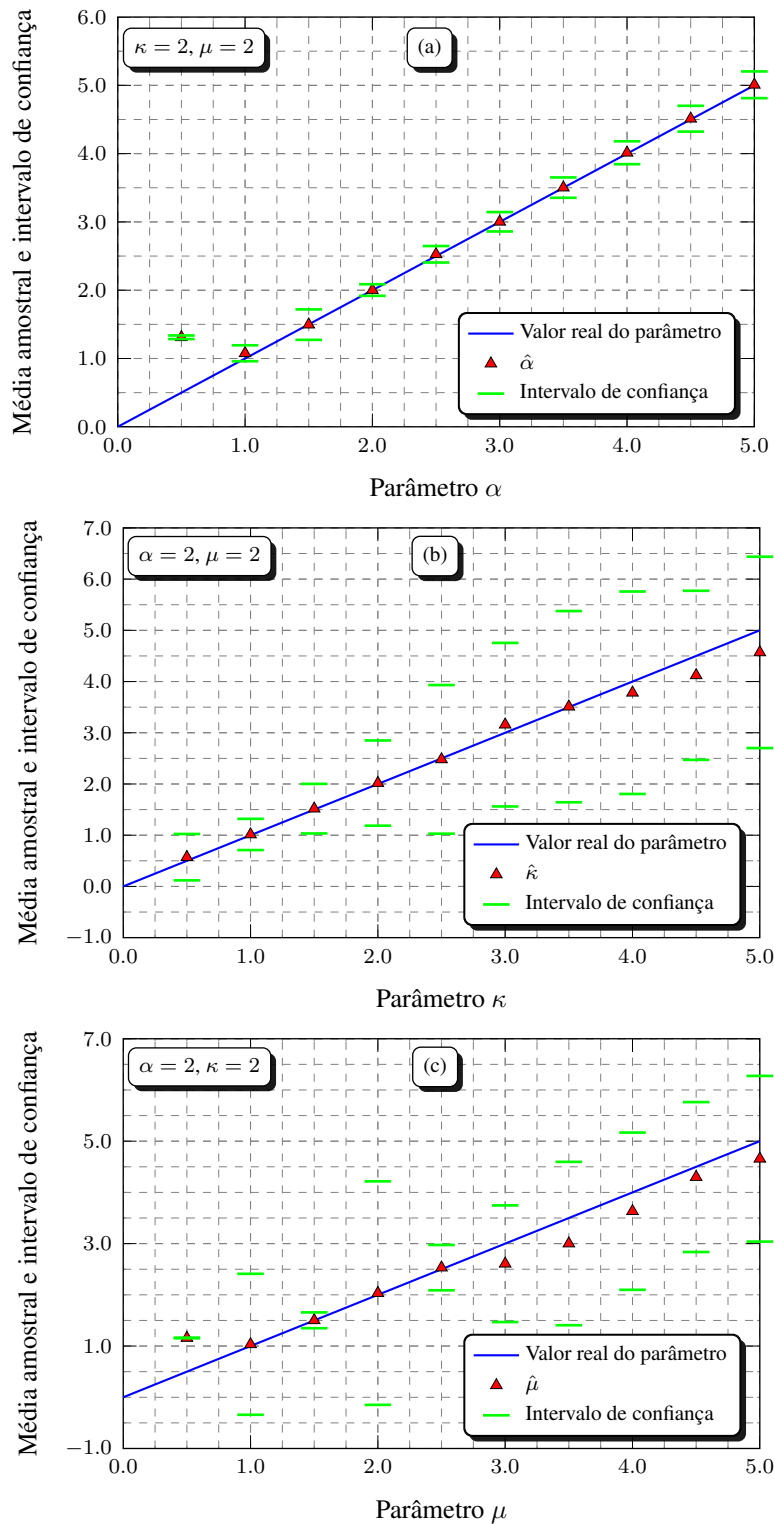


Figura 4.6: Médias amostrais e intervalos de confiança de (a) $\hat{\alpha}$, (b) $\hat{\kappa}$ e (c) $\hat{\mu}$ da distribuição α - κ - μ , encontrados usando amostras geradas pelo método da Aceitação-Rejeição.

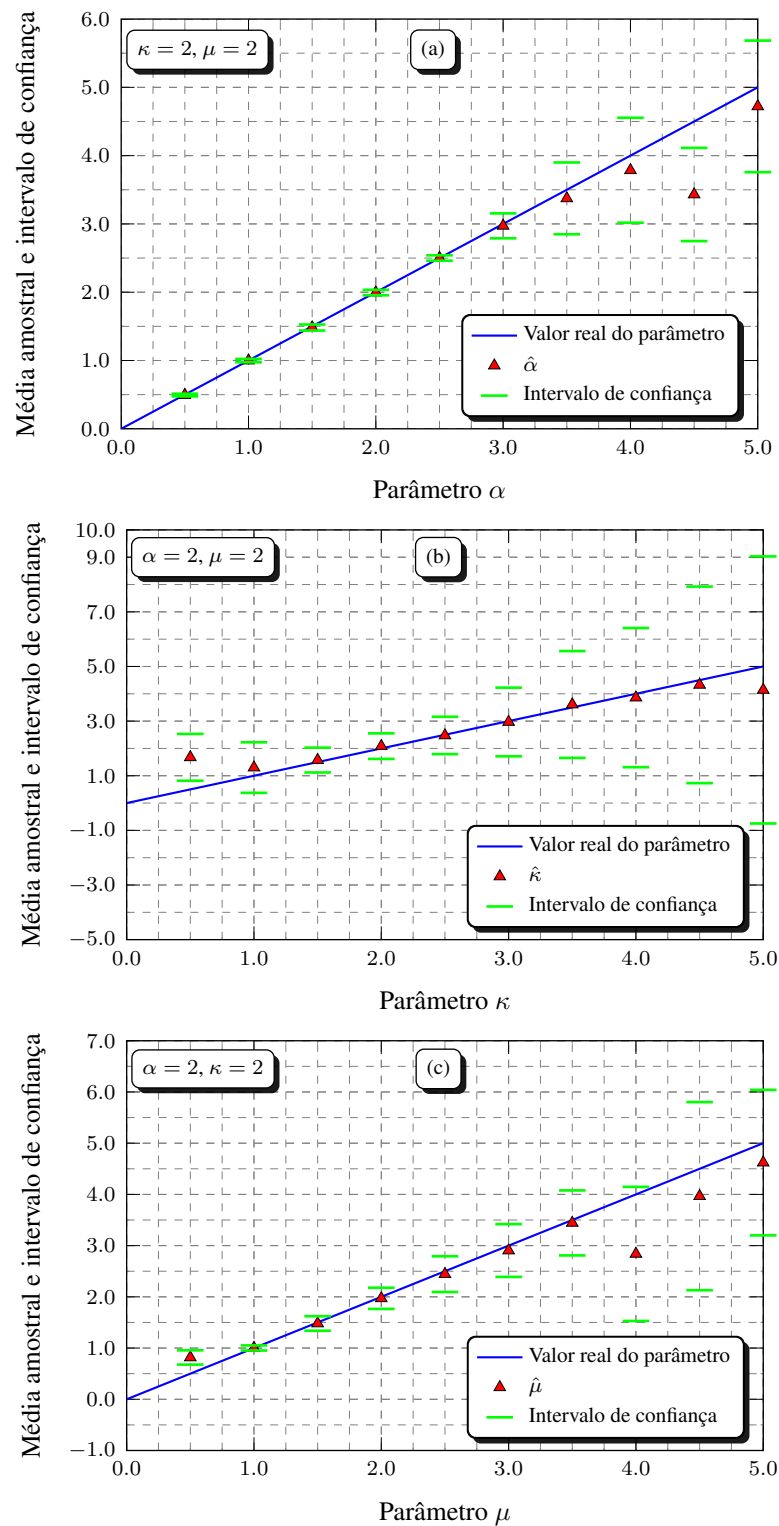


Figura 4.7: Médias amostrais e intervalos de confiança de (a) $\hat{\alpha}$, (b) $\hat{\kappa}$ e (c) $\hat{\mu}$ da distribuição α - κ - μ , encontrados usando amostras geradas pelo método do Espectro de Smith.

soma dos valores quadráticos dos erros entre dois conjuntos de dados, sendo o resultado desta soma dividido pelo total de dados comparados. Neste caso, os conjuntos de dados são amostras das FDPs teóricas e estimadas. Como informação adicional, em [38] é proposto um método de estimação de parâmetros baseado na minimização do MSE.

Para a distribuição α - η - μ , inicialmente averiguando o parâmetro α , o método ML foi aplicado em amostras geradas com os valores $\alpha = \{0.5; 1; 1.5; \dots; 5\}$, enquanto η e μ foram mantidos com o valor 2. As Figuras 4.9(a), 4.10(a) e 4.11(a) mostram os resultados obtidos com as amostras geradas pelos três métodos mostrados na Seção 4.2. É possível verificar que a utilização de amostras geradas pelo método do Espectro de Smith resulta em estimadores mais precisos, uma vez que seus intervalos de confiança são mais estreitos. Um desempenho parecido pode ser notado nos estimadores obtidos quando as amostras são geradas pela definição da distribuição. Usando as amostras geradas pela Aceitação-Rejeição há uma perda de desempenho dos estimadores com o aumento do valor de α e, além disso, este método de geração também apresenta o problema relativo a função majoritária que o método requer para valores de $\alpha < 0.5$, uma vez que a FDP da distribuição tende ao infinito a medida que $\rho \rightarrow 0$.

Para avaliar o desempenho do estimador ML do parâmetro η , o método foi aplicado em amostras geradas com os valores $\eta = \{0.5; 1; 1.5; \dots; 5\}$. Os valores de α e μ foram mantidos iguais a 2. As Figuras 4.9(b), 4.10(b) e 4.11(b) mostram os resultados obtidos com as amostras geradas pelos três métodos descritos na Seção 4.2. É possível verificar que o desempenho dos estimadores pode ser melhor ou pior de acordo com o método de geração de amostras e o valor do parâmetro. Por exemplo, quando é estimado o parâmetro com valores no intervalo $[1, 2]$, as amostras geradas pelo método da Aceitação-Rejeição resultam em estimadores com melhor desempenho. O mesmo pode ser dito para η no intervalo de $[2, 3]$ para os estimadores das amostras geradas pela definição da distribuição. É importante citar que a simetria da distribuição faz com que um dado valor de η seja equivalente ao seu inverso, conforme (3.7), pois o desbalanceamento da potência das componentes Gaussianas do sinal α - η - μ permanece o mesmo. Portanto, uma estimação feita a respeito do parâmetro η é equivalente ao seu inverso.

Com o objetivo de verificar os resultados do estimador ML do parâmetro μ , as estimações foram feitas em amostras geradas com os valores $\mu = \{0.5; 1; 1.5; \dots; 5\}$, com α e η ajustados em 2. As Figuras 4.9(c), 4.10(c) e 4.11(c) mostram os resultados obtidos com as amostras geradas pelos três métodos mostrados na Seção 4.2. Os estimadores obtidos das amostras geradas pelo método da Aceitação-Rejeição têm mais

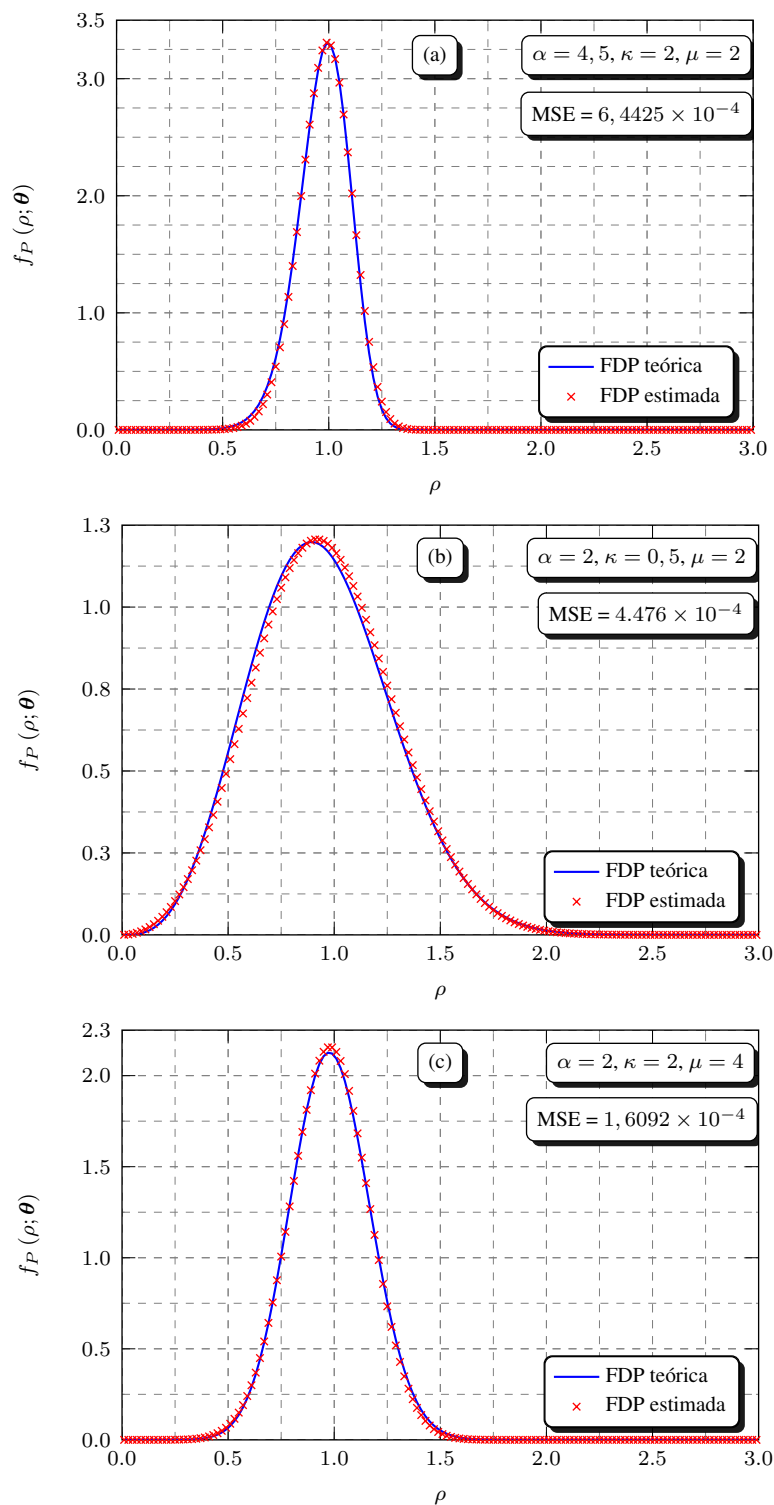


Figura 4.8: Comparação entre as FDPs estimada e teórica para (a) $\alpha = 4,5, \kappa = 2$ e $\mu = 2$, (b) $\alpha = 2, \kappa = 0,5$ e $\mu = 2$ e (c) $\alpha = 2, \kappa = 2$ e $\mu = 4$, considerando amostras geradas pelo método do Espectro de Smith, da distribuição $\alpha\text{-}\kappa\text{-}\mu$.

precisão, embora suas variâncias aumentem à medida que μ aumenta, o que indica um problema para estimar valores de μ maiores. O desempenho dos estimadores obtidos pelas amostras geradas pela definição da distribuição e pelo método do Espectro de Smith são semelhantes.

É notável que obtém-se maior precisão na estimação de α que de μ , uma vez que os intervalos de confiança e, conseqüentemente, as variâncias de $\hat{\alpha}$ são menores que as de $\hat{\mu}$. Ao comparar os estimadores $\hat{\mu}$ e $\hat{\eta}$, conclui-se que o primeiro possui maior precisão.

Com o objetivo de averiguar se o método é satisfatório na predição do comportamento das FDPs da envoltória normalizada para a distribuição $\alpha\text{-}\eta\text{-}\mu$, a Figura 4.12 mostra a comparação entre as FDPs teóricas, geradas com os valores (a) $\theta = [4 \ 2 \ 2]$, (b) $\theta = [2 \ 4 \ 2]$ e (c) $\theta = [2 \ 2 \ 1]$, e as FDPs obtidas com os valores dos parâmetros estimados, considerando amostras geradas pelo método do Espectro de Smith. Os correspondentes parâmetros estimados obtidos foram (a) $\hat{\Theta} = [4.0098 \ 2.0697 \ 2.0094]$, (b) $\hat{\Theta} = [2.0032 \ 4.5744 \ 2.0582]$ e (c) $\hat{\Theta} = [1.9024 \ 1.8245 \ 1.2584]$. O valor do MSE calculado também é mostrado nas figuras. Como na distribuição $\alpha\text{-}\kappa\text{-}\mu$, é possível notar que as estimações do comportamento da envoltória do sinal são satisfatórias, com o maior valor de MSE sendo da ordem de 10^{-3} .

Os códigos implementados no programa Mathematica para realizar as estimações no desenvolvimento deste trabalho encontram-se disponíveis no Apêndice B.

4.3.2 CRLB para os Parâmetros das Distribuições Generalizadas

Uma importante métrica na avaliação de desempenho de estimadores tem relação com sua variância. Quanto menor a variância de um estimador, maior sua precisão [34–36]. Na Seção 2.3 foi definido o CRLB que tem relação com a mínima variância que um estimador de um parâmetro pode obter. Este limitante inferior pode ser aplicado para estimadores ML, uma vez que quando $n \rightarrow \infty$, a variância do estimador tende ao valor encontrado pelo CRLB.

Utilizando a Equação (2.29), é possível encontrar uma matriz de informação de Fisher que leva aos valores da mínima variância possível dos estimadores, de acordo

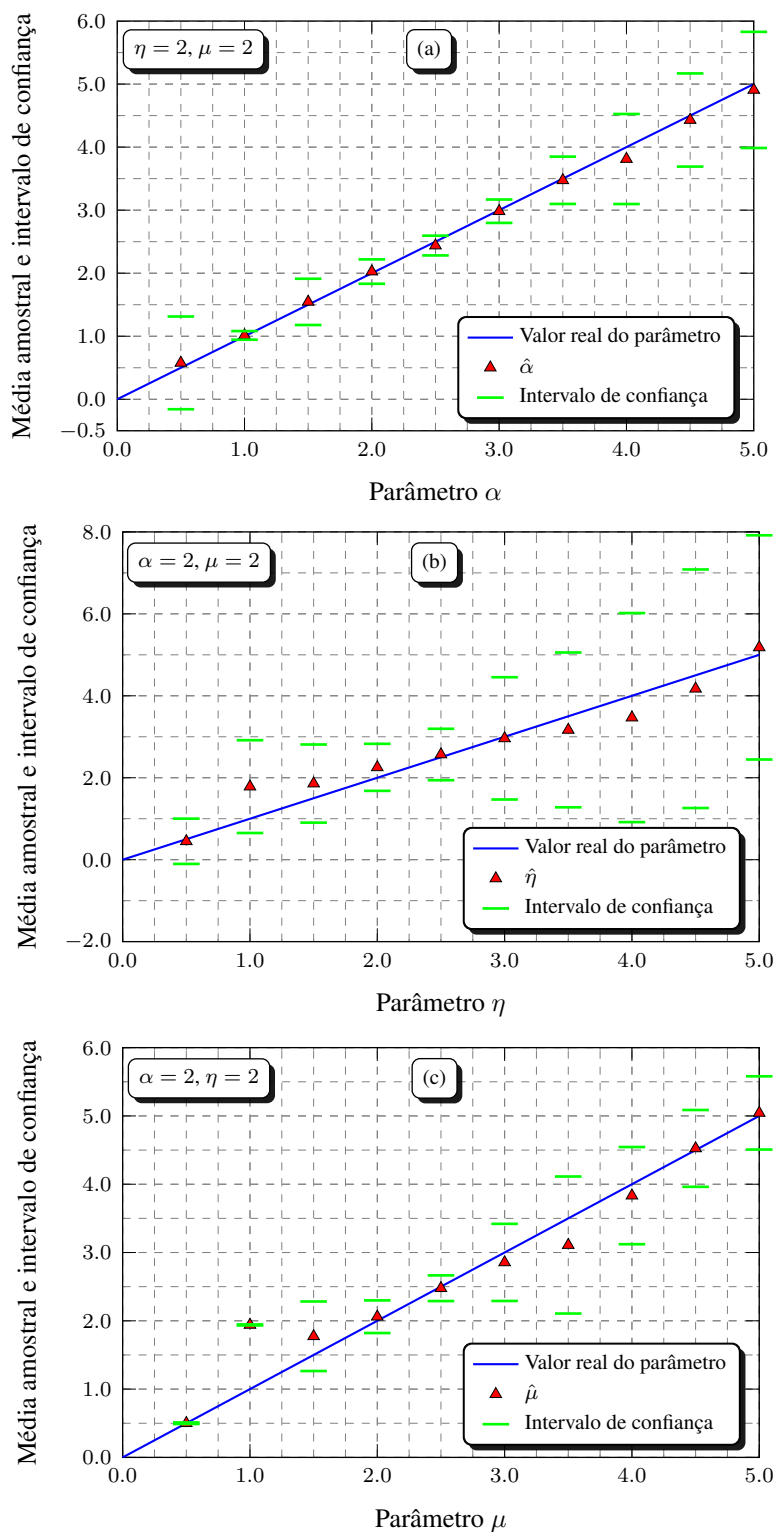


Figura 4.9: Médias amostrais e intervalos de confiança de (a) $\hat{\alpha}$, (b) $\hat{\eta}$ e (c) $\hat{\mu}$ da distribuição α - η - μ , encontrados usando amostras geradas pela definição da distribuição.

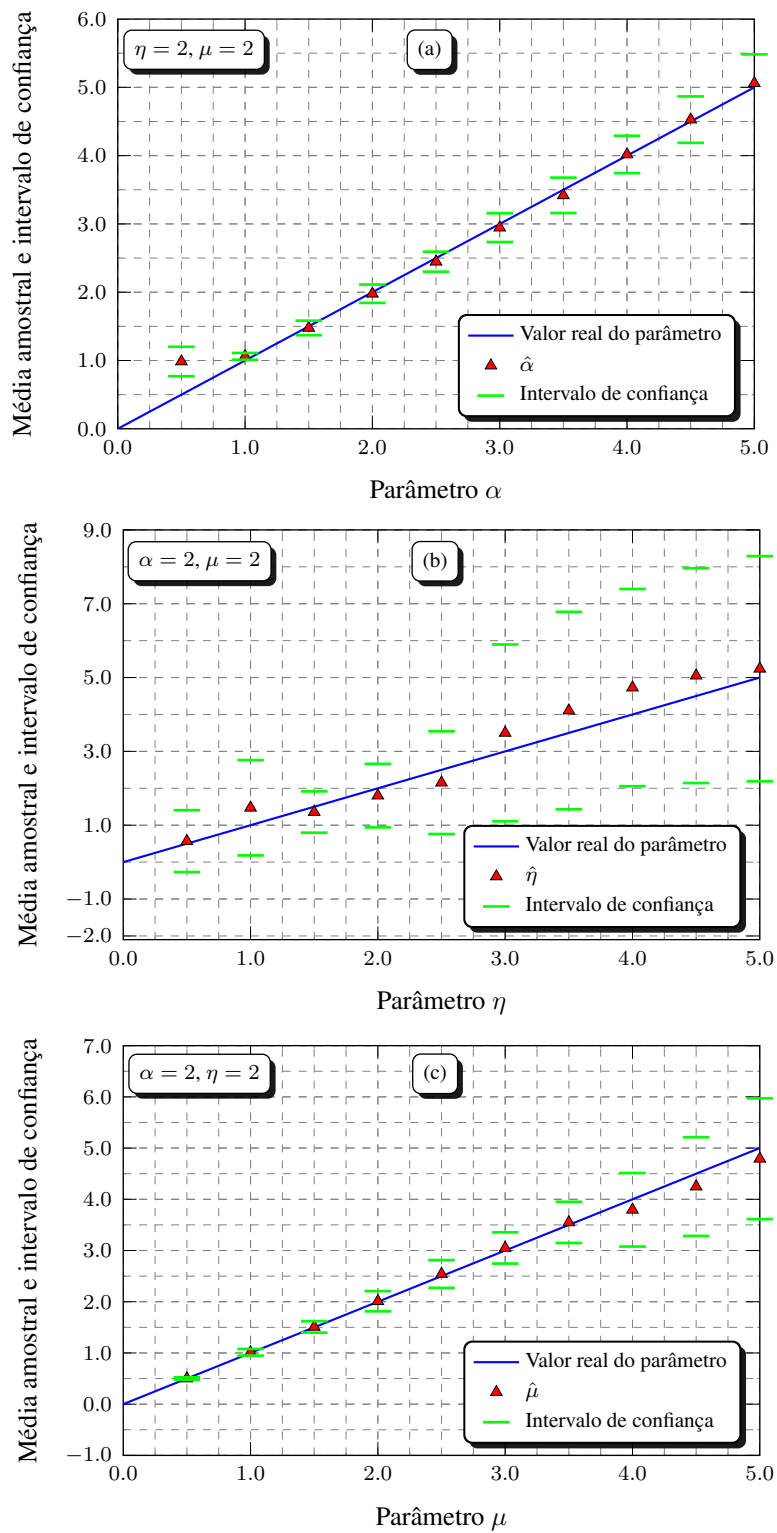


Figura 4.10: Médias amostrais e intervalos de confiança de (a) $\hat{\alpha}$, (b) $\hat{\eta}$ e (c) $\hat{\mu}$ da distribuição α - η - μ , encontrados usando amostras geradas pelo método da Aceitação-Rejeição.

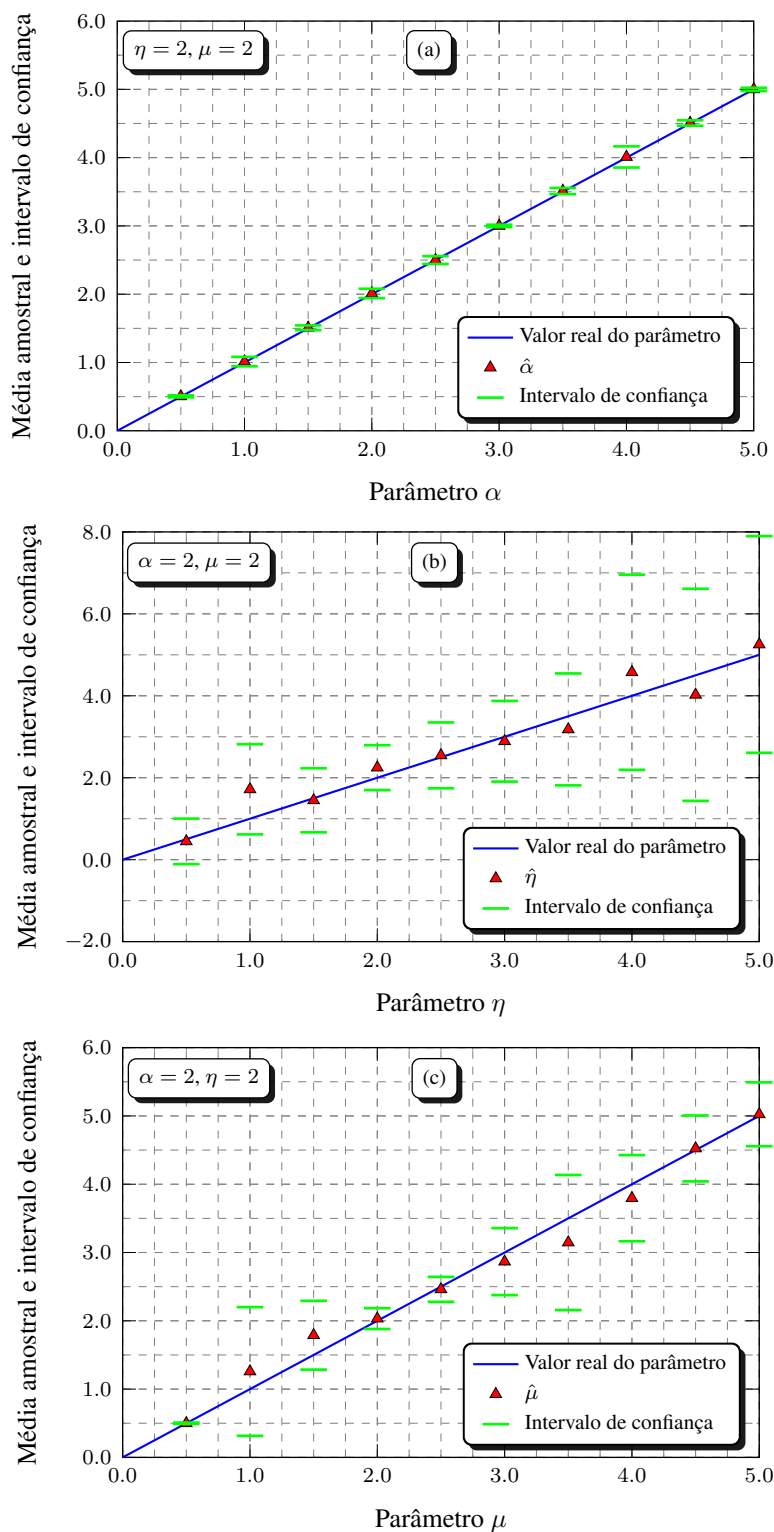


Figura 4.11: Médias amostrais e intervalos de confiança de (a) $\hat{\alpha}$, (b) $\hat{\eta}$ e (c) $\hat{\mu}$ da distribuição α - η - μ , encontrados usando amostras geradas pelo método do Espectro de Smith.

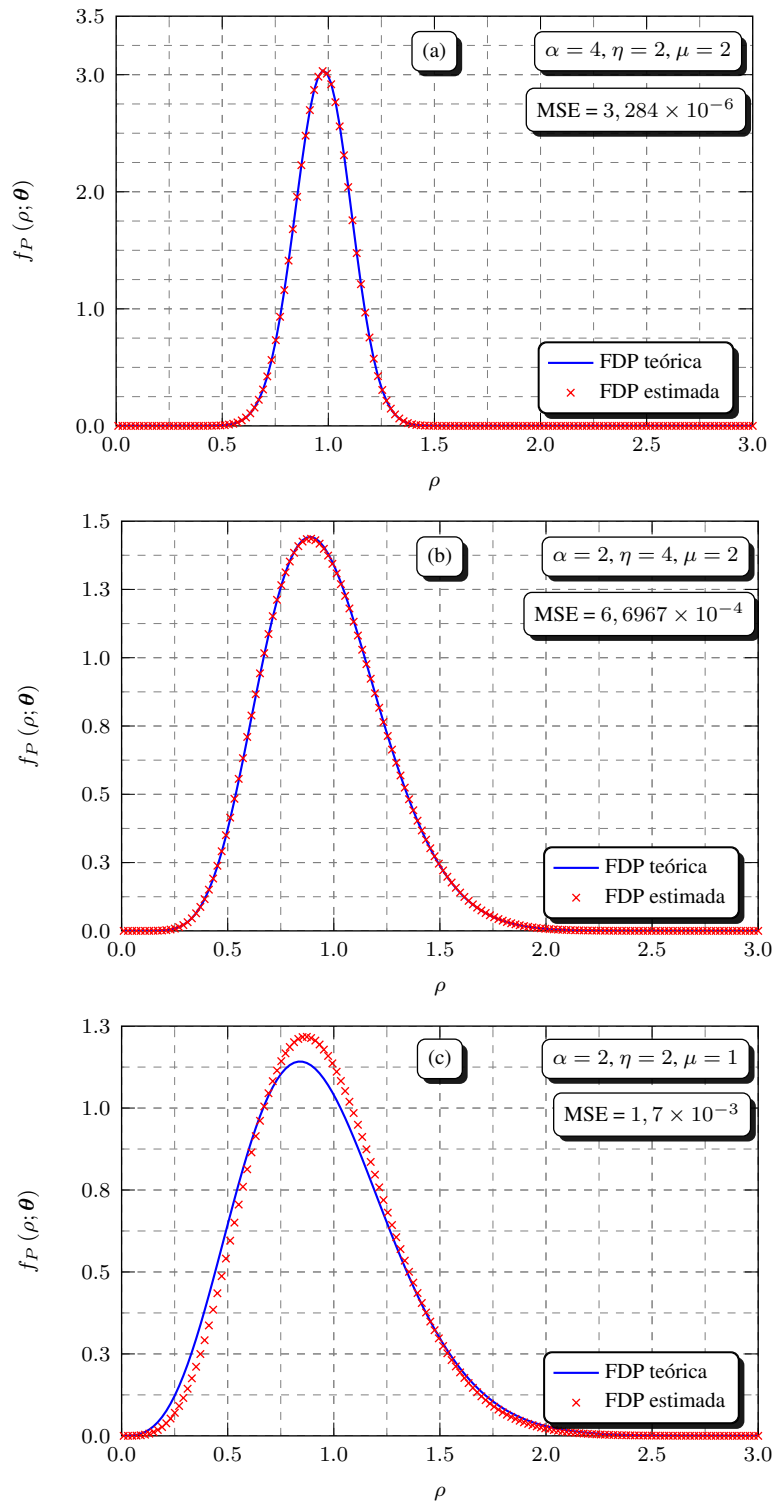


Figura 4.12: Comparação entre as FDPs estimada e teórica para (a) $\alpha = 4, \eta = 2$ e $\mu = 2$, (b) $\alpha = 2, \eta = 4$ e $\mu = 2$ e (c) $\alpha = 2, \eta = 2$ e $\mu = 1$, considerando amostras geradas pelo método do Espectro de Smith, da distribuição α - η - μ .

com o CRLB. Para a distribuição α - κ - μ , esta matriz é dada por

$$\mathbf{I}_n(\theta) = n\mathbb{E} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \ln f_P(\rho; \theta)}{\partial \alpha}\right)^2 & \frac{\partial \ln f_P(\rho; \theta)}{\partial \alpha} \frac{\partial \ln f_P(\rho; \theta)}{\partial \kappa} & \frac{\partial \ln f_P(\rho; \theta)}{\partial \alpha} \frac{\partial \ln f_P(\rho; \theta)}{\partial \mu} \\ \frac{\partial \ln f_P(\rho; \theta)}{\partial \kappa} \frac{\partial \ln f_P(\rho; \theta)}{\partial \alpha} & \left(\frac{\partial \ln f_P(\rho; \theta)}{\partial \kappa}\right)^2 & \frac{\partial \ln f_P(\rho; \theta)}{\partial \kappa} \frac{\partial \ln f_P(\rho; \theta)}{\partial \mu} \\ \frac{\partial \ln f_P(\rho; \theta)}{\partial \mu} \frac{\partial \ln f_P(\rho; \theta)}{\partial \alpha} & \frac{\partial \ln f_P(\rho; \theta)}{\partial \mu} \frac{\partial \ln f_P(\rho; \theta)}{\partial \kappa} & \left(\frac{\partial \ln f_P(\rho; \theta)}{\partial \mu}\right)^2 \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Para a distribuição α - η - μ , a matriz de informação de Fisher é

$$\mathbf{I}_n(\theta) = n\mathbb{E} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \ln f_P(\rho; \theta)}{\partial \alpha}\right)^2 & \frac{\partial \ln f_P(\rho; \theta)}{\partial \alpha} \frac{\partial \ln f_P(\rho; \theta)}{\partial \eta} & \frac{\partial \ln f_P(\rho; \theta)}{\partial \alpha} \frac{\partial \ln f_P(\rho; \theta)}{\partial \mu} \\ \frac{\partial \ln f_P(\rho; \theta)}{\partial \eta} \frac{\partial \ln f_P(\rho; \theta)}{\partial \alpha} & \left(\frac{\partial \ln f_P(\rho; \theta)}{\partial \eta}\right)^2 & \frac{\partial \ln f_P(\rho; \theta)}{\partial \eta} \frac{\partial \ln f_P(\rho; \theta)}{\partial \mu} \\ \frac{\partial \ln f_P(\rho; \theta)}{\partial \mu} \frac{\partial \ln f_P(\rho; \theta)}{\partial \alpha} & \frac{\partial \ln f_P(\rho; \theta)}{\partial \mu} \frac{\partial \ln f_P(\rho; \theta)}{\partial \eta} & \left(\frac{\partial \ln f_P(\rho; \theta)}{\partial \mu}\right)^2 \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

Note que o valor da mínima variância possível dos estimadores dos parâmetros é encontrada pela diagonal principal da matriz inversa das matrizes em (4.13) e (4.14), para as respectivas distribuições, de acordo com (2.30).

A Figura 4.13 mostra o desvio padrão normalizado, ou seja, considerando a observação de apenas uma amostra aleatória, dos parâmetros (a) α , (b) κ e (c) μ para a distribuição α - κ - μ . Nota-se que, como inferido pelos resultados anteriores, a precisão de um estimador de α tende a ser melhor que a de um estimador de μ , que por sua vez tende a ser mais preciso que um estimador de κ . A precisão de $\hat{\alpha}$, neste caso, tende a ser menor conforme os outros parâmetros aumentam, com μ tendo influência mais significativa, ou conforme o valor de α aumenta. Para um mesmo valor de κ , a precisão de seu estimador diminui conforme μ aumenta, sendo o desempenho do estimador invariante à mudança no valor de α . Além disso, os estimadores de κ possuem maior grau de incerteza em torno do valor estimado conforme κ aumenta ou $\kappa \rightarrow 0$. Considerando $\hat{\mu}$, há um aumento no desvio padrão normalizado conforme o valor de μ aumenta ou κ aumenta, e novamente uma invariância com relação à mudança de α . Além disso, há um comportamento linear crescente do desvio padrão normalizado de α , enquanto κ e μ apresentam crescimento exponencial, com κ crescendo mais rapidamente. O desvio padrão normalizado de $\hat{\kappa}$ também cresce à medida que $\kappa \rightarrow 0$.

A Figura 4.14 mostra o desvio padrão normalizado dos parâmetros (a) α , (b) η e (c) μ da distribuição α - η - μ . Pode-se notar que a precisão de $\hat{\alpha}$ tende a ser melhor que a de $\hat{\mu}$ que, por sua vez, é mais preciso que $\hat{\eta}$. É importante notar que o gráfico da

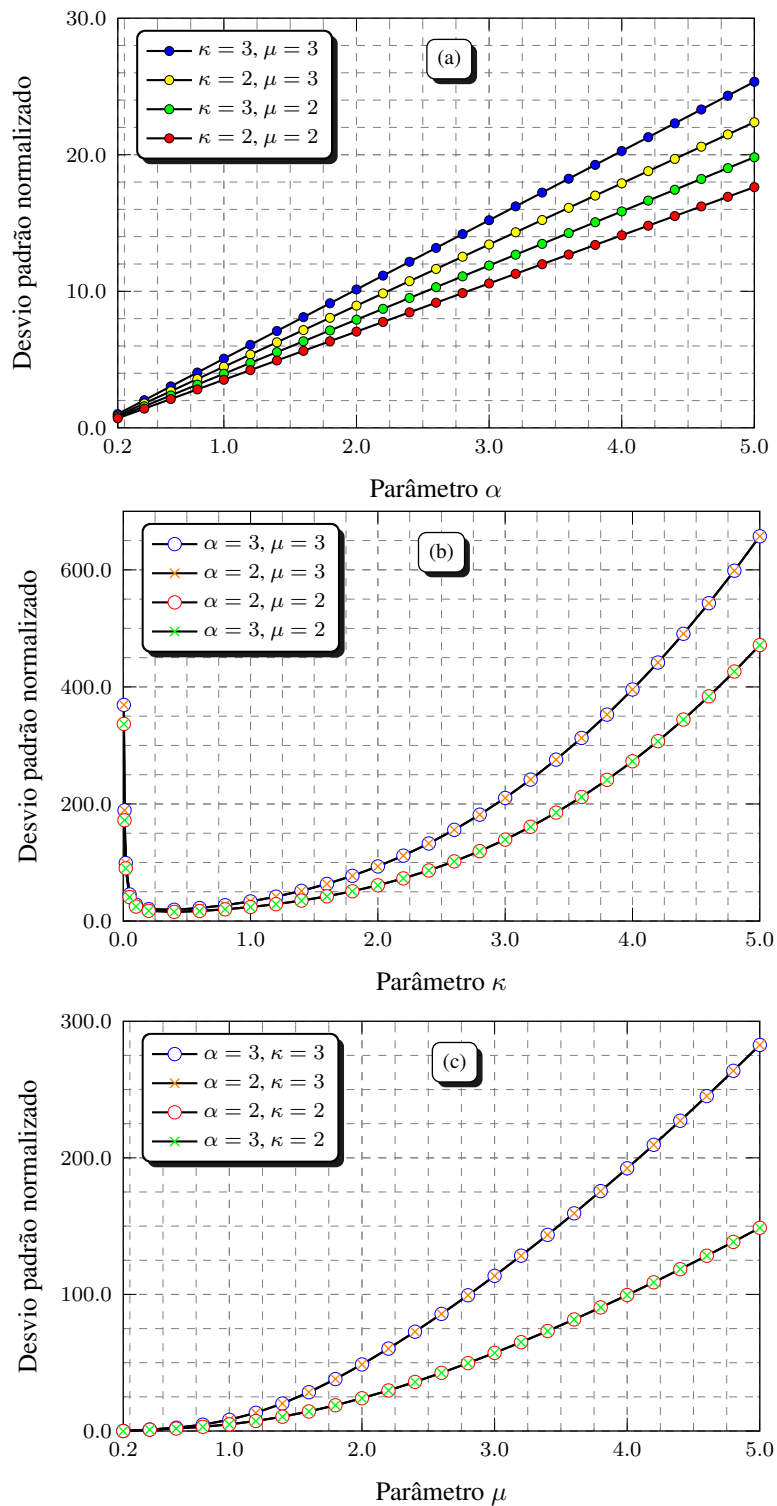


Figura 4.13: Curvas de desvio padrão normalizado, obtidas de (2.30), para os parâmetros (a) α , (b) κ e (c) μ , da distribuição α - κ - μ .

Figura 4.14(b) mostra apenas valores de $\eta > 1$, o que é suficiente devido à simetria da distribuição, como descrito na Seção 3.2. Os resultados do CRLB evidenciam um

aumento na variância de α quando η ou μ aumentam, sendo o aumento da variância de α mais sensível ao aumento do valor de μ que de η . Além disso, estimadores de α possuem menor desempenho conforme o valor do mesmo aumenta. Para $\hat{\eta}$, o comportamento do desvio padrão normalizado varia muito com a faixa de valores de η e com os valores dos outros parâmetros, podendo-se notar apenas um aumento na incerteza em torno do valor estimado conforme η aumenta. Considerando $\hat{\mu}$, a variância mínima de um estimador não varia com a variação do parâmetro α , porém há um aumento desta variância quando o valor de η aumenta ou quando o próprio valor de μ cresce.

Os códigos implementados no programa Mathematica para encontrar o CRLB dos parâmetros das distribuições encontram-se disponíveis no Apêndice C.

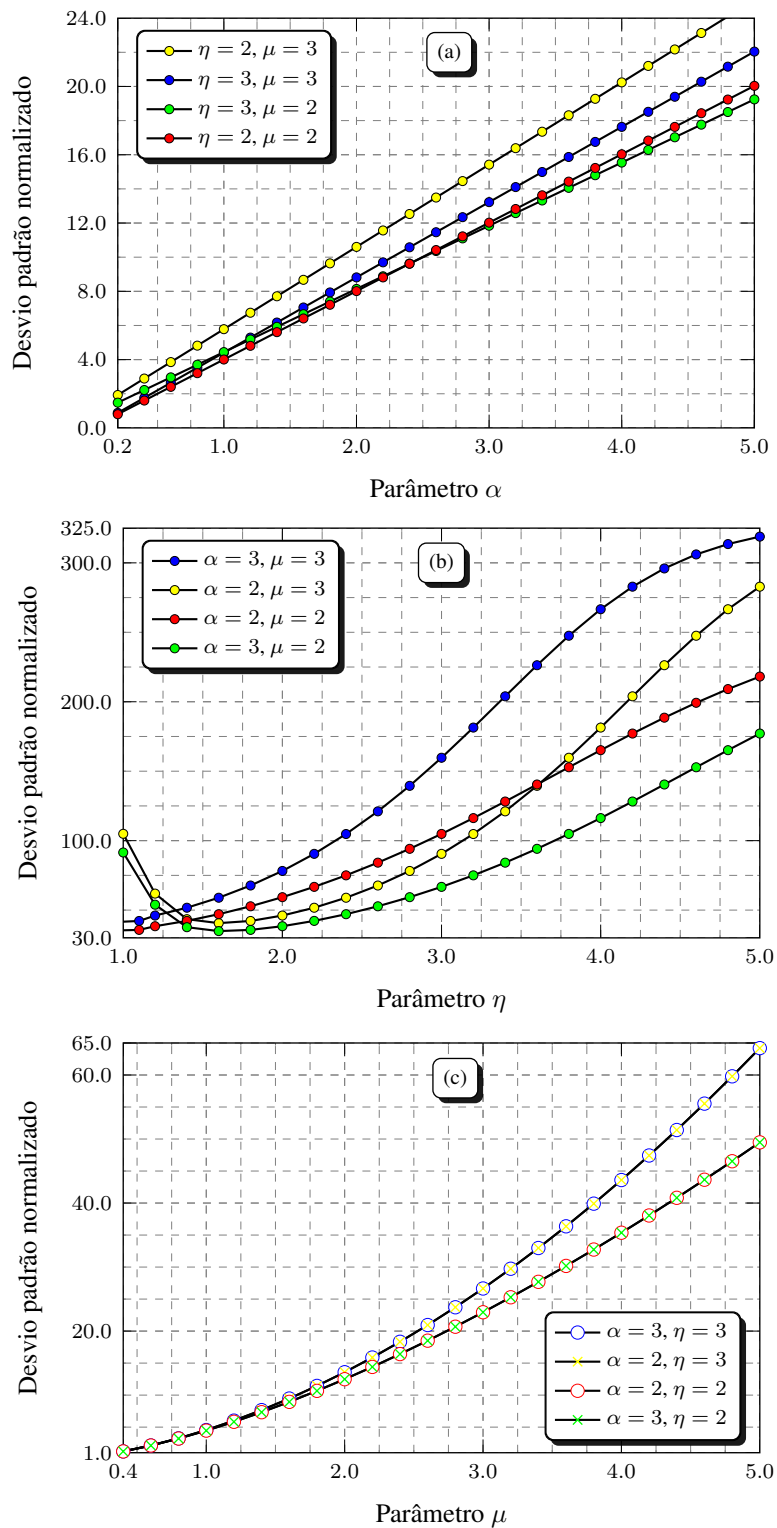


Figura 4.14: Curvas de desvio padrão normalizado, obtidas de (2.30), para os parâmetros (a) α , (b) η e (c) μ , da distribuição α - η - μ .

Capítulo 5

Conclusões e Propostas para Novas Pesquisas

As telecomunicações no ambiente rádio-móvel têm uma grande importância no cenário global na atualidade, o que faz com que seja importante estudar formas de fazer com que a comunicação aconteça com qualidade da melhor maneira possível. Com o objetivo de implementar sistemas de comunicação que forneçam serviços de maior qualidade aos usuários, é necessário conhecer o comportamento do sinal que se propaga neste tipo de canal. O modelamento deste comportamento é feito utilizando modelos estocásticos. Dentre os diversos modelos conhecidos, existem aqueles que são generalizados, as distribuições α - κ - μ e α - η - μ .

O objetivo deste trabalho foi estimar o comportamento do sinal que se propaga em ambientes modelados por estas distribuições utilizando o método da máxima verossimilhança. O método foi descrito e exemplificado para distribuições conhecidas no capítulo 2, juntamente com algumas outras definições e informações relativas à área de estudo de estimação de parâmetros.

Uma análise das distribuições α - κ - μ e α - η - μ foi feita no capítulo 3, mostrando que as mesmas são capazes de abranger diferentes efeitos que o sinal pode sofrer. Estes efeitos estão relacionados aos fenômenos físicos que ocorrem com a onda eletromagnética.

No capítulo 4 foi mostrada a aplicação do método da máxima verossimilhança para estimar os parâmetros das distribuições α - κ - μ e α - η - μ , sendo deduzidas as funções de log-verossimilhança e suas respectivas derivadas. A dedução destas expressões são contribuições originais deste trabalho. Além disso, foram mostrados os métodos

utilizados na geração das amostras que seriam posteriormente utilizadas para obter os resultados numéricos relativos aos estimadores. A adaptação do método do Espectro de Smith também constitui uma contribuição original deste trabalho. Finalmente, ao final do capítulo 4, os resultados numéricos obtidos quanto aos estimadores dos parâmetros das distribuições e quanto ao CRLB dos parâmetros foram mostrados e descritos.

Os resultados obtidos neste trabalho mostraram que a técnica de máxima verossimilhança apresenta bom desempenho na estimação dos comportamentos de variáveis aleatórias e, especificamente, para as distribuições α - κ - μ e α - η - μ foi possível prever de forma específica o comportamento do nível instantâneo do sinal no ambiente rádio-móvel modelado por essas distribuições, com erros de baixa ordem de grandeza. Estes resultados abrem oportunidades para a otimização de sistemas de comunicação operando nestes tipos de canais. Além disso, as curvas de desvio padrão normalizado encontradas sustentam o comportamento obtido para os estimadores nos resultados numéricos.

Como propostas para trabalhos futuros em relação a este, pode-se indicar: o desenvolvimento de estimadores de máxima verossimilhança para distribuição α - κ - η - μ , que engloba as duas distribuições que foram o foco deste trabalho; o estudo das contribuições da estimação dos parâmetros no desempenho final de um sistema de comunicação; o desenvolvimento de estimadores de parâmetros em distribuições α - κ - μ e α - η - μ correlacionados, utilizados no modelamento do canal quando o sistema emprega tecnologia MIMO; realização de uma comparação entre o desempenho do método da máxima verossimilhança e outros métodos de estimação de parâmetros para as distribuições generalizadas.

Referências Bibliográficas

- [1] J. I. Smith, “A computer generated multipath fading simulation for mobile radio,” *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 24, no. 3, pp. 39–40, Aug. 1975.
- [2] M. D. Yacoub, *Foundations of Mobile Radio Engineering*. USA: CRC Press, 1993.
- [3] T. S. Rappaport, *Wireless Communications: Principles and Practice*. Prentice Hall, 2002.
- [4] L. R. J. W. Strutt, *Phil. Mag.*, 1880, vol. 73(10).
- [5] S. Rice, “Mathematical analysis of random noise,” *Bell System Technical Journal*, vol. 23, pp. 282–332, Jul. 1944.
- [6] R. Hoyt, “Probability functions for the modulus and angle of the normal complex variate,” *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 26, pp. 318–359, Apr. 1947.
- [7] M. Nakagami, “The m -distribution - a general formula of intensity distribution of rapid fading.” in *Statistical Methods in Radio Wave Propagation*, 1960, pp. 3–36.
- [8] M. D. Yacoub, “The α - μ distribution: A physical fading model for the Stacy distribution,” *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 56, no. 1, pp. 27–34, Jan. 2007.
- [9] —, “The κ - μ distribution and the η - μ distribution,” *IEEE Antennas Propag. Mag.*, vol. 49, no. 1, pp. 68–81, Feb. 2007.
- [10] G. Fraidenraich and M. D. Yacoub, “The α - η - μ and α - κ - μ fading distributions,” in *Spread Spectrum Techniques and Applications, 2006 IEEE Ninth International Symposium on*, Aug. 2006, pp. 16–20.
- [11] A. Tsakmalis, S. Chatzinotas, and B. Ottersten, “Modulation and coding classification for adaptive power control in 5G cognitive communications,” in *Signal*

- Processing Advances in Wireless Communications (SPAWC), 2014 IEEE 15th International Workshop on*, Jun. 2014, pp. 234–238.
- [12] S. Kumar, “Approximate outage probability and capacity for κ - μ shadowed fading,” *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 4, no. 3, pp. 301–304, Jun. 2015.
- [13] M. Stefanovic, S. R. Panic, D. Stefanovic, B. Nikolic, and A. Cvetkovic, “Second order statistics of selection combining receiver over κ - μ fading channels subject to co-channel interferences,” *Radio Science*, vol. 47, no. 6, pp. n/a–n/a, 2012. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1029/2012RS004997>
- [14] P. C. Sofotasios and S. Freear, “The α - κ - μ extreme distribution: Characterizing nonlinear severe fading conditions,” *Proc. of Australasian Telecommunication Networks and Applications Conference (ATNAC)*, pp. 1–4, Nov. 2011.
- [15] G. Chandrasekaran and S. Kalyani, “Performance analysis of cooperative spectrum sensing over κ - μ shadowed fading,” *IEEE Wireless Commun. Lett.*, vol. 4, no. 5, pp. 533–556, Oct. 2015.
- [16] R. Cogliatti and R. A. A. de Souza, “A near-100% efficient algorithm for generating α - κ - μ and α - η - μ variates,” in *Vehicular Technology Conference (VTC Fall), 2013 IEEE 78th*, Sep. 2013, pp. 1–5.
- [17] P. K. Chong, S.-E. Yoo, S. H. Kim, and D. Kim, “Wind-blown foliage and human-induced fading in ground-surface narrowband communications at 400 MHz,” *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 60, no. 4, pp. 1326–1336, May 2011.
- [18] S. Jovkovic, D. Milic, D. Djosic, S. Panic, S. Veljkovic, and C. Stefanovic, “Second order statistics of SC receiver output SIR in the presence of α - κ - μ multipath fading and co-channel interference,” *International Conference on Communications, Signal Processings and Computers (CSCP 2014) Interlaken, Switzerland*, vol. 14, pp. 27–31, Feb. 2014.
- [19] J. Zhang, Z. Tan, H. Wang, Q. Huang, and L. Hanzo, “The effective throughput of MISO systems over κ - μ fading channels,” *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 63, no. 2, pp. 943–947, Feb. 2014.
- [20] R. Subadar, T. S. B. Reddy, and P. R. Sahu, “Performance of an L -SC receiver over κ - μ and η - μ fading channels,” in *2010 IEEE International Conference on Communications (ICC)*, May 2010, pp. 1–5.

- [21] R. A. A. de Souza, A. M. O. Ribeiro, and D. A. Guimarães, “On the efficient generation of α - κ - μ and α - η - μ white samples with applications,” *International Journal of Antennas and Propagation*, vol. 2015, pp. 1–13, Aug. 2015. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1155/2015/873890>
- [22] P. C. Sofotasios, E. Rebeiz, L. Zhang, T. A. Tsiftsis, D. Cabric, and S. Freear, “Energy detection based spectrum sensing over κ - μ and κ - μ extreme fading channels,” *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 62, no. 3, pp. 1031–1040, Mar. 2013.
- [23] X. Wang and N. C. Beaulieu, “Switching rates of dual selection diversity in κ - μ and η - μ fading channels,” in *Wireless Communications and Networking Conference, 2009. WCNC 2009. IEEE*, Apr. 2009, pp. 1–5.
- [24] D. Krstic, M. Stefanovic, V. Milenkovic, and D. Bandjur, “Level crossing rate of product of two α - κ - μ random variables,” *5th International Conference on Circuits, Systems, Control, Signals (CSCS '14), Salerno, Italy*, vol. 13, pp. 622–630, Feb. 2014.
- [25] S. Jovkovic, D. Milic, D. Djosic, M. Petrovic, S. Veljkovic, and C. Stefanovic, “Level crossing rate of L -branch SC receiver over α - κ - μ fading channel in the presence α - κ - μ co-channel interference,” *WSEAS Transactions on Communications*, vol. 13, pp. 249–255, Feb. 2014.
- [26] A. K. Papazafeiropoulos and S. A. Kotsopoulos, “Second-order statistics for the envelope of α - κ - μ fading channels,” *IEEE Commun. Lett.*, vol. 14, no. 4, pp. 291–293, Apr. 2010.
- [27] P. C. Sofotasios and S. Freear, “The α - κ - μ /gamma distribution: A generalized non-linear multipath/shadowing fading model,” in *2011 Annual IEEE India Conference (INDICON)*, Dec. 2011, pp. 1–6.
- [28] K. P. Peppas, “Sum of nonidentical squared κ - μ variates and applications in the performance analysis of diversity receivers,” *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 61, no. 1, pp. 413–419, Jan. 2012.
- [29] M. R. Bhatnagar, “On the sum of correlated squared κ - μ shadowed random variables and its application to performance analysis of MRC,” *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 64, no. 6, pp. 2678–2684, Jun. 2015.
- [30] R. Cogliatti, R. A. A. de Souza, and M. D. Yacoub, “Practical highly efficient algorithm for generating κ - μ and η - μ variates and a near-100% efficient algorithm

- for generating α - μ variates,” *IEEE Commun. Lett.*, vol. 16, no. 11, pp. 1768–1771, Nov. 2012.
- [31] E. Salahat and A. Hakam, “Performance analysis of α - η - μ and α - κ - μ generalized mobile fading channels,” in *European Wireless 2014; 20th European Wireless Conference*, May 2014, pp. 1–6.
- [32] A. M. O. Ribeiro and E. Conforti, “Asymptotically efficient moment-based estimator of the κ parameter for the κ - μ distribution,” *IEEE Antennas Wireless Propag. Lett.*, vol. 14, pp. 598–601, Feb. 2015.
- [33] J. Reig and L. Rubio, “Estimation of the composite fast fading and shadowing distribution using the log-moments in wireless communications,” *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 12(8), pp. 3672–3681, Aug. 2013.
- [34] A. Leon-Garcia, *Probability, Statistics, and Random Processes for Electrical Engineering*. Upper Saddle River, NJ: Pearson Education, 2008.
- [35] H. Cramér, *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1999.
- [36] A. M. O. Ribeiro, “Contribuições à caracterização estatística do canal de rádio móvel e estimação de parâmetros por máxima verossimilhança,” Ph.D. dissertation, Unicamp, 2013.
- [37] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover, 1972.
- [38] J. S. Júnior, “Análise de estimadores para canais com desnaecimento rápido e não seletivo em frequência modelados de acordo com as distribuições κ - μ e η - μ ,” Master’s thesis, Inatel, 2006.
- [39] A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, ser. McGraw-Hill Series in Electrical Engineering. McGraw-Hill, 1984.
- [40] W. R. Braun and U. Dersch, “A physical mobile radio channel model,” vol. 40, no. 2, pp. 472–482, May 1991.
- [41] M. K. Simon and M.-S. Alouini, *Digital Communication over Fading Channels*. New York, NY: John Wiley & Sons, 2000.
- [42] A. Abdi, C. Tepedelenlioglu, and M. Kaveh, “On the estimation of the K parameter for the Rice fading distribution,” *IEEE Communications Letters*, vol. 5, no. 3, pp. 92–94, Mar. 2001.

-
- [43] R. Cogliatti and R. A. A. de Souza, “A near-100% Efficient Algorithm for Generating α - κ - μ and α - η - μ Variates,” in *Veh. Technology Conf. (VTC Fall), 2013 IEEE 78th*, Las Vegas, NV, EUA, Sep. 2013.

Apêndice A

Códigos em Matlab para Geração de Amostras

```
%%Função para gerar amostras aleatórias alpha-kappa-mu pela
definição da %%distribuição, a partir dos valores dos parâmetros e
do número de %%amostras.

function defku = alphakappamu(n,a,k,m)

p=1e-5;
for cont=1:500
    for i =1:m
        x = randn(1,n);
        y = randn(1,n);
        q = sqrt(2*var(x)*k-(p^2));

        r(i,:)=((x+p).^2)+((y+q).^2);
    end
    r = (sum(r,1)).^(1/a);
    ro = r/(mean(r.^a)^(1/a));

    diret = strcat('amostra',num2str(cont),'.dat')
    dlmwrite(diret,ro')
end
```

```
%%Função para gerar amostras aleatórias alpha-kappa-mu pela
Aceitação-%%Rejeição, a partir dos valores dos parâmetros e do
número de %%amostras.

function alphakappamuaccrejm = akmaccrejm(n,a,k,m)

for i=1:500
    j=1;
    x = zeros(1,n);

    b = linspace(0,3,1e6);
    c = alphakappamu(a,k,m,b); %Função que calcula o valor da FDP
alpha-kappa-mu, para os valores de alpha, kappa, mu e rho,
respectivamente.

    maior = max(c);

    while(j<=n)
        y = unifrnd(0,3);
        p = alphakappamu(a,k,m,y);
        t = p./maior;
        u = unifrnd(0,1);

        if(u<=t)
            x(j) = y;
            j = j+1;
        end
    end

    diret = strcat('amostra',num2str(i),'.dat')
    dlmwrite(diret,x')
end
```

```

%%Rotina para gerar amostras aleatórias alpha-kappa-mu pelo método
do
%%Espectro de Smith, a partir dos valores dos parâmetros e do
número de
%%amostras.

for cont=1:520
    %%Definições dos valores iniciais
    k = 2;
    p = 1e-5;
    vr = 2;
    m = 5;
    N = 2^15;
    fc = 600e6;
    fm = (80/3.6)*(fc/3e8);
    deltaf=2*fm/(N-1);
    a = 2;

    %%Processamento

    for i=1:m
        pos1=
complex(sqrt(vr)*randn(1,N/2),sqrt(vr)*randn(1,N/2));
        neg1= conj(pos1);
        x = [fliplr(neg1) pos1];
        pos2=complex(sqrt(vr)*randn(1,N/2),sqrt(vr)*randn(1,N/2));
        neg2=conj(pos2);
        y=[fliplr(neg2) pos2];
        f = linspace(-fm+0.01, fm-0.01,N);
        S = 1.5./(pi*fm.*sqrt(1-((f./fm).^2)));
        x1 = x.*sqrt(S);
        y1= y.*sqrt(S);
        xt = abs(iff(x1)).*((rand(1,length(x1))>0.5)*2-1);
        yt = abs(iff(y1)).*((rand(1,length(x1))>0.5)*2-1);
        q = sqrt(2*var(xt)*k-(p^2));
        r(i,:)=((xt+p).^2)+((yt+q).^2);
    end

    %%Normalização da envoltória

    r = (sum(r,1)).^(1/a);
    ro = r/(mean(r.^a).^(1/a));

    %%Exportação dos dados

    diret = strcat('amostra',num2str(cont),'.dat')
    dlmwrite(diret,ro')
end

```

```
%%Função para gerar amostras aleatórias alpha-eta-mu pela
definição da %%distribuição, a partir dos valores dos parâmetros e
do número de %%amostras.

function alphaetamudef=ahmdef(n,a,h,m)

for i=1:500
    sdx=2;
    sdy=sqrt((sdx^2)/h);

    Xi = (sdx * randn(2*m,n)).^2;
    Yi = (sdy * randn(2*m,n)).^2;

    r = (sum(Xi,1) + sum(Yi,1)).^(1/a);

    ro = r/(mean(r.^a).^(1/a));

    diret= strcat('amostra',num2str(i),'.dat')
    dlmwrite(diret,ro')
end
```



```
%%Função para gerar amostras aleatórias alpha-eta-mu pela
Aceitação-%%Rejeição, a partir dos valores dos parâmetros e do
número de %%amostras.

function alphaetamuaccrejm = ahmaccrejm(n,a,h,m)

for i=1:500
    j=1;
    x = zeros(1,n);

    b = linspace(0,3,1e6);
    c = alphaetamu(a,h,m,b); %Função que calcula o valor da FDP
alpha-eta-mu, para os valores de alpha, eta, mu e rho,
respectivamente.

    maior = max(c);

    while(j<=n)
        y = unifrnd(0,4);
        p = alphaetamu(a,h,m,y);
        t = p./maior;
        u = unifrnd(0,1);

        if(u<=t)
            x(j) = y;
            j = j+1;
        end
    end

    diret = strcat('amostra',num2str(i),'.dat')
    dlmwrite(diret,x')
end
```

```
%%Função para gerar amostras aleatórias alpha-eta-mu pela
Aceitação-%%Rejeição, a partir dos valores dos parâmetros e do
número de %%amostras.

function alphaetamuaccrejm = ahmaccrejm(n,a,h,m)

for i=1:500
    j=1;
    x = zeros(1,n);

    b = linspace(0,3,1e6);
    c = alphaetamu(a,h,m,b); %Função que calcula o valor da FDP
alpha-eta-mu, para os valores de alpha, eta, mu e rho,
respectivamente.

    maior = max(c);

    while(j<=n)
        y = unifrnd(0,4);
        p = alphaetamu(a,h,m,y);
        t = p./maior;
        u = unifrnd(0,1);

        if(u<=t)
            x(j) = y;
            j = j+1;
        end
    end

    diret = strcat('amostra',num2str(i),'.dat')
    dlmwrite(diret,x')
end
```

Apêndice B

Códigos em Mathematica para Estimação de Parâmetros

```

Rotina no software Mathematica para importar vetores
de amostras e estimar parâmetros de uma distribuição  $\alpha - \kappa - \mu$ 

AbsoluteTiming[

alpha = ConstantArray[0, 520];
kappa = ConstantArray[0, 520];
mu = ConstantArray[0, 520];
SetSharedVariable[alpha]
SetSharedVariable[kappa]
SetSharedVariable[mu]
ParallelTable[ $\rho$  = Import["amostra" <> IntegerString[j] <> ".dat", "List"]; *
  Os dados de entrada devem ser organizados na forma de um vetor coluna. *
  Lml[ $\alpha$ _,  $\kappa$ _,  $\mu$ _] = Length[ $\rho$ ] * (Log[ $\alpha$  * ( $\kappa$  ^ ((1 -  $\mu$ ) / 2)) * ((1 +  $\kappa$ ) ^ ((1 +  $\mu$ ) / 2)) *  $\mu$ ] -
     $\mu$  *  $\kappa$ ] + ((( $\alpha$  * (1 +  $\mu$ ) / 2) - 1) * Sum[Log[ $\rho$ [[i]], {i, Length[ $\rho$ ]}] -
     $\mu$  * (1 +  $\kappa$ ) * Sum[( $\rho$ [[i]] ^  $\alpha$ ), {i, Length[ $\rho$ ]}] +
    Sum[Log[BesselI[ $\mu$  - 1, 2 * Sqrt[ $\kappa$  * (1 +  $\kappa$ )] *  $\mu$  * (( $\rho$ [[i]] ^ ( $\alpha$  / 2))], {i, Length[ $\rho$ ]}];
  x = FindMaximum[Lml[ $\alpha$ ,  $\kappa$ ,  $\mu$ ], {{ $\alpha$ , 2.5}, { $\kappa$ , 2.5}, { $\mu$ , 2.5}}];
  alpha[[j]] =  $\alpha$  /. x[[2, 1]]; kappa[[j]] =  $\kappa$  /. x[[2, 2]];
  mu[[j]] =  $\mu$  /. x[[2, 3]]; {j, 520}
Export["alphaest.dat", alpha];
Export["kappaest.dat", kappa];
Export["muest.dat", mu]; * Os dados são exportados na forma de um vetor coluna. *

```

```

Rotina no software Mathematica para importar vetores
de amostras e estimar parâmetros de uma distribuição  $\alpha - \eta - \mu$ 

AbsoluteTiming[
alpha = ConstantArray[0, 500];
eta = ConstantArray[0, 500];
mu = ConstantArray[0, 500];
SetSharedVariable[alpha]
SetSharedVariable[eta]
SetSharedVariable[mu]
ParallelTable[ $\rho$  = Import["amostra" <> IntegerString[j] <> ".dat", "List"]; *
Os dados de entrada devem ser oganizados na forma de um vetor coluna. *
Lml[ $\alpha$ _,  $\eta$ _,  $\mu$ _] = Length[ $\rho$ ] * (Log[( $\alpha$  * ( $\eta$  - 1) ^ (0.5 -  $\mu$ )) *
(( $\eta$  + 1) ^ (0.5 +  $\mu$ )) * Sqrt[Pi] * ( $\mu$  ^ (0.5 +  $\mu$ )) / (Sqrt[ $\eta$ ] * Gamma[ $\mu$ ])]) +
( $\alpha$  * (0.5 +  $\mu$ ) - 1) * Sum[Log[ $\rho$ [[k]]], {k, Length[ $\rho$ ]}] -
(((1 +  $\eta$ ) ^ 2) *  $\mu$ ) / (2 *  $\eta$ ) * Sum[ $\rho$ [[k]] ^  $\alpha$ , {k, Length[ $\rho$ ]}] +
Sum[Log[BesselI[ $\mu$  - 0.5, ((( $\eta$  ^ 2) - 1) *  $\mu$ ) / (2 *  $\eta$ )] * ( $\rho$ [[k]] ^  $\alpha$ )], {k, Length[ $\rho$ ]}];
y = FindRoot[{1 / (-1 + (((1 +  $\eta$ ) ^ (2 *  $\mu$ )) * Gamma[2 *  $\mu$ ] * Gamma[(2 * 1) /  $\alpha$ ] + 2 *  $\mu$ ]) /
((2 ^ (2 *  $\mu$ )) * ( $\eta$  ^  $\mu$ ) * (Gamma[(1 /  $\alpha$ ] + 2 *  $\mu$ ] ^ 2))) *
(Hypergeometric2F1[(1 /  $\alpha$ ] +  $\mu$ , (1 + (2 * 1) /  $\alpha$ ) / 2 +  $\mu$ , 0.5 +  $\mu$ ,
((-1 +  $\eta$ ) ^ 2) / ((1 +  $\eta$ ) ^ 2)] / (Hypergeometric2F1[(1 / (2 *  $\alpha$ )] +  $\mu$ ,
( $\alpha$  + 1) / (2 *  $\alpha$ ) +  $\mu$ , 0.5 +  $\mu$ , (-1 +  $\eta$ ) ^ 2 / ((1 +  $\eta$ ) ^ 2) ^ 2)))] =
((Mean[ $\rho$  ^ 1] ^ 2) / (Mean[ $\rho$  ^ (2 * 1)] - (Mean[ $\rho$  ^ 1] ^ 2)) ,
1 / (-1 + (((1 +  $\eta$ ) ^ (2 *  $\mu$ )) * Gamma[2 *  $\mu$ ] * Gamma[(2 * 2) /  $\alpha$ ] + 2 *  $\mu$ ) /
((2 ^ (2 *  $\mu$ )) * ( $\eta$  ^  $\mu$ ) * (Gamma[(2 /  $\alpha$ ] + 2 *  $\mu$ ] ^ 2))) *
(Hypergeometric2F1[(2 /  $\alpha$ ] +  $\mu$ , 0.5 * (1 + (2 * 2) /  $\alpha$ ) +  $\mu$ , 0.5 +  $\mu$ ,
((-1 +  $\eta$ ) ^ 2) / ((1 +  $\eta$ ) ^ 2)] / (Hypergeometric2F1[(2 / (2 *  $\alpha$ )] +  $\mu$ ,
( $\alpha$  + 2) / (2 *  $\alpha$ ) +  $\mu$ , 0.5 +  $\mu$ , (-1 +  $\eta$ ) ^ 2 / ((1 +  $\eta$ ) ^ 2) ^ 2)))] =
((Mean[ $\rho$  ^ 2] ^ 2) / (Mean[ $\rho$  ^ (2 * 2)] - (Mean[ $\rho$  ^ 2] ^ 2)) ,
1 / (-1 + (((1 +  $\eta$ ) ^ (2 *  $\mu$ )) * Gamma[2 *  $\mu$ ] * Gamma[(2 * 3) /  $\alpha$ ] + 2 *  $\mu$ ) /
((2 ^ (2 *  $\mu$ )) * ( $\eta$  ^  $\mu$ ) * (Gamma[(3 /  $\alpha$ ] + 2 *  $\mu$ ] ^ 2))) *
(Hypergeometric2F1[(3 /  $\alpha$ ] +  $\mu$ , 0.5 * (1 + (2 * 3) /  $\alpha$ ) +  $\mu$ , 0.5 +  $\mu$ ,
((-1 +  $\eta$ ) ^ 2) / ((1 +  $\eta$ ) ^ 2)] / (Hypergeometric2F1[(3 / (2 *  $\alpha$ )] +  $\mu$ ,
( $\alpha$  + 3) / (2 *  $\alpha$ ) +  $\mu$ , 0.5 +  $\mu$ , (-1 +  $\eta$ ) ^ 2 / ((1 +  $\eta$ ) ^ 2) ^ 2)))] =
((Mean[ $\rho$  ^ 3] ^ 2) / (Mean[ $\rho$  ^ (2 * 3)] - (Mean[ $\rho$  ^ 3] ^ 2)) ,
{{ $\alpha$ , 2.5}, { $\eta$ , 2.5}, { $\mu$ , 2.5}}]; x = FindMaximum[
Lml[ $\alpha$ ,  $\eta$ ,  $\mu$ ],
{ $\alpha$ ,  $\alpha$  /. y[[1]]},
{ $\eta$ ,  $\eta$  /. y[[2]]}, { $\mu$ ,  $\mu$  /. y[[3]]}];
alpha[[j]] =  $\alpha$  /. x[[2, 1]]; eta[[j]] =
 $\eta$  /. x[[2, 2]]; mu[[j]] =
 $\mu$  /. x[[2, 3]]; {j,
500}
Export["alphaest.dat", alpha];
Export["etaest.dat", eta];
Export["muest.dat", mu]; * Os dados são exportados na forma de um vetor coluna. *

```


Apêndice C

Códigos em Mathematica para Cálculo do CRLB

Rotina para gerar os dados dos gráficos da informação de Fisher para a distribuição $\alpha - \kappa - \mu$.

```

a = ConstantArray[0, 25];
k = ConstantArray[0, 25];
m = ConstantArray[0, 25];
fp = (( $\alpha * (\kappa^{(1-\mu)/2}) * ((1+\kappa)^{(1+\mu)/2}) * \mu * (\rho^{(\alpha * (1+\mu)/2 - 1)})$ ) /
      Exp[ $\mu * (\kappa + (\rho^\alpha) + \kappa * (\rho^\alpha))$ ]) * BesselI[ $\mu - 1, 2 * \text{Sqrt}[\kappa * (1+\kappa)] * \mu * (\rho^{(\alpha/2)})$ ];
da = D[(Log[ $\alpha * (\kappa^{(1-\mu)/2}) * ((1+\kappa)^{(1+\mu)/2}) * \mu - \mu * \kappa$ ]) +
      (( $\alpha * (1+\mu) / 2 - 1$ ) * Log[ $\rho - \mu * (1+\kappa) * (\rho^\alpha)$ ]) +
      Log[BesselI[ $\mu - 1, 2 * \text{Sqrt}[\kappa * (1+\kappa)] * \mu * (\rho^{(\alpha/2)})$ ]]], { $\alpha$ };
dk = D[(Log[ $\alpha * (\kappa^{(1-\mu)/2}) * ((1+\kappa)^{(1+\mu)/2}) * \mu - \mu * \kappa$ ]) +
      (( $\alpha * (1+\mu) / 2 - 1$ ) * Log[ $\rho - \mu * (1+\kappa) * (\rho^\alpha)$ ]) +
      Log[BesselI[ $\mu - 1, 2 * \text{Sqrt}[\kappa * (1+\kappa)] * \mu * (\rho^{(\alpha/2)})$ ]]], { $\kappa$ };
dm = D[(Log[ $\alpha * (\kappa^{(1-\mu)/2}) * ((1+\kappa)^{(1+\mu)/2}) * \mu - \mu * \kappa$ ]) +
      (( $\alpha * (1+\mu) / 2 - 1$ ) * Log[ $\rho - \mu * (1+\kappa) * (\rho^\alpha)$ ]) +
      Log[BesselI[ $\mu - 1, 2 * \text{Sqrt}[\kappa * (1+\kappa)] * \mu * (\rho^{(\alpha/2)})$ ]]], { $\mu$ };
i = 0.2;
j = 1;
Do[
   $\alpha = i$ ;
   $\kappa = 3$ ;
   $\mu = 3$ ;
  fishmat =
    {{NIntegrate[ $da * da * fp, \{\rho, 0, \text{Infinity}\}$ ], NIntegrate[ $da * dk * fp, \{\rho, 0, \text{Infinity}\}$ ],
      NIntegrate[ $da * dm * fp, \{\rho, 0, \text{Infinity}\}$ ], {NIntegrate[ $dk * da * fp, \{\rho, 0, \text{Infinity}\}$ ],
      NIntegrate[ $dk * dk * fp, \{\rho, 0, \text{Infinity}\}$ ], NIntegrate[ $dk * dm * fp, \{\rho, 0, \text{Infinity}\}$ ],
      {NIntegrate[ $dm * da * fp, \{\rho, 0, \text{Infinity}\}$ ], NIntegrate[ $dm * dk * fp, \{\rho, 0, \text{Infinity}\}$ ],
      NIntegrate[ $dm * dm * fp, \{\rho, 0, \text{Infinity}\}$ ]}];
  varmat = Inverse[fishmat];
  a[[j]] = Sqrt[varmat[[1, 1]]];
  j = j + 1;
  i = i + 0.2; , {n, 25}]
i = 0.2;
j = 1;
Do[
   $\alpha = 3$ ;
   $\kappa = i$ ;
   $\mu = 3$ ;
  fishmat =
    {{NIntegrate[ $da * da * fp, \{\rho, 0, \text{Infinity}\}$ ], NIntegrate[ $da * dk * fp, \{\rho, 0, \text{Infinity}\}$ ],
      NIntegrate[ $da * dm * fp, \{\rho, 0, \text{Infinity}\}$ ], {NIntegrate[ $dk * da * fp, \{\rho, 0, \text{Infinity}\}$ ],
      NIntegrate[ $dk * dk * fp, \{\rho, 0, \text{Infinity}\}$ ], NIntegrate[ $dk * dm * fp, \{\rho, 0, \text{Infinity}\}$ ],
      {NIntegrate[ $dm * da * fp, \{\rho, 0, \text{Infinity}\}$ ], NIntegrate[ $dm * dk * fp, \{\rho, 0, \text{Infinity}\}$ ],
      NIntegrate[ $dm * dm * fp, \{\rho, 0, \text{Infinity}\}$ ]}];
  varmat = Inverse[fishmat];
  k[[j]] = Sqrt[varmat[[2, 2]]];
  j = j + 1;
  i = i + 0.2; , {o, 25}]
i = 0.2;
j = 1;
Do[
   $\alpha = 3$ ;
   $\kappa = 3$ ;
   $\mu = i$ ;
  fishmat =
    {{NIntegrate[ $da * da * fp, \{\rho, 0, \text{Infinity}\}$ ], NIntegrate[ $da * dk * fp, \{\rho, 0, \text{Infinity}\}$ ],
      NIntegrate[ $da * dm * fp, \{\rho, 0, \text{Infinity}\}$ ], {NIntegrate[ $dk * da * fp, \{\rho, 0, \text{Infinity}\}$ ],
      NIntegrate[ $dk * dk * fp, \{\rho, 0, \text{Infinity}\}$ ], NIntegrate[ $dk * dm * fp, \{\rho, 0, \text{Infinity}\}$ ],
      {NIntegrate[ $dm * da * fp, \{\rho, 0, \text{Infinity}\}$ ], NIntegrate[ $dm * dk * fp, \{\rho, 0, \text{Infinity}\}$ ],
      NIntegrate[ $dm * dm * fp, \{\rho, 0, \text{Infinity}\}$ ]}];

```


Rotina para gerar os dados dos gráficos da informação de Fisher para a distribuição $\alpha - \eta - \mu$.

```

a = ConstantArray[0, 25];
h = ConstantArray[0, 25];
m = ConstantArray[0, 25];

fp = (( $\alpha$  * (( $\eta$  - 1) ^ (0.5 -  $\mu$ )) * (( $\eta$  + 1) ^ (0.5 +  $\mu$ )) * ( $\rho$  ^ ( $\alpha$  * (0.5 +  $\mu$ ) - 1))) /
(Exp[(((1 +  $\eta$ ) ^ 2) *  $\mu$  * ( $\rho$  ^  $\alpha$ )) / (2 *  $\eta$ )] * Sqrt[ $\eta$ ] * Gamma[ $\mu$ ]) *
Sqrt[Pi] * ( $\mu$  ^ (0.5 +  $\mu$ )) * BesselI[ $\mu$  - 0.5, ((( $\eta$  ^ 2) - 1) *  $\mu$  * ( $\rho$  ^  $\alpha$ ) / (2 *  $\eta$ ))];
da = D[(Log[ $\alpha$  * (( $\eta$  - 1) ^ (0.5 -  $\mu$ )) * (( $\eta$  + 1) ^ (0.5 +  $\mu$ )) *
Sqrt[Pi] * ( $\mu$  ^ (0.5 +  $\mu$ )) / (Sqrt[ $\eta$ ] * Gamma[ $\mu$ ])]) +
( $\alpha$  * (0.5 +  $\mu$ ) - 1) Log[ $\rho$ ] - (((1 +  $\eta$ ) ^ 2) *  $\mu$ ) / (2 *  $\eta$ )) * ( $\rho$  ^  $\alpha$ ) +
Log[BesselI[ $\mu$  - 0.5, ((( $\eta$  ^ 2) - 1) *  $\mu$ ) / (2 *  $\eta$ )) * ( $\rho$  ^  $\alpha$ )], { $\alpha$ ];
dh = D[(Log[ $\alpha$  * (( $\eta$  - 1) ^ (0.5 -  $\mu$ )) * (( $\eta$  + 1) ^ (0.5 +  $\mu$ )) *
Sqrt[Pi] * ( $\mu$  ^ (0.5 +  $\mu$ )) / (Sqrt[ $\eta$ ] * Gamma[ $\mu$ ])]) +
( $\alpha$  * (0.5 +  $\mu$ ) - 1) Log[ $\rho$ ] - (((1 +  $\eta$ ) ^ 2) *  $\mu$ ) / (2 *  $\eta$ )) * ( $\rho$  ^  $\alpha$ ) +
Log[BesselI[ $\mu$  - 0.5, ((( $\eta$  ^ 2) - 1) *  $\mu$ ) / (2 *  $\eta$ )) * ( $\rho$  ^  $\alpha$ )], { $\eta$ ];
dm = D[(Log[ $\alpha$  * (( $\eta$  - 1) ^ (0.5 -  $\mu$ )) * (( $\eta$  + 1) ^ (0.5 +  $\mu$ )) *
Sqrt[Pi] * ( $\mu$  ^ (0.5 +  $\mu$ )) / (Sqrt[ $\eta$ ] * Gamma[ $\mu$ ])]) +
( $\alpha$  * (0.5 +  $\mu$ ) - 1) Log[ $\rho$ ] - (((1 +  $\eta$ ) ^ 2) *  $\mu$ ) / (2 *  $\eta$ )) * ( $\rho$  ^  $\alpha$ ) +
Log[BesselI[ $\mu$  - 0.5, ((( $\eta$  ^ 2) - 1) *  $\mu$ ) / (2 *  $\eta$ )) * ( $\rho$  ^  $\alpha$ )], { $\mu$ ];
i = 0.4;
j = 1;
Do[
 $\alpha$  = i;
 $\eta$  = 3;
 $\mu$  = 3;
fishmat =
{{NIntegrate[da * da * fp, { $\rho$ , 0, Infinity}], NIntegrate[da * dh * fp, { $\rho$ , 0, Infinity}],
NIntegrate[da * dm * fp, { $\rho$ , 0, Infinity}], {NIntegrate[dh * da * fp, { $\rho$ , 0, Infinity}],
NIntegrate[dh * dh * fp, { $\rho$ , 0, Infinity}], NIntegrate[dh * dm * fp, { $\rho$ , 0, Infinity}],
{NIntegrate[dm * da * fp, { $\rho$ , 0, Infinity}], NIntegrate[dm * dh * fp, { $\rho$ , 0, Infinity}],
NIntegrate[dm * dm * fp, { $\rho$ , 0, Infinity]}}];
varmat = Inverse[fishmat];
a[[j]] = Sqrt[varmat[[1, 1]]];
j = j + 1;
i = i + 0.2; , {n, 25}
i = 1;
j = 1;
Do[
 $\alpha$  = 3;
If[i == 1,  $\eta$  = 1.1; ,  $\eta$  = i;];
 $\mu$  = 3;
fishmat =
{{NIntegrate[da * da * fp, { $\rho$ , 0, Infinity}], NIntegrate[da * dh * fp, { $\rho$ , 0, Infinity}],
NIntegrate[da * dm * fp, { $\rho$ , 0, Infinity}], {NIntegrate[dh * da * fp, { $\rho$ , 0, Infinity}],
NIntegrate[dh * dh * fp, { $\rho$ , 0, Infinity}], NIntegrate[dh * dm * fp, { $\rho$ , 0, Infinity}],
{NIntegrate[dm * da * fp, { $\rho$ , 0, Infinity}], NIntegrate[dm * dh * fp, { $\rho$ , 0, Infinity}],
NIntegrate[dm * dm * fp, { $\rho$ , 0, Infinity]}}];
varmat = Inverse[fishmat];
h[[j]] = Sqrt[varmat[[2, 2]]];
j = j + 1;
i = i + 0.2; , {o, 25}
i = 0.4;
j = 1;

```