Dissertação de Mestrado

Rodrigo Bahia Paiva

Estudo dos Efeitos Não Lineares de Automodulação de Fase e Modulação de Fase Cruzada em Fibras Ópticas

2003

Inatel
Instituto Nacional de Telecomunicações

FOLHA DE APROVAÇÃO.

Dissertação defendida e aprovada em _____ /_____ /_____ ,

pela comissão julgadora:

_____

(Profa. Dra. Maria Regina Campos Caputo / DTE - INATEL)

_____

(Prof. Dr. Maurício Silveira / DTE - INATEL)

_____

(Prof. Dr. Rui Fragassi Souza / DMO / FEEC - UNICAMP)

_____

Coordenador do Curso de Mestrado

RODRIGO BAHIA PAIVA

Dissertação apresentada ao Instituto Nacional de Telecomunicações, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

ORIENTADORA: Profa. Dra. Maria Regina Campos Caputo

Santa Rita do Sapucaí

2003

DEDICATÓRIA.

A Deus nosso criador, pois me deu saúde, inteligência e uma vida cheia de graças e realizações, fazendo de mim um vencedor em seu santo nome.

Ao meus pais, Leonardo Paiva e Ana Lúcia B. Paiva, pelo incentivo, o imenso amor e o belo exemplo com que me criaram.

À minha irmã Andreia Ap. Paiva e meu irmão Luciano B. Paiva, os melhores irmãos do mundo, as minhas sobrinhas Larissa e Renata e meu sobrinho João Otávio.

AGRADECIMENTOS.

Quando me senti sozinho, me dissestes...*"Tudo posso naquele que me criou..."* Quando pensei em desistir...*"Toma tua cruz e siga..."* E por muitas vezes, as forças se esgotaram e o caminho pareceu escuro...*"Eu sou a verdadeira luz, quem me segue viverá eternamente..."*. Obrigado por ser meu Pai, meu Deus vivo e verdadeiro, que me ama incondicionalmente...Tu nos criastes vocacionados à vida, a felicidade e à comunhão. E, por tudo isso, gostaria de compartilhar de minha alegria com aqueles que tornaram possível esta realização:

A minha orientadora Profa. Dra. Maria Regina C. Caputo pelo empenho, dedicação com que conduziu meu curso e pela amizade. Um agradecimento especial ao Prof. Dr. Maurício Silveira, co-orientador, pelo apoio em um momento difícil do trabalho. Aos demais professores que contribuíram para meu sucesso Dr. Adonias C. da Silveira, coordenador do mestrado, Dr. José Antônio J. Ribeiro, Dr. Miguel Menasche, Dr. Wilton N. A. Pereira e ao membro externo da banca Prof. Dr. Rui Fragassi Souza DMO / FEEC - UNICAMP.

Aos melhores amigos, da "*Repubrica du Cráudio*" (Augusto, Carlos, Cristiano, Dona Maria, Edmilson, Giovani, Jorge, José Luiz, Juliano, Luiz e Ullysses) e a um amigo que aqui conheci e tornou-se um irmão Cláudio. A muitos outros amigos (as), Carlos Henrique, Deborah, Henrique e Valéria. As pessoas do mestrado Amarildo, André, Cristian, Daniel, Egidio, Helder, Iwanir, Laert, Marcelo, Renan e todos de Campo Belo Hugo, José Willian, Márcio e Túlio....e a tantos mais digo, obrigado.

E meu obrigado, com todo carinho, à garota mais especial que conheço, por tudo aquilo que ela representa para mim. E mesmo sabendo que não estaremos juntos, tenho a certeza que sempre estarás em mim; obrigado por fazer parte da minha vida, Ana Paula.

"*Não podemos amar a Deus que não vemos, se não amarmos as pessoas que vemos...*"

"*Não te perguntes se és feliz, pergunte primeiro se tu fazes alguém feliz...*"

ÍNDICE ANALÍTICO.

Lista de Figuras. I
Lista de Tabelas. VI
Lista de Símbolos. VII
Lista de Siglas. XI
Resumo. XIII
Abstract. XV
Capítulo 1 - Comunicações Ópticas. 1
1.1 - Introdução Histórica. 1
1.2 - Redes Ópticas Atuais. 4
1.3 - Proposta de Trabalho. 5
Capítulo 2 - Equação de Propagação do Pulso. 8
2.1 - Introdução. 8
2.2 - Equações de Maxwell. 8
2.3 - Características do Meio. 10
2.4 - Polarização do Meio. 11
2.5 - Polarização Linear e Não-Linear. 13
2.6 - Equação de Propagação do Pulso. 21
2.6.1 - Propagação do Pulso Não-Linear. 22
Capítulo 3 - Efeitos Lineares em Fibras Ópticas. 35
3.1 - Atenuação. 35
3.2 - *GVD* - Dispersão de Velocidade de Grupo. 37
3.2.1 - Dispersão cromática do material. 38
3.2.2 - Dispersão cromática do guia de onda. 41
3.2.3 - Dispersão cromática total. 42
3.2.4 - Regimes de Propagação. 43
3.2.5 - Alargamento do Pulso Induzido pela Dispersão. 47

3.2.6 - Pulsos Gaussianos. 49
3.3 - Compensação de Dispersão. 50
Capítulo 4 - Efeitos Não-Lineares em Fibras Ópticas. 55
4.1 - Introdução. 55
4.2 - SPM – Automodulação de Fase. 58
4.3 - *XPM* – Modulação de Fase Cruzada. 58
4.4 - *FWM* – Mistura de Quatro Ondas. 60
4.4.1 - Introdução. 60
4.4.2 - Efeito da Posição dos Canais. 61
4.5 - Espalhamento Estimulado Raman. 62
Capítulo 5 - Automodulação de Fase. 64
5.1 - Introdução. 64
5.2 - *SPM* Induzindo Alargamento Espectral. 64
5.2.1 - *SPM* sem Dispersão. 67
5.2.1.1 - Solução Numérica da Equação. 73
5.2.1.2 - Simulações: Comprimento efetivo e Alargamento Espectral. 76
5.2.1.3 - Simulações de Efeitos da Forma do Pulso e do *Chirp* Inicial. 79
5.2.2 - Interação da *SPM* com a Dispersão da Velocidade de Grupo. 81
5.2.2.1 - Solução Numérica da Equação: Efeito de Dispersão de Primeira Ordem. 82
5.2.2.2 - Solução Numérica da Equação: Efeito de Dispersão de Segunda Ordem. 85
5.2.3 - Automodulação de Fase e Instabilidade Modulacional. 87
5.2.3.1 - Introdução. 87
5.2.3.2 - Simulações da *MI* e *SPM*. 91
Capítulo 6 - Modulação de Fase Cruzada. 94
6.1 - Introdução. 94
6.2 - Surgimento da *XPM*. 94
6.3 - Equações *NLS* Acopladas para dois Campos Co-Propagantes. 98
6.4 - Solução das Equações Acopladas *NLS*. 100
6.4.1 - Solução das Equações Acopladas *NLS* para Meio Não-Dispersivo. 101
6.4.1.1 - Alargamento espectral assimétrico. 104

6.4.1.2 - Efeito do Atraso Inicial Entre os Pulsos Co-Propagantes. 105
Capítulo 7 - Considerações Finais. 113
7.1 - Introdução. 113
7.2 - Contribuições da Dissertação.....114
7.3 - Sugestões para Futuros Trabalhos. 116
Anexo A 117
Dedução da Equação de Propagação do Capítulo 2.....117
Anexo B. 120
O Método *Split-Step Fourier*. 120
Anexo C. 122
Dedução da Equação da *XPM*. 122
Referências Bibliográficas. 124

LISTA DE FIGURAS.

Figura 2.1: Ilustração da teoria da aproximação de dipolos elétricos em uma distribuição de cargas [11] 12

Figura 2.2: (a) Polarização de um átomo sem a aplicação de um campo elétrico externo e (b) com a aplicação de um campo elétrico externo [11] 13

Figura 2.3: (a) Polarização em função de um campo elétrico aplicado em um meio que possui simetria de inversão, calcita (b) e um que não possui, quartzo [14], [15] 16

Figura 3.1: Curva de atenuação da fibra em função do comprimento de onda 36

Figura 3.2: Seqüência temporal de bits transmitidos e recebidos com efeito da dispersão, podendo ocorrer interferência entre símbolos 37

Figura 3.3: Variação do índice de refração n e do índice de refração de grupo n_g, para sílica fundida, em função do comprimento de onda 39

Figura 3.4: Variação de β_{2M}, para a sílica fundida, com o comprimento de onda 40

Figura 3.5: Dispersão do material (sílica fundida), D_M, em função da variação do comprimento de onda 40

Figura 3.6: Corte transversal de um guia de onda [14], [20] 41

Figura 3.7: Corte longitudinal de uma fibra óptica, sendo n_n e n_c os índices de refração do núcleo e da casca, respectivamente, e $2a$ o diâmetro do núcleo 42

Figura 3.8: Curva da dispersão total para uma fibra padrão em função do comprimento de onda, além das curvas da dispersão do guia de ondas e da dispersão do material 43

Figura 3.9: Escalas de comprimento do enlace, do comprimento não-linear e do comprimento de dispersão. Neste caso temos $L<<L_{NL}$ e $L<<L_D$ 45

Figura 3.10: Escalas de comprimento da fibra, do comprimento não-linear e do comprimento de dispersão. Neste caso temos $L<<L_{NL}$ e $L>L_D$ 45

Figura 3.11: Escalas de comprimento para o caso onde os efeitos não-lineares governam a propagação do pulso, com as seguintes condições $L<<L_D$ e $L>L_{NL}$. 46

Figura 3.12: Escalas de comprimento para o caso onde a não-linearidade e a dispersão governam a propagação do pulso, segundo as seguintes condições $L>L_D$ e $L>L_{NL}$ 47

Figura 3.13: Alargamento induzido pela dispersão de um pulso gaussiano incidente em uma fibra para $z = 2L_D$ e $z = 4L_D$. A curva superior mostra o pulso incidente em $z = 0$ com $L_D = 50$ km (figura gerada pelo VPI) 50

Figura 3.14: Diagrama esquemático da técnica de pré-compensação de dispersão.. 51

Figura 3.15: Diagrama esquemático da técnica de pós-compensação de dispersão . 52

Figura 3.16: Diagrama esquemático da técnica de compensação simétrica de dispersão 52

Figura 3.17: Diagrama de olho na saída da fibra padrão, operando em $\lambda = 1{,}554$ μm, utilizando a técnica de pré-compensação em regime linear de operação 53

Figura 3.18: Diagrama de olho na saída da fibra padrão, operando em $\lambda = 1{,}554$ μm, utilizando a técnica de pós-compensação em regime linear de operação..... 53

Figura 3.19: Diagrama de olho na saída da fibra padrão, operando em $\lambda = 1{,}554$ μm, utilizando a técnica de compensação simétrica em regime linear de operação... 54

Figura 4.1: Representação gráfica do comprimento de *walk-off*, onde (a) representa os pulsos na entrada da fibra, (b) para um valor qualquer de L, (c) $L = L_W$ 59

Figura 4.2: Processo da *FWM* para dois canais injetados na fibra com freqüências f_1 e f_2 61

Figura 4.3: Processo da *FWM* para três canais injetados na fibra, com freqüências f_1, f_2 e f_3, para mesma separação de canais..... 61

Figura 4.4: Processo da *FWM* para três canais injetados na fibra, com freqüências f_1, f_2 e f_3, para separação de canais diferente..... 62

Figura 4.5: Espectro do ganho Raman em função do deslocamento de fase 63

Figura 4.6: Representação esquemática do ganho do Amplificador Raman, onde comprimentos de onda maiores são amplificados a partir de comprimentos de onda menores 63

Figura 5.1: Curva da potência (*P*) versus o comprimento do enlace (*L*), onde: (a) caso real onde potência decai com a distância, (b) conceito de *Leff* com a potência constante ao longo do enlace [25] 69

Figura 5.2: Deslocamento de fase não-linear ϕ_{NL} induzido pela *SPM* em função do tempo. A linha tracejada corresponde um pulso gaussiano, a linha cheia um super-gaussiano *m*=2 e a pontilhada a um super-gaussiano *m*=3 71

Figura 5.3: Variação da freqüência no tempo $\delta(\omega)$ (*chirp* de freqüência),onde a linha tracejada corresponde a um pulso gaussiano, a linha cheia a um super-gaussiano *m*=2 e a pontilhada a um super-gaussiano *m*=3 71

Figura 5.4: Deslocamento da portadora de freqüência imposto pela *SPM* dentro de um pulso gaussiano 72

Figura 5.5: Deslocamento da portadora de freqüência imposto pela *SPM* dentro de um pulso super-gaussiano para *m*=3 72

Figura 5.6: Espectro alargado pela *SPM* para um pulso sem *chirp* para diferentes valores de ϕ_{max} sendo (a) espectro de entrada, (b) ϕ_{max} = 0,5π, (c) ϕ_{max} = 1,5π, (d) ϕ_{max} = 2,5π, (e) ϕ_{max} = 3,5π e (f) ϕ_{max} = 4,5π. 74

Figura 5.7: Alargamento espectral rms imposto pela *SPM*, em função do comprimento efetivo do enlace 76

Figura 5.8: Espectro alargado do pulso na saída de uma fibra utilizando um canal em λ = 1550 nm (*f* = 193,54 THz): (a) corresponde ao caso ideal sem perdas para um *L*= 20 km, (b) corresponde ao caso real, para uma perda igual a α = 0.2 dB/km e L≈150 Km 78

Figura 5.9: Fator de Alargamento Espectral induzido pela *SPM*, em função do comprimento do enlace de fibra (km). Os pontos marcados com x foram obtidos através de simulação e a curva cheia é uma predição teórica 79

Figura 5.10: Comparação do espectro alargado pela *SPM*: (a) pulso gaussiano, (b) super-gaussiano sem *chirp*, com uma potência de pico correspondente a ϕ_{max} = 4,5π 80

Figura 5.11: Efeito do *chirp* de freqüência inicial no espectro alargado pela *SPM* para um pulso gaussiano chirpado (a) *C* = 5 e (b) *C* = -5. Em ambos os casos ϕ_{max} = 4,5π 80

Figura 5.12: Evolução da (a) forma do pulso e do (b) espectro óptico, sobre uma distância final de $5L_D$ para um pulso gaussiano inicialmente sem *chirp* propagando num regime de dispersão normal da fibra ($\beta_2 > 0$) com $N = 1$ 83

Figura 5.13: Evolução da (a) forma do pulso e do (b) espectro óptico sobre uma distância final de $5L_D$ para um pulso gaussiano inicialmente sem *chirp* propagando num regime de dispersão anômalo ($\beta_2 < 0$) com parâmetros tais que $N = 1$ 84

Figura 5.14: Evolução temporal de um sóliton de ordem quatro ($N = 4$) para um pulso de entrada gaussiano. A distância final é equivalente a um período do sóliton (Z_0). 85

Figura 5.15: (a) Forma temporal e (b) espectro do pulso usando um pulso de entrada gaussiano sem *chirp*, propagando no comprimento de dispersão zero com $\bar{N}$ =1 e $L = 5\,L'_D$ 86

Figura 5.16: Espectro do ganho da Instabilidade Modulacional pelo deslocamento de freqüência, para dois valores de potência, utilizando uma fibra *ST* com β_2 = -20 ps^2/km e γ= 2 $W^{-1}km^{-1}$ operando com λ = 1,55 μm.....90

Figura 5.17: Espectro na saída da fibra *ST* com dois picos de oscilação. Com L = 4 km, o efeito da *MI* não é significativo, pois $L << L_D$ e $L > L_{NL}$.....91

Figura 5.18: Espectro na saída da fibra *ST* com três picos de oscilação. Com L = 6,7 km, onde o efeito da *MI* não esta presente, $L << L_D$ e $L > L_{NL}$ 92

Figura 5.19: Espectro na saída da fibra *ST* com quatro picos de oscilação. Com L = 9,3 km e T_{FWHM} = 10 ps, o efeito da *MI* está presente, pois o $L > L_D$ e $L > L_{NL}$.93

Figura 5.20: Espectro na saída da fibra *ST* com cinco picos de oscilação. Com L = 12 km e T_{FWHM} = 10 ps, o efeito da *MI* está presente, pois $L > L_D$ e $L > L_{NL}$.....93

Figura 6.1: Espectro óptico dos pulsos se co-propagando, sendo (a) pulso forte em 630 nm (f_0 = 476,19 THz) e (b) pulso fraco em 530 nm (f_0 = 566,08 THz). Os espectros exibem um alargamento espectral assimétrico, induzido pela *XPM*..105

Figura 6.2: Deslocamento de comprimento de onda induzido pela *XPM*, em função do atraso inicial normalizado entre os pulsos 108

Figura 6.3: Esquemático da propagação (sentido da direita para esquerda) dos pulsos de bombeio: super-gaussiano, m = 3 (amplitude maior), de prova: gaussiano, m=

1 (amplitude menor) . E do deslocamento de comprimento de onda induzido pela *XPM* (linha pontilhada). São considerados os seguintes atrasos entre os pulsos: (a) $\tau_d = 0$, (b) $\tau_d = 2$ e (a) $\tau_d = 4$ 109

Figura 6.4: Deslocamento de comprimento de onda induzido no pulso de prova, em função da potência do pulso co-propagante, pulso de bombeio. Considera-se que os pulsos entram na fibra no mesmo momento ($\tau_d = 0$) 110

Figura 6.5: Deslocamento de freqüência induzido pela *XPM*, levando a portadora do pulso (197,37 THz) para as freqüências mais altas (*chirp* para o azul) 111

Figura 6.6: Deslocamento de freqüência, induzido pela *XPM*, levando a portadora do pulso (189,87 THz) para as freqüências mais baixas (*chirp* para o vermelho) 111

Figura 6.7: Espectro de saída do pulso de referência (λ = 1550 nm, f = 193,54 THz), sendo alargado pela *SPM* 112

Figura 7.1: Esboço esquemático de um pulso propagando-se por uma fibra dispersiva 114

Figura 7.2: Esboço Esquemático da técnica de compensação de dispersão, usando a DCF 114

Figura 7.3: Representação esquemática dos efeitos não-lineares, mostrando as características que cada efeito impõe, no domínio da freqüência, no pulso ao propagar-se pela fibra 115

Figura B.1: Representação do método *SSF* 119

LISTA DE TABELAS.

Tabela 3.1: Comprimento de onda de ressonância e o equivalente fator de peso, para a sílica, *m* =3 [7], [20]....38

Tabela 4.1: Características de alguns efeitos não-lineares....57

Tabela 5.1: Dados da simulação para o caso com e sem perdas na fibra e alargamento espectral induzido pela *SPM*....77

Tabela 5.2: Valores da simulação para as dadas distâncias percorridas em uma fibra tipo padrão....78

LISTA DE SÍMBOLOS.

A_{eff} Área efetiva da fibra óptica.

b/s Bits por segundo.

$\tilde{\alpha}$ Coeficiente de atenuação.

α Coeficiente de atenuação linear.

α_2 Coeficiente de atenuação não-linear.

L_D Comprimento de dispersão.

$L_D^{'}$ Comprimento de dispersão de segunda ordem .

L_W Comprimento de interação - *walk-off*.

L_{NL} Comprimento não-linear.

L_{eff} Comprimento efetivo da fibra óptica.

ε Constante dielétrica.

ε_L Constante dielétrica linear.

ε_{NL} Constante dielétrica não-linear.

K_0 Constante de propagação no vácuo.

β Constante de propagação na freqüência ω, no regime linear.

β_0 Constante de propagação na freqüência ω_0, no regime linear.

$\tilde{\beta}$ Constante de propagação no regime não-linear.

$\delta\omega(T)$ Deslocamento de freqüência – *chirp*.

D_W Dispersão cromática do guia de onda.

D_M Dispersão cromática do material.

D Dispersão cromática total.

$\tilde{A}$ Distribuição axial do campo elétrico.

$F(x,y)$ Distribuição transversal do campo elétrico.

C Fator de *chirp*.

γ Fator de não-linearidade.

ω_0 Freqüência da portadora óptica.

$\tilde{n}(\omega)$ Índice de refração.

n_c Índice de refração da casca.

n_g Índice de refração de grupo.

n_n Índice de refração do núcleo.

n_L Índice de refração linear.

n_2 Índice de refração não-linear.

σ Largura temporal rms do pulso óptico.

σ_0 Largura temporal rms inicial do pulso óptico.

T_{FWHM} Largura temporal total entre os pontos de meia potência.

T_0 Metade da largura temporal de pulso para o ponto de intensidade de 1/e.

N Ordem do sóliton.

β_2 Parâmetro de dispersão de primeira ordem.

β_3 Parâmetro de dispersão de segunda ordem.

β_{2M} Parâmetro de dispersão de primeira ordem do material.

μ_0 Permeabilidade magnética no vácuo.

ε_0 Permissividade dielétrica no vácuo.

$\Delta\beta$ Perturbação imposta à constante de propagação, decorrente da não-lineridade.

Δn Perturbação imposta ao índice de refração decorrente da não-linearidade.

P_0 Potência de pico de um pulso.

$\chi^{(j+1)}$ Tensor susceptibilidade elétrica de ordem $j+1$.

$\Delta\phi$ Variação de fase.

$\Delta\phi_{NL}$ Variação de fase não-linear.

ϕ_{max} Variação de fase máxima.

v_g Velocidade de grupo.

$\vec{P}_L$ Vetor polarização elétrica linear.

$\vec{P}_{NL}$ Vetor polarização elétrica não-linear.

$\vec{D}$ Vetor densidade de fluxo elétrico.

$\vec{B}$ Vetor densidade de fluxo magnético.

$\vec{E}$ Vetor intensidade de campo elétrico.

$\vec{H}$ Vetor intensidade de campo magnético.

$\vec{P}$ Vetor polarização elétrica.

$\vec{M}$ Vetor polarização magnética.

$\vec{r}$ Vetor posição com coordenadas espaciais genéricas (x,y,z).

LISTA DE SIGLAS.

CW Continuos Wave (Onda contínua).

DCF Dispersion Compensating Fiber (Fibra de compensação de dispersão).

DWDM Dense Wavelenght Division Multiplexing (Multiplexação densa por divisão de comprimentos de ondas).

EDFA Erbium Dopped Fiber Amplifier (Amplificador com fibra dopada com érbio).

FWHM Full Width Half Maximum (Largura total a meio máximo).

FWM Four Wave Mixing (Mistura de Quatro Ondas).

GVD Group Velocity Dispersion (Dispersão de velocidade de grupo).

ISI Intersimbol Interference (Interferência entre símbolos).

LEAF Large Effective Area Fiber (Fibra com grande área efetiva).

MI Modulation Instability (Instabilidade Modulacional).

NLS Nonlinear Schrödinger Equation (equação Não-Linear de Schrödinger).

NZDS Non Zero Dispersion Shift (Fibra de dispersão deslocada não nula).

RMS Root Mean Square (Valor médio quadrático).

SAM Self Amplitude Modulation (Automodulação de amplitude).

SBS Stimulated Brillouin Scattering (Espalhamento Estimulado Brillouin).

SPM Self Phase Modulation (Automodulação de fase).

SRS Stimulated Raman Scattering (Espalhamento Estimulado Raman).

SSF Split-Step Fourier.

ST Standard (Fibra padrão).

WDM Wavelenght Division Multiplexing (Multiplexação por divisão de comprimentos de ondas).

XPM Cross Phase Modulation (Modulação de Fase Cruzada).

RESUMO.

Paiva, R. B. Sobre o estudo dos efeitos não-lineares de Automodulação de Fase e Modulação de Fase Cruzada em fibras ópticas. Santa Rita do Sapucaí, 2003. Instituto Nacional de Telecomunicações.

Neste trabalho são estudados alguns fenômenos que ocorrem durante a propagação de pulsos de luz em fibras ópticas [1], [7], [13], [16], [18], [20], [21], [22], [24], [25], [59] e [60].

O estudo está baseado na equação Não-Linear de Schrödinger (*NLS*), obtida no Capítulo 2 a partir das equações de Maxwell, considerando-se o meio com susceptibilidade não-linear. O modelo matemático adotado para a susceptibilidade da fibra advêm do Efeito Kerr, o que implica na dependência da mesma com a potência do campo óptico. Desse modelo, decorre que o índice de refração tem uma parte linear dependente da freqüência, que descreve o caráter dispersivo do meio, e uma parte não-linear que é independente da freqüência. Considerou-se, ainda, a preservação da polarização da luz incidente na fibra, possibilitando usar um modelo escalar, isto é, desprezar o caráter vetorial da equação de propagação.

A equação *NLS* inclui os fenômenos de perdas, dispersão e os efeitos não-lineares de Automodulação de Fase (*SPM*) e Modulação de Fase Cruzada (*XPM*), sendo resolvida analiticamente para alguns casos particulares. Procurou-se, neste trabalho, dar a interpretação teórica destas soluções, no domínio do tempo e da freqüência, e a confirmação destas soluções obtidas numericamente a partir de simula-

ções na plataforma *VPI – Virtual Photonics Inc. – Transmission Module*, baseada no método numérico *SSF* descrito sucintamente no Anexo B.

A ênfase do trabalho está no estudo da *SPM* e da *XPM*, respectivamente, nos Capítulos 5 e 6. Para o entendimento destes fenômenos, foram reproduzidos diversos resultados encontrados na literatura especializada, citados na lista de referências. A eficácia destes fenômenos está relacionada às características da luz incidente, tais como: duração e forma temporal do pulso, freqüência central da portadora, potência óptica, além das características da fibra óptica na região de operação: dispersão cromática de 1ª e 2ª ordens, área efetiva, índice não-linear de refração e perdas. Estes parâmetros foram considerados de acordo com as fibras ópticas comercialmente disponíveis.

Palavras-chave: Fibra Óptica, Dispersão, Automodulação de Fase, Modulação de Fase Cruzada.

ABSTRACT.

Paiva, R. B. On the study of the nonlinear effects of both Self-Phase and Cross-Phase Modulation in optical fibers. Santa Rita do Sapucaí, 2003. National Institute of Telecommunications.

In this work some phenomena that occur during the propagation of pulses of light in optical fibers [1], [7], [13], [16], [18], [20], [21], [22], [24], [25], [59] e [60] are studied.

The study is based on the Nonlinear Schrödinger Equation (NLS), gotten in Chapter 2 from the equations of Maxwell, considering a nonlinear susceptibility. The adopted mathematical model for the susceptibility comes from the Kerr Effect, that implies a fiber dependence with the power of the optical field. From this model the refractive index has a linear part that depends on the frequency describes by the dispersive character of the medium, and the nonlinear part that is independent of the frequency. The preservation of the polarization of the incident light on the fiber was still assumed, making possible the use of a scalar model, that is, neglecting the vectorial character of the propagation equation.

The NLS equation includes the phenomena of losses, dispersion and the nonlinear effects of Self-Phase Modulation (*SPM*) and Cross Phase Modulation (*XPM*) and we presentan analytical solution for some particular cases. In this work the theoretical interpretation of these solutions, in both time and frequency domain is discassed, as well as we check all results with the numerical solutions, gotten from all si-

mulations done in the VPI – (Virtual Photonics Inc. – *Transmission ModulePackage*) platform, based on the SSF method shown in Annex B.

The emphasis of the work is concentrated on the study of the *SPM* and the *XPM* presented, respectively, Chapters 5 and 6. For a well understanding of these phenomena, several results found in the specialized literature, and cited in the list of references, has been reproduced. The effectiveness of these phenomena is reported to the characteristics of the incident light such as: temporal duration and sharp of the pulse, central frequency of the carrier, optical power, besides the characteristics of the optic fiber in the region operation: chromatic dispersion of 1st and 2nd orders, effective area, nonlinear index of refraction and losses. These parameters had been considered in accordance with the available commercially optical fibers data.

Key Words: Fiber optical, Dispersion effect, Self-Phase Modulation, Cross-Phase Modulation.

Capítulo 1

COMUNICAÇÕES ÓPTICAS.

1.1 – Introdução Histórica.

A tecnologia de hoje nos dá acesso às redes de vídeo comunicação e nos permite ver a pessoa com quem falamos ao telefone. Um dos meios que viabiliza essa tecnologia são as fibras ópticas. Se hoje desfruta-se de todas as facilidades que se conhece, deve-se tudo isso ao estudo e dedicação de muitas pessoas. Faz-se aqui, uma breve introdução histórica mostrando este desenvolvimento ao longo de vários anos e também, com intuito de prestar uma homenagem àqueles que tornaram tudo possível.

O primeiro sistema de transmissão óptica, foi desenvolvido por Claude Chappe em 1790. O sistema era composto, basicamente, por uma série de torres com braços móveis, os quais eram controlados por uma pessoa para poder transmitir uma dada informação. Esta transmissão era feita a longas distâncias, ≈ 100 km, e as torres funcionavam como estações repetidoras [1]. A luz era usada para que a pessoa na torre seguinte pudesse ver os sinais codificados. Porém, estes sistemas eram muito lentos, pois a taxa de transmissão era inferior a 1 b/s.

Em 1830, tem início a era das comunicações elétricas, com a substituição do uso da luz, na telegrafia, pela eletricidade. Com este método, obtinha-se uma taxa de 10 b/s com o uso de técnicas de codificação, como o código Morse, sendo que o "ponto" e o "traço" eram dois pulsos elétricos com duração distintas. Este modelo, com as estações repetidoras usadas, atingiam distâncias de até 1000 km [1].

Em 1876, Graham Bell inventa o telefone, que consistia em transmitir sinais elétricos analógicos. No telefone, a voz é ouvida à distância por meio de milhares de quilômetros de fios de cobre, obtendo-se um máximo de informações em um mínimo de tempo. Esta técnica de transmissão elétrica analógica iria dominar os sistemas de comunicação por mais de um século. As redes telefônicas apresentaram um enorme avanço no século 20 para os sistemas de comunicação elétrica. A partir da utilização de cabos coaxiais aumentou-se consideravelmente a capacidade dos sistemas. A largura de banda destes sistemas é limitada, sobretudo, pelas perdas nos cabos metálicos, as quais são muito grandes para freqüências acima de 10 MHz [1] e [2].

O desenvolvimento de sistemas de microondas, que utiliza as portadoras de 1 a 10 GHz, teve como elemento motivador a transmissão de maior quantidade de informações do que quando se empregam modulações nas portadoras em freqüências mais baixas, nas faixas de *HF* (3 MHz – 30 MHz) e *VHF* (30 MHz – 300 MHz). Em 1948, foi posto em funcionamento o primeiro sistema de microondas operando em 4 GHz [1] e [2]. O limitador do sistema era a pequena distância entre as estações repetidoras, próximo de 1 km, o que torna o sistema inviável financeiramente. Desde então os sistemas de comunicações em altas freqüências evoluíram de forma considerável, permitindo altas taxas de transmissão.

Na metade do século 20, já se tinha o conhecimento de que o uso da luz, como sinal da portadora, poderia trazer um enorme incremento na ordem de grandeza da capacidade de transmissão. Até então, não dispunha-se de fontes de luz adequadas e nem do meio capaz de transmitir esta informação. A base desse avanço tecnológico seria um vidro de grande transparência, feito a partir do quartzo fundido e purificado.

Com o surgimento do laser em 1960 abrem-se novas expectativas para aplicação da luz e, um dos empecilhos, era a grande perda apresentada pelas fibras cons-

truídas na época [3]. Em 1970, nos laboratórios da Corning Incorporated foi desenvolvida uma fibra que apresentava uma perda de 20 dB/km na janela de 800 nm e a Bell Laboratories desenvolveu os lasers semicondutores de *GaAs*. Aperfeiçoou-se, assim, uma nova forma de transmissão: os sistemas de comunicações ópticas. Com utilização da janela de 1300 nm consegui-se uma maior distância entre estações repetidoras, pois a perda nesta região era de ≈ 1 dB [4]. Um grande avanço tecnológico foi alcançado com o desenvolvimento dos lasers *InGaAsP*.

Por ser altamente transparente, o vidro de fibra óptica transmite os raios de luz a grandes distâncias com absoluta nitidez. No início dos anos 80, conseguiu-se uma fibra óptica tão transparente, que se a água tivesse essa transparência daria para ver o fundo de um oceano. O vidro é estirado até formar um fio longo e fino, como um fio de cabelo de menos de um décimo de milímetro de diâmetro. O som e as imagens são codificados e modulam os raios de luz, viajam na fibra e são captados por um receptor que emite uma corrente elétrica ao detectar o raio de luz. Essas informações são decodificadas e reproduzidas em uma tela ou um amplificador de áudio, estabelecendo a comunicação.

Estava pronta a nova geração dos sistemas de comunicação com uma separação entre repetidoras de 20 km e taxa inferior a 100 Mb/s devido à dispersão modal, pois as fibras em questão eram multimodo. Com a produção das fibras monomodo, com perdas de 0,2 dB/km na janela de 1550 nm, a dificuldade ficou concentrada na fonte transmissora. Para resolver este problema deveria-se utilizar fibras que tivessem o comprimento de dispersão zero próximo a 1550 nm; as chamadas fibras de dispersão deslocada (*DS*). Com a utilização deste tipo de fibra operando nesta janela, onde a atenuação e a dispersão são mínimas, atingiu-se a taxa de 2,5 Gb/s [5].

Por volta de 1990, tem-se uma grande revolução na área óptica com as primeiras aparições dos amplificadores ópticos a fibra dopada com érbio (*EDFA*) operando na região de *1550 nm* [6]. A grande vantagem deste sistema é amplificar o sinal sem a necessidade de convertê-lo em sinal elétrico. Com isso desencadeou-se uma outra revolução: os sistemas multiplexados por comprimento de onda (*WDM*). Até então, em uma fibra era transmitido uma única portadora modulada numa taxa de Gb/s.

Com a *WDM* pode-se utilizar vários lasers modulados em portadoras distintas, pois o *EDFA* apresenta uma largura de banda que possibilita o uso desta técnica.

Tem-se, agora, um novo cenário, onde os sistemas *WDM* com *EDFA* operando em fibras de dispersão deslocada, possibilitam o surgimento de efeitos antes não significativos: os efeitos não-lineares [7], [8] e [9].

Nesta dissertação serão vistos os principais efeitos não-lineares, com uma maior ênfase na Automodulação de Fase (*SPM*) e Modulação de Fase Cruzada (*XPM*).

1.2 – Redes Ópticas Atuais.

Os sistemas de comunicações ópticas tem como principais características a grande capacidade de largura de banda e a baixa atenuação. Em função destas, os sistemas apresentam altíssima capacidade para transmissão de informação sobre uma longa distância, (b/s x km) [10]. A evolução deste tipo de sistema ocorreu a partir de 1970, devido à redução das perdas nas fibras.

Os sistemas ópticos, nestas duas últimas décadas, têm passado por uma intensa revolução, elevando a capacidade destes a uma taxa de cerca de 100 vezes por década, superando, em muito, a taxa conseguida em sistemas eletrônicos baseados em circuitos integrados. Nestes últimos anos atingiu-se taxas de Tb/s, sendo que o gargalo nestes sistemas são os circuitos eletrônicos que operam na faixa: 40 – 60 GHz. Porém com o advento da tecnologia de multiplexagem por comprimentos de onda (*WDM*) atingiu-se essa grande largura de banda, mesmo com a eletrônica operando em GHz [7].

Os sistemas *WDM* inicialmente eram de topologia ponto-a-ponto, buscando maior capacidade para atender as demandas em enlaces de longa distância. Em uma fase posterior, surgiram novos componentes ópticos que acrescentados nas redes ópticas permite adicionar ou remover canais ao longo do enlace, ou seja, redes ópticas mais flexíveis.

No desenvolvimento dos primeiros sistemas ópticos deu-se ênfase à atenuação, que é causadora da redução do nível de potência do pulso, assim como à dispersão, que leva ao alargamento temporal. Os sistemas apresentavam-se otimizados para λ = 1,3 μm, região que na fibra padrão (*ST*) corresponde a dispersão mínima. Com o surgimento dos amplificadores de fibra dopada com érbio (*EDFA*), amplificando sinais na janela de 1,5 μm, foram substituídos os repetidores eletrônicos, levando a uma migração para o uso da janela de atenuação mínima [8]. Nesse caso a dispersão é muito alta na fibra padrão (*ST*), tendo valores na ordem de 17 ps/nm·km, a qual leva a uma grande redução na capacidade de transmissão dos sistemas.

Surgia um novo desafio, uma primeira solução seria a fabricação de fibras com dispersão deslocada (*DS*); porém esta opção tornou-se catastrófica devido aos efeitos não-lineares. Os sistemas compostos por diversos canais, nos quais os sinais viajam com alta potência, sofrem grande influência dos efeitos não-lineares, neste tipo de fibra, e serão vistos com maior ênfase neste trabalho. Atualmente, existem várias técnicas para reduzir a eficácia destes fenômenos não-lineares, cabendo destacar: o espaçamento espectral desigual de canais, fibras de grande área efetiva, fibra com dispersão nula fora da banda do *EDFA* (*NZDS*), entre outras. Nos projetos de redes de alta capacidade estas características devem ser levadas em consideração, pois podem afetar de forma significativa o desempenho do sistema de comunicação.

1.3 – Proposta de Trabalho.

O propósito deste trabalho é um estudo constando de uma parte analítica e de simulações baseadas em métodos numéricos, dos efeitos não-lineares em fibras, sendo estes efeitos diretamente relacionados à densidade de potência presente no guia óptico. A ênfase é dada aos efeitos não-lineares de Automodulação de Fase (*SPM*) e Modulação de Fase Cruzada (*XPM*).

A solução analítica, da equação que governa a propagação do pulso, dentro da fibra, obtida em certos casos particulares, permitirá avaliar os efeitos causados pela

dispersão, perdas e não-linearidades. A análise numérica através das simulações realizadas pela plataforma *VPI*, permitirá uma comprovação desses resultados. Esta dissertação está organizada na seguinte maneira:

O Capítulo 2 mostra a obtenção da equação Não-Linear de Schrödinger (*NLS*), que governa a propagação do pulso. Esse capítulo inclui uma caracterização do meio, descrevendo algumas propriedades intrínsecas do guia óptico.

O Capítulo 3 aborda os efeitos lineares atuantes no meio de propagação de interesse e apresenta uma descrição sobre a atenuação e dispersão. Detalha-se o estudo da *GVD* (G*roup Velocity Dispersion*) e estuda-se a técnica de compensação de dispersão baseada em fibras de dispersão oposta.

O Capítulo 4 apresenta uma descrição sucinta dos fenômenos não-lineares: Automodulação de Fase (*SPM*), Modulação de Fase Cruzada (*XPM*), Mistura de Quarto Ondas (*FWM*) e Espalhamento Estimulado Raman (*SRS*).

O Capítulo 5 é dedicado a *SPM* (*Self-Phase Modulation*), mostrando fundamentos analíticos do efeito, as características que este induz sobre as formas temporal e espectral do pulso. Ainda neste capítulo, trata-se o efeito da *IM* (*Instability Modulation*) apresentando alguns fundamentos teóricos e confirmando os mesmos por simulações.

O Capítulo 6 trata o efeito de *XPM* (C*ross Phase Modulation*) mostrando o modelo matemático e a solução das equações acopladas, através de métodos numéricos. Algumas simulações confirmam as predições teóricas.

Os tópicos finais desta dissertação são os Anexos, sendo que:

O Anexo A traz parte da dedução da equação de propagação, referente ao Capítulo 2.

O Anexo B corresponde a uma descrição do método *SSF* (*Split-Step Fourier*), o qual é o método numérico empregado pela plataforma computacional *VPI*.

O Anexo C apresenta parte da dedução da equação que governa o efeito *XPM*, apresentado no Capítulo 6.

Capítulo 2

EQUAÇÃO DE PROPAGAÇÃO DO PULSO.

2.1 – Introdução.

Tendo como principal objetivo desta dissertação, a descrição dos efeitos não-lineares sobre um feixe de luz propagante em uma fibra e suas conseqüências nos sistemas ópticos, torna-se necessário, inicialmente, obter a equação que governa este fenômeno. Para um melhor entendimento dos efeitos não-lineares em fibras ópticas, necessita-se considerar a teoria da propagação da onda eletromagnética em um meio dispersivo não-linear. Importantes conceitos devem ser observados, entre estes cabe destacar: a descrição das partes linear e não-linear da polarização induzida e a constante dielétrica dependente da freqüência. A partir destas considerações, chega-se à equação Não-Linear de Schrödinger (*NLS*), que irá descrever a propagação do feixe de luz numa fibra óptica. Com a equação *NLS* pode-se estudar o comportamento de um pulso que se propaga através de uma fibra dispersiva não-linear, e descrever as alterações temporais e espectrais desse pulso.

2.2 – Equações de Maxwell.

Quando uma fonte de luz excita a fibra óptica, esta luz propaga-se pela fibra segundo a equação Não-Linear de Schrödinger. Como a luz é uma onda eletromagnética, uma modelagem apropriada para sua propagação em fibras é feita utilizando-se as Equações de Maxwell que, para um meio dielétrico, ou seja, desprovido de cargas livres, como é o caso da fibra óptica, pode ser descrita pelas seguintes leis, respectivamente: lei de Faraday-Henry, lei de Ampère-Maxwell, leis de Gauss para os Campos Elétrico e Magnético, conforme as equações abaixo [11], [12]:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{2.1}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{2.2}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \tag{2.3}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{2.4}$$

onde $\vec{E}$ é o vetor campo elétrico, $\vec{H}$ é o vetor campo magnético, $\vec{D}$ é o vetor densidade de fluxo elétrico e $\vec{B}$ é o vetor densidade de fluxo magnético.

Nas Eqs. (2.1) a (2.4) tem-se implícito os efeitos das propriedades do material, na propagação de ondas eletromagnéticas, pois não envolvem somente os campos $\vec{E}$ e $\vec{H}$, mas, também, a densidade de fluxo elétrico $\vec{D}$ e a densidade de fluxo magnético $\vec{B}$. A evolução temporal de $\vec{E}$ e $\vec{H}$, no meio, gera a presença das densidades $\vec{D}$ e $\vec{B}$, que representam as respostas do meio à excitação dos campos. A relação entre os campos e a densidade de fluxo é dada por:

$$\vec{D} = \varepsilon_o \vec{E} + \vec{P} \tag{2.5}$$

$$\vec{B} = \mu_o \left(\vec{H} + \vec{M}\right) \tag{2.6}$$

onde $\vec{P}$ é a polarização elétrica do meio, $\vec{M}$ é a polarização magnética do meio. No caso das fibras, considera-se $\vec{M} = \vec{0}$.

A polarização $\vec{P}$ varia em função das propriedades do material e do campo aplicado. Considerando que o átomo apresenta cargas negativas, ou seja, os elétrons,

e que possuem o núcleo com carga positiva, a excitação do material por um campo elétrico, resulta em forças aplicadas ao núcleo e elétrons em sentidos opostos. Esse é o caso da sílica, material que constitui a fibra. Essas forças resultam em átomos polarizados ou distorcidos. A polarização induzida pode ser interpretada como a resposta do meio ao campo elétrico aplicado. Os campos elétrico e magnético estarão sendo representados por $\vec{E}(\vec{r},t)$ e $\vec{H}(\vec{r},t)$ indicando que a propagação da luz, de natureza elétrica e magnética, tem evolução no espaço $(\vec{r})$ e no tempo (t). Aplicando-se o rotacional na Eq. (2.1) e considerando que $\vec{B} = \mu_O \vec{H}$, obtém-se:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \times \vec{H}\right) \tag{2.7}$$

Como $\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, após alguns cálculos elementares chega-se na expressão:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \tag{2.8}$$

Levando-se em conta que $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$, a expressão final do duplo rotacional do campo $\vec{E}$ adquire a forma:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \tag{2.9}$$

2.3 – Características do Meio.

A polarização $\vec{P}$ depende da natureza do meio e, dependendo do comportamento deste meio, pode-se assumir algumas simplificações. Cabe, então, destacar algumas propriedades do meio e seus efeitos na relação entre $\vec{E}$ e $\vec{P}$. Neste trabalho, estaremos interessado no estudo dos seguintes ambientes de propagação:

a) *Meio com Resposta Local* - caracterizado por apresentar a propriedade de que a polarização $\vec{P}(\vec{r})$, em $\vec{r} = \vec{r}_1$, depende apenas de $\vec{E}(\vec{r}_1)$, ou seja, o campo elétrico $\vec{E}(\vec{r})$ não têm efeito quando $\vec{r} \neq \vec{r}_1$. Em outras palavras, para uma dada polarização obtida a partir de $\vec{r} = \vec{r}_1$ ($\vec{P}(\vec{r}_1)$), o único campo eficaz é $\vec{E}(\vec{r}_1)$, sendo que os campos em outros pontos não exercem um papel significativo na polarização. Esta aproximação é válida para fibras de sílica na faixa de comprimento de onda que vai de 0,5 – 2 μm, amplamente usada para os sistemas de comunicação óptica atuais [7], [12].

b) *Meio Homogêneo* - os meios que apresentam esta característica têm suas propriedades eletromagnéticas constantes em todos os pontos. Desta forma, independentemente da região situada, o comportamento eletromagnético será sempre o mesmo. Logo, pode-se dizer que a susceptibilidade linear do meio $\chi^{(1)}$ é independente da posição do vetor $\vec{r}$. Apesar da fibra óptica ser fabricada a partir de um material homogêneo, ela não poderá, por si mesma, prover a propriedade da homogeneidade. Este fato decorre de que a fibra é composta por dois índices de refração diferentes. Entretanto, em uma fibra óptica de índice degrau, o núcleo e a casca caracterizam-se por um meio homogêneo de forma individual.

c) *Meio Isotrópico* - é caracterizado, por exemplo, pelo fato de que $\vec{E}$ e $\vec{P}$ possuem a mesma orientação. Assumindo-se a fibra óptica com estrutura perfeitamente cilíndrica, pode-se afirmar que este guia é isotrópico [11], [12]. Deve-se destacar aqui que, na prática, surge nas fibras imperfeições advindas de esforços laterais assimétricos, núcleos não circulares e variações nos perfis de índice de refração, sendo estes oriundos de processos de fabricação, cablagem e instalação, e, em função destes, pode-se ter uma perda de isotropia na fibra.

2.4 – Polarização do Meio.

Considera-se, inicialmente, uma porção da matéria colocada sob a influência de um campo elétrico aplicado externamente, e de tal forma que suas moléculas so-

frem a ação do campo que tende orientar seus dipolos na direção do campo elétrico local. Em função desta orientação dos dipolos da molécula, diz que a molécula está polarizada. Dielétricos são meios que sofrem a polarização por um campo elétrico, e esse é o caso da sílica, matéria prima usada na fabricação das fibras [11], [12]. Considerando-se uma distribuição de duas cargas iguais, Q_1 e Q_2, com sinais opostos e separadas por uma distância d arbitrária e pequena, como é mostrado na Figura 2.1, tem-se a visualização de dipolos elétricos.

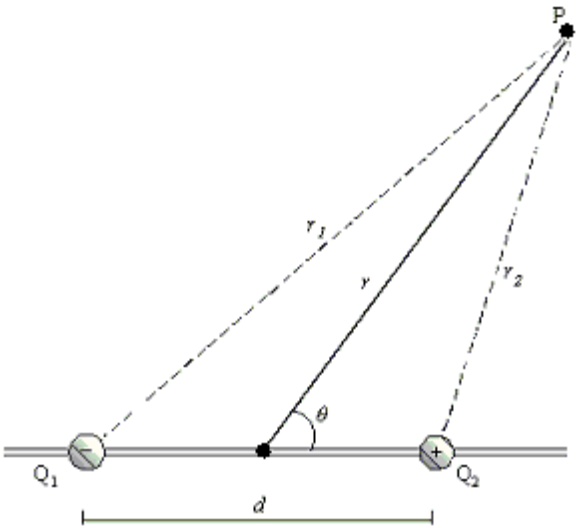


Figura 2.1: *Ilustração da teoria da aproximação de dipolos elétricos em uma distribuição de cargas [11]*

No dipolo elétrico, sendo as cargas iguais e com sinais opostos, a carga total será zero. Porém, devido ao fato de tais cargas estarem levemente separadas, o campo elétrico não desaparece [11], [12]

Seja agora um átomo, imerso em uma região sem a atuação de qualquer campo elétrico externo. O centro de massa dos elétrons coincide com o do núcleo resultando em um momento médio de dipolo elétrico do átomo igual a zero, como se pode ver na Figura 2.2 (a). Se houver a aplicação de um campo elétrico externo no átomo, este terá seus elétrons em movimento, e o centro de massa dos elétrons sofre um deslocamento x em relação ao núcleo, como é mostrado na Figura 2.2 (b).

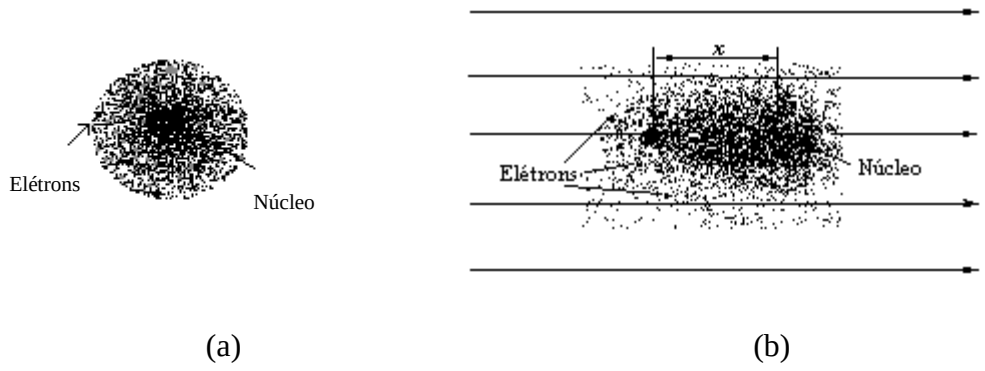


Figura 2.2: *(a) Polarização de um átomo sem a aplicação de um campo elétrico externo e (b) com a aplicação de um campo elétrico externo [11]*

Tem-se, então, o átomo polarizado, ou seja, forma-se um dipolo elétrico com momento $\vec{p}$, sendo este proporcional ao campo elétrico aplicado. Como resultado deste campo externo aplicado, tem-se uma carga positiva resultante em um lado da matéria e uma carga negativa resultante no outro lado. Deste modo, tem-se uma porção da matéria comportando-se como um grande dipolo elétrico. Porém, pode-se ter momentos de ordem superior ou de múltiplos pólos elétricos, como é o caso da distribuição de quatro cargas elétricas, formando um quadrupolo elétrico. Para esse tipo de distribuição de carga, a distribuição do campo elétrico decresce com a distância numa razão r^{-4}, onde r é a distância entre o ponto onde está o campo radiado pelo quadrupolo e um ponto de referência P, como visto na Figura 2.1. Pode-se verificar que: quanto maior for a ordem do multipolo (dipolo, quadrupolo, etc.), menor será o efeito do campo elétrico emitido por este multipolo. No caso de dielétricos, uma aproximação usual é a de dipolos elétricos [11].

2.5 – Polarização Linear e Não-Linear.

Os meios dielétricos respondem aos campos elétricos intensos de forma não-linear, isso acontecendo no caso da luz excitando uma fibra. Essa resposta não-linear induz um movimento não harmônico dos elétrons mais externos, sujeitos á influência do campo aplicado. Com isso, a polarização total $\vec{P}$, induzida pelos dipolos elétri-

cos, tem dependência não-linear no campo elétrico $\vec{E}$ e satisfaz a relação geral [7], [13] e [15]:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \left(\chi^{(1)} \vec{E} + \chi^{(2)} : \vec{E}\vec{E} + \chi^{(3)} \vdots \vec{E}\vec{E}\vec{E} + \ldots \right), \tag{2.10}$$

sendo ε_0 a permissividade no vácuo, $\chi^{(j)}$, j = 1,2,... a susceptibilidade de *j-ésima* ordem, a qual representa um tensor de ordem ($j+1$). A susceptibilidade elétrica descreve a resposta de um meio à ação de um campo elétrico externo, estando diretamente relacionada às propriedades dos átomos e moléculas do meio [11] e [12]. A componente linear $\chi^{(1)}$ é a contribuição dominante em $\vec{P}$, enquanto o termo de segunda ordem $\chi^{(2)}$ é responsável pela geração de alguns efeitos não-lineares. Entre estes se enquadram: a geração de segundo harmônico e a geração de soma de freqüências.

Deve-se destacar porém que $\chi^{(2)}$ é diferente de zero apenas para meios que não apresentam a propriedade de simetria de inversão no nível molecular. Como a molécula de sílica (SiO_2) é simétrica, $\chi^{(2)}$ será anulado, que é o caso da fibra óptica [14] e [15]. Com isso, as fibras normalmente não exibem efeitos não-lineares de segunda ordem. Esta propriedade pode ser estudada considerando a Eq. (2.11):

$$P = \chi \cdot E \left(1 + a_1 E + a_2 E^2 + \ldots \right) \tag{2.11}$$

onde o segundo termo, $\chi . a_1 E^2$, gera o segundo harmônico. Assumindo-se o campo elétrico na forma: $\vec{E} = E_0 sen(\omega t)$, acarretando que o segundo termo de P será dado por:

$$P_2 = \chi \cdot a_1 E_0^2 sen^2(\omega t) = \chi \cdot a_1 \left(\frac{E_0^2}{2} \right) \left(1 - cos 2\omega t \right) \tag{2.12}$$

Na expressão (2.12) existem dois termos, sendo o termo unitário correspondente à polarização *DC* dentro do cristal. O segundo é responsável pela presença do segundo harmônico no cristal [15]. Experimentos para comprovar a geração do 2º harmônico relatam que a eficiência de conversão da potência do laser para este harmônico é dependente do cristal particularmente considerado, e da intensidade da radiação fundamental.

Existe uma importante consideração de simetria, que impede de forma significativa, a produção de harmônicos pares pelos materiais que são isotrópicos, ou seja, apresenta as mesmas propriedades eletromagnéticas ao longo de todas as direções no material. O vidro (SiO_2) possui um centro de inversão, bem como a calcita [14]. Quando a isotropia ou um centro de inversão estão presentes, a polarização deve reverter o sinal, provocando uma reversão da resposta do campo elétrico aplicado, independente da complexidade da relação tensorial entre $\vec{E}$ e $\vec{P}$. Para concordar com essa restrição, os termos que contêm potência pares de $\vec{E}$ devem se extinguir. Uma demonstração ilustrada da restrição simétrica é vista na Figura 2.3, mostrando a dependência da polarização no material.

Uma característica da propriedade da simetria é que a expansão em potências da polarização (P) para $E = 0$ não pode conter termos pares. Se for considerado cristais que não têm centro de inversão, como o quartzo, então é possível ter um tipo de dependência da polarização. Um cristal cujo ponto de simetria impede a produção de harmônicos pares, pode ser forçado a produzir este efeito devido à aplicação de um intenso campo elétrico externo DC [15]. Este campo externo desloca a origem dos eixos da Figura 2.3 (a) para uma região transladada, onde uma expansão de P sobre a nova origem contém agora alguns termos pares (eixos pontilhados). Como a função $P(E)$ pode ser aproximada por uma função ímpar, obtém-se a relação:

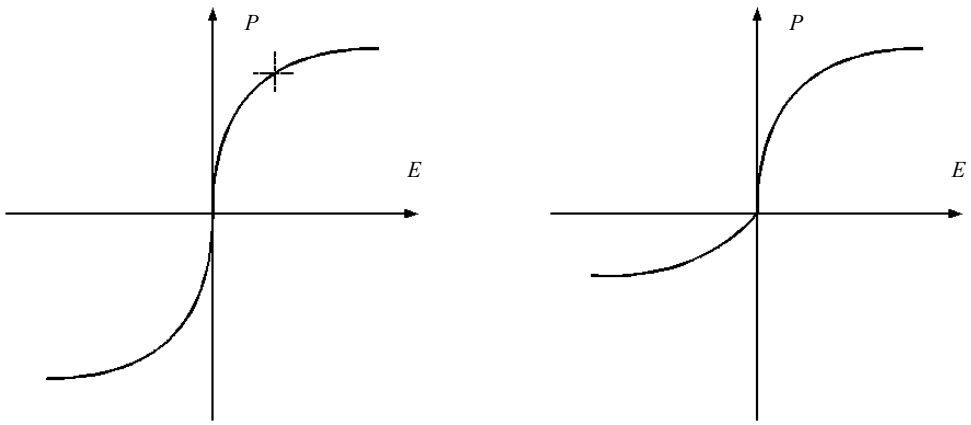
$$P(E) = -P(-E) \Rightarrow$$

$$\chi \cdot E\left(1 + a_1 E + a_2 E^2\right) = -\left\{\chi(-E)\left[1 + a_1(-E) + a_2(-E)^2\right]\right\} \Rightarrow$$

$$\chi \cdot E + a_1 \chi E^2 + a_2 \chi E^3 = \chi \cdot E - a_1 \chi E^2 + a_2 \chi E^3$$

$$a_1 \chi E^2 = -a_1 \chi E^2 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 0$$

Deve-se salientar, entretanto, que momentos de quadrupolo elétrico e dipolo magnético podem gerar fracos efeitos não-lineares de segunda ordem, não sendo significativos em nosso estudo. Os efeitos não-lineares de baixa ordem nas fibras ópticas tem sua origem na susceptibilidade de terceira ordem $\chi^{(3)}$, sendo esta responsável por fenômenos tais como: a geração de terceiro harmônico, a Mistura de Quatro Ondas (FWM) e a refração não-linear.



(a) (b)

Figura 2.3: *(a) Polarização em função de um campo elétrico aplicado em um meio que possui simetria de inversão, calcita (b) e um que não possui, quartzo [14], [15]*

Os processos físicos básicos, que contribuem para as não-linearidades, são transições e interações eletrônicas rápidas entre vibrações moleculares ou acústicas da luz. As transições eletrônicas dão origem a uma susceptibilidade não-linear de terceira ordem real e constante, ou seja, o índice de refração depende da intensidade (Efeito Kerr). Isso é o processo dominante que leva ao efeito da Automodulação de Fase (*SPM*), Modulação de Fase Cruzada (*XPM*) e Mistura de Quatro Ondas (*FWM*) [17].

Os termos ímpares restantes de ordem superior, presentes na Eq. (2.10), são desprezíveis devido à sua pequena amplitude em relação a $\chi^{(1)}$ *e* $\chi^{(3)}$ [19]. Além disso, considera-se neste trabalho o regime de não-linearidade fraca. A polarização induzida e o campo elétrico, $\vec{P}$ e $\vec{E}$, podem ser relacionados e é útil usar a notação [7]:

$$\vec{P}(\vec{r},t) = \vec{P}_L(\vec{r},t) + \vec{P}_{NL}(\vec{r},t) \tag{2.13}$$

onde: $\vec{P}_L(\vec{r},t)$ é a parte linear e $\vec{P}_{NL}(\vec{r},t)$ é a parte não-linear da polarização. A polarização linear é dada por:

$$\vec{P}_L(\vec{r},t) = \varepsilon_o \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(\vec{r},t-t')\vec{E}(r,t')dt' \ , \tag{2.14}$$

que representa a convolução do campo elétrico aplicada com a susceptibilidade do meio[19]. A polarização não-linear é dada por:

$$\vec{P}_{NL}(\vec{r},t) = \varepsilon_o \iiint \chi^{(3)}(t-t_1, t-t_2, t-t_3) \vdots \vec{E}(\vec{r},t_1)\vec{E}(\vec{r},t_2)\vec{E}(\vec{r},t_3)\, dt_1\, dt_2\, dt_3, \qquad (2.15)$$

onde os limites das integrais são - ∞ a + ∞.

Pode-se reescrever $\chi(\vec{r},t)$ como $\chi(t)$ por ser independente da coordenada espacial ($\vec{r}$), pelo fato deste estudo estar sendo abordado em um meio homogêneo e isotrópico, como visto na Seção 2.3. Considera-se, ainda, que essas relações são válidas no caso de assumir uma resposta local do meio e a teoria da aproximação de dipolos elétricos.

As Eqs. (2.9) a (2.14) provem um formalismo geral para estudar os efeitos não-lineares de terceira ordem nas fibras ópticas. Devido à sua complexidade, é comum fazer algumas simplificações. Numa simplificação maior, a polarização não-linear $\vec{P}_{NL}$, na Eq. (2.13), é tratada como uma pequena perturbação da polarização total induzida. Isto se dá por causa dos efeitos não-lineares serem relativamente fracos em fibras de sílica. A partir da Eq. (2.9), desprezando-se os efeitos não-lineares, pode-se reescrevê-la no domínio da freqüência, seguindo a dedução abaixo:

Aplicando a transformada de Fourier tem-se:

$$\nabla \times \nabla \times \tilde{E}(r,\omega) = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 \tilde{E}(r,\omega) + \mu_0 \omega^2 \tilde{P}_L(r,\omega)$$

onde: $\tilde{E}(r,\omega) \xleftrightarrow{F} E(r,t)$ é a transformada de Fourier de $\vec{E}(r,t)$ definida como:

$$\tilde{E}(r,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(r,t) \cdot e^{j\omega t} \cdot dt \qquad (2.16)$$

e

$$\tilde{\chi}^{(1)}(\omega) \xleftrightarrow{F} X^{(1)}(t) \qquad (2.17)$$

$$\frac{\partial E(r,t)}{\partial t} = j\omega \tilde{E}(r,\omega).$$

Sendo $\widetilde{P}_L(r,\omega) = \varepsilon_0 \widetilde{\chi}^{(1)}(\omega)\widetilde{E}(r,\omega)$, tem-se então:

$$\nabla \times \nabla \times \widetilde{E}(r,\omega) = \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \omega^2 \cdot \widetilde{E}(r,\omega) + \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \omega^2 \cdot \widetilde{\chi}^1(\omega) \cdot \widetilde{E}(r,\omega) \Rightarrow$$

$$\nabla \times \nabla \times \widetilde{E}(r,\omega) = \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \widetilde{E}(r,\omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \widetilde{\chi}^1(\omega) \cdot \widetilde{E}(r,\omega) \Rightarrow$$

$$\nabla \times \nabla \times \widetilde{E}(r,\omega) = \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \widetilde{E}(r,\omega)\left[1 + \widetilde{\chi}^1(\omega)\right].$$

Da definição:

$$\varepsilon_L(\omega) = 1 + \widetilde{\chi}^{(1)}(\omega), \tag{2.18}$$

tem-se:

$$\nabla \times \nabla \times \widetilde{E}(r,\omega) = \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \widetilde{E}(r,\omega) \cdot \varepsilon_L(\omega)$$

$$\nabla \times \nabla \times \widetilde{E}(r,\omega) - \varepsilon_L(\omega)\frac{\omega^2}{c^2} \cdot \widetilde{E}(r,\omega) = 0\,. \tag{2.19}$$

Sendo $\widetilde{\chi}^{(1)}(\omega)$ complexo, $\varepsilon_L(\omega)$ também será complexo. As partes real e imaginária de $\varepsilon_L(\omega)$ podem ser relacionadas ao índice de refração $n_L(\omega)$ e ao coeficiente de absorção $\alpha(\omega)$, como:

$$\varepsilon_L = \left(n_L(\omega) + \frac{j \cdot \alpha(\omega) \cdot c}{2 \cdot \omega}\right)^2 \tag{2.20}$$

Das Eqs. (2.18) e (2.20), $n_L(\omega)$ e $\alpha(\omega)$ são relacionados a $\chi^{(1)}(\omega)$ conforme deduzido a seguir:

$$\begin{aligned} \varepsilon_L(\omega) &= n_L^2(\omega) + \frac{2 \cdot n_L(\omega) \cdot j \cdot \alpha(\omega) \cdot c}{2 \cdot \omega} - \frac{\alpha^2(\omega) \cdot c^2}{4 \cdot \omega^2} = \\ & n_L^2(\omega) - \frac{\alpha^2(\omega) \cdot c^2}{4 \cdot \omega^2} + j \cdot \frac{n(\omega) \cdot \alpha(\omega) \cdot c}{\omega}. \end{aligned} \tag{a}$$

Comparando com a expressão (2.18), tem-se:

$$\varepsilon_L(\omega) = 1 + Re \cdot \left[\chi^{(1)}(\omega)\right] + Im \cdot \left[\chi^{(1)}(\omega)\right] \tag{b}$$

Igualando as partes imaginárias de (a) e (b), tem-se:

$$\frac{n_L(\omega) \cdot \alpha(\omega) \cdot c}{\omega} = Im\left[\chi^{(1)}(\omega)\right].$$

Logo,

$$\alpha(\omega) = \frac{\omega}{n_L(\omega) \cdot c} \cdot Im\left[\chi^{(1)}(\omega)\right]. \tag{2.21}$$

De forma análoga, tem-se:

$$n_L(\omega) = 1 + \frac{1}{2} \cdot Re\left[\chi^{(1)}(\omega)\right]. \tag{2.22}$$

Pode-se fazer duas simplificações na Eq. (2.19), antes de resolvê-la. A primeira delas, devido à baixa perda óptica nas fibras na região do comprimento de onda de interesse, a parte imaginária de $\varepsilon(\omega)$ é muito pequena comparada à parte real. Logo, pode-se substituir $\varepsilon_L(\omega)$ por $n_L^2(\omega)$ nas discussões [7] e [13]. O índice de refração $n_L(\omega)$ é, freqüentemente, independente das coordenadas espaciais, tanto no centro como na casca das fibras com índice em degrau, ou seja, é um meio homogêneo e isotrópico (Seção 2.3). Usando a identidade vetorial:

$$\nabla \times \nabla \times E \equiv \nabla(\nabla \cdot E) - \nabla^2 E, \tag{2.23}$$

pode-se escrever a Eq. (2.23), usando $\vec{D} = \varepsilon_L \vec{E}$, na forma:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} \equiv \nabla\left(\nabla \cdot \frac{\vec{D}}{\varepsilon_L}\right) - \nabla^2 \vec{E}. \tag{2.24}$$

Pela relação vetorial $\nabla \cdot (\varphi \vec{a}) = \vec{a}\,\nabla\varphi + \varphi \nabla \cdot \vec{a}$ [19], onde φ é um escalar e $\vec{a}$ um vetor, tem-se:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} \equiv \nabla\left[\vec{D} \cdot \left(\nabla \frac{1}{\varepsilon_L}\right) + \frac{1}{\varepsilon_L} \nabla \cdot \vec{D}\right] - \nabla^2 \vec{E}. \tag{2.25}$$

Usando a Eq. (2.3) para um meio dielétrico, obtém-se:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} \equiv -\nabla \left[\vec{E} \cdot \frac{\nabla \varepsilon_L}{\varepsilon_L} \right] - \nabla^2 \vec{E} \tag{2.26}$$

O primeiro termo da Eq. (2.26) pode ser desprezado, pois a variação incremental de ε, em função do comprimento de onda, é muito menor do que um; isto significa que $\partial\varepsilon/\partial\lambda << 1$ [19]. Assumindo a mesma consideração válida para a casca da fibra, tem-se como resultado:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} \equiv -\nabla^2 \vec{E} \,. \tag{2.27}$$

A Eq. (2.19), assume a forma a seguir:

$$\nabla \times \nabla \times \widetilde{E}(r,\omega) - n_L^2(\omega) \cdot \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \widetilde{E}(r,\omega) = 0$$

Com a simplificação já apresentada em (2.27), obtém-se:

$$-\nabla^2 \widetilde{E}(\vec{r},\omega) - n_L^2(\omega) \cdot \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \widetilde{E}(\vec{r},\omega) = 0 \,.$$

Logo:

$$\nabla^2 \widetilde{E} + n_L^2(\omega) \cdot \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \widetilde{E} = 0 \,. \tag{2.28}$$

As soluções da Eq. (2.28) representam a distribuição transversal dos modos na fibra, podendo ser obtida em termos das funções de Bessel [19]. Um determinado modo óptico refere-se a uma solução específica da equação de onda, ou seja, uma solução da Eq. (2.28) que satisfaz condições de contorno apropriadas e tem a propriedade de não variar sua distribuição espacial com a propagação do sinal [20] e [21]. As fibras ópticas podem suportar um número finito de modos guiados, cuja distribuição espacial $\widetilde{E}(\omega)$ é uma solução da Eq. (2.28) [7]. O número de modos que uma fibra pode apresentar, em um comprimento de onda específico, depende de seus parâmetros de projeto, tais como: o raio do núcleo a e a diferença entre os índices de refração do núcleo n_n e da casca n_c.

Um parâmetro importante, usado para definir o número de modos guiados dentro da fibra, é a freqüência normalizada V, ou, simplesmente, parâmetro V, que é dado por [7], [13], [14], [16], [20] e [21]:

$$V = k_0 a \sqrt{\left(n_n^2 - n_c^2\right)}. \tag{2.29}$$

O procedimento para se determinar quantos modos se propagam na fibra é um tanto complicado e pode ser visto na literatura [14] e [16]. O caso de interesse, para nosso estudo, restringe-se a uma fibra óptica monomodo, onde existe apenas um modo propagante HE_{11}, chamado de modo fundamental, o qual é obtido quando $V \approx$ 2,405 na Eq. (2.29). Assim, fibras que suportam apenas um modo óptico são chamadas fibras monomodo. Nessas fibras reside nosso interesse e, portanto, pode-se desprezar a excitação de outros modos ópticos na fibra óptica.

2.6 – Equação de Propagação do Pulso.

Quando pulsos ópticos se propagam dentro da fibra, surgem os efeitos lineares tais como, dispersão e atenuação. Se a intensidade da luz for alta os efeitos não-lineares, tais como Automodulação de Fase (*SPM*), Modulação de Fase Cruzada (*XPM*) e Mistura de Quatro Ondas (*FWM*), não podem ser desprezados. Assim, um pulso óptico, percorrendo a fibra, sofre a ação de efeitos lineares e não-lineares que influenciam tanto a forma temporal como o espectro do mesmo.

Introduz-se, agora, a equação que governa a propagação dos pulsos ópticos em fibras dispersivas não-lineares, sendo esta obtida a partir da Eq. (2.9). Tomando-se a Eq. (2.9), e considerando a decomposição $P(r,t) = P_L(r,t) + P_{NL}(r,t)$, obtém-se [7]:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}_L}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}_{NL}}{\partial t^2} \Rightarrow$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 P_L}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 P_{NL}}{\partial t^2} \tag{2.30}$$

Da relação (2.30), tem-se:

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E = \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}P_L + \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}P_{NL}\,, \tag{2.31}$$

onde as partes linear e não-linear da polarização induzida são descritas para o campo elétrico $\vec{E}(\vec{r},t)$, através das Eqs. (2.14) e (2.15), respectivamente.

2.6.1 – PROPAGAÇÃO DO PULSO NÃO-LINEAR.

Para obter a equação de propagação do pulso em um meio não-linear é necessário fazer simplificações na Eq. (2.31). A primeira delas, a parte não-linear P_{NL} é tratada como uma pequena perturbação da linear P_L. Isso é justificado se considerar o regime de não-linearidade fraca, já citado anteriormente (Seção 2.5). A outra consideração é que o campo óptico mantém sua polarização ao longo do comprimento da fibra, de tal forma que possa ser adotada uma aproximação escalar. Uma outra simplificação é assumir um campo óptico quase monocromático, ou seja, o espectro do pulso, centrado em ω_0, apresentando uma largura espectral $\Delta\omega$ tal que $\Delta\omega / \omega_0 << 1$. Considerando-se pulsos da ordem de 1 ps ou maiores, a aproximação da envoltória variando suavemente, resulta que, dentro do intervalo de duração de um pulso existem vários ciclos da portadora. Neste caso, é útil separar a parte de variação rápida do campo elétrico, reescrevendo-a [7]:

$$\vec{E}(r,t) = \frac{1}{2}\left[E(r,t)\right]\cdot e^{-j\omega_0 t}\,\hat{x} + c.c.\,, \tag{2.32}$$

onde: $\hat{x}$ é o vetor unitário de polarização, $\vec{E}(r,t)$ é uma função temporal de variação suave relativa ao período óptico e ω_0 é a freqüência da portadora.

As componentes de polarização, P_L e P_{NL}, podem também serem expressas de forma similar [7]:

$$\vec{P}_L(\vec{r},t) = \frac{1}{2}\left[P_L(\vec{r},t)e^{-j\omega_0 t} + c.c.\right]\hat{x} \tag{2.33}$$

$$\vec{P}_{NL}(\vec{r},t) = \frac{1}{2}\left[P_{NL}(\vec{r},t)e^{-j\omega_0 t} + c.c.\right]\hat{x}\,. \tag{2.34}$$

A componente linear P_L pode ser obtida pela substituição de (2.32) em (2.14) e, depois, (2.33) em (2.14); tem-se, então:

$$\frac{1}{2}\left[P_L(\vec{r},t)e^{-j\omega_0 t} + c.c.\right]\hat{x} = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{t} \chi^{(1)}(t-t')\frac{1}{2}\hat{x}\left[E(\vec{r},t')e^{-j\omega_0 t'} + c.c.\right]\cdot dt'$$

$$P_L(\vec{r},t)e^{-j\omega_0 t} = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(t-t')E(\vec{r},t')e^{-j\omega_0 t'}dt' \Rightarrow$$

$$P_L(\vec{r},t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(t-t')E(\vec{r},t')e^{j\omega_0(t-t')}dt'$$

Usando o teorema da convolução, de [19] tem-se:

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cdot g(t-\tau)d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G(\omega)e^{-j\omega_0 t}d\omega\,.$$

Fazendo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(t-t')E(\vec{r},t')dt' = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(\omega)\tilde{E}(\vec{r},\omega)e^{-j\omega_0 t'}d\omega$$

$$\tilde{P}_L(\vec{r},\omega) = \frac{1}{2\pi}\varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(\omega)\cdot\tilde{E}(\vec{r},\omega)e^{-j\omega_0 t}e^{j\omega_0(t-t')}d\omega \Rightarrow$$

$$\tilde{P}_L(\vec{r},\omega) = \frac{1}{2\pi}\varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(\omega)\cdot\tilde{E}(\vec{r},\omega)e^{-j\omega_0 t}e^{j\omega t}e^{-j\omega_0 t'}d\omega \Rightarrow$$

$$\tilde{P}_L(\vec{r},\omega) = \frac{1}{2\pi}\varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(\omega)\cdot\tilde{E}(\vec{r},\omega)e^{-j\omega_0 t'}e^{j(\omega-\omega_0)t}d\omega.$$

Usando a propriedade de deslocamento em freqüência:

$$E(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E(t)e^{j\omega_0 t}d\omega$$

$$\Im\left[E(t)e^{-j\omega_0 t}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} E(t)e^{-j\omega_0 t}e^{j\omega t}d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} E(t)e^{j(\omega-\omega_0)t}d\omega\,.$$

Logo:

$$\tilde{P}_L(\vec{r},\omega) = \frac{\varepsilon_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(\omega)\tilde{E}(\vec{r},\omega-\omega_0)e^{-j(\omega-\omega_0)t}d\omega, \tag{2.35}$$

onde: $\Im$ representa a transformada de Fourier.

A componente não-linear, $P_{NL}(\vec{r},t)$, é obtida pela substituição da Eq. (2.34) na Eq. (2.15). Simplificações consideráveis ocorrem se a resposta não-linear for assumida instantânea, de forma que a dependência do tempo de $\chi^{(3)}$, na Eq. (2.15), seja dada pelo produto de três funções delta de Dirac [19], na forma $\delta(t-t_j)$, j = 1,2,3. Assim, a Eq. (2.15) assume a forma descrita abaixo [7]:

$$\vec{P}_{NL}(\vec{r},t) = \varepsilon_o \iiint \chi^{(3)}(t-t_1, t-t_2, t-t_3) \vdots \vec{E}(\vec{r},t_1)\vec{E}(\vec{r},t_2)\vec{E}(\vec{r},t_3)\, dt_1\, dt_2\, dt_3 \qquad (2.15)$$

$$\vec{P}_{NL}(\vec{r},t) = \varepsilon_0 \iiint \chi^{(3)} \delta(t_1-t)\delta(t_2-t)\delta(t_3-t)\vec{E}(\vec{r},t_1)\vec{E}(\vec{r},t_2)\vec{E}(\vec{r},t_3) dt_1 dt_2 dt_3$$

$$\vec{P}_{NL}(\vec{r},t) = \varepsilon_0 \iiint \chi^{(3)} \delta(t_1-t)\vec{E}(\vec{r},t_1)\delta(t_2-t)\vec{E}(\vec{r},t_2)\delta(t_3-t)\vec{E}(\vec{r},t_3) dt_1 dt_2 dt_3,$$

onde os limites das integrais acima são de -∞ a +∞ .

Tem-se, pela propriedade da amostragem da função impulso unitário:

$$\int f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0). \qquad (2.36)$$

Logo:

$$\vec{P}_{NL}(\vec{r},t) = \varepsilon_O \chi^{(3)} \vdots \vec{E}(\vec{r},t)\vec{E}(\vec{r},t)\vec{E}(\vec{r},t) \qquad (2.37)$$

Dessa forma, a Eq. (2.37) é uma aproximação válida para pulsos com larguras temporais da ordem de 1 ps ou maiores [7]. A hipótese de resposta não-linear instantânea equivale a desprezar a contribuição das vibrações moleculares para $\chi^{(3)}$, conhecida como Efeito Raman; ou seja, a aplicação de um pulso óptico curto de alta intensidade, em uma molécula, perturba a estrutura eletrônica dessa e resulta numa mudança da sua polarização, dependente da intensidade, ou em um índice de refração com a mesma dependência. Em geral, ambos elétrons e núcleo respondem ao campo óptico na forma não-linear, sendo a resposta do núcleo inerentemente mais lenta, comparada com a resposta eletrônica. Para fibras de sílica, o vibracional ou resposta Raman ocorre numa escala de tempo de 60 a 70 fs. Assim para pulsos de ps, a resposta não-linear pode ser considerada instantânea.

Levando a Eq. (2.34) na Eq. (2.37), obtém-se:

$$\frac{1}{2}\hat{x}\left[P_{NL}\, e^{-j\omega_0 t} + P_{NL}^{*}\, e^{j\omega_0 t}\right] = \varepsilon_0 \chi^{(3)} \hat{x} \cdot \left[\frac{E\, e^{-j\omega_0 t} + E^{*}\, e^{j\omega_0 t}}{2}\right]^3$$

$$\frac{1}{2}\hat{x}\left[P_{NL}\, e^{-j\omega_0 t} + P_{NL}^{*}\, e^{j\omega_0 t}\right] = \frac{\varepsilon_0 \chi^{(3)}}{8}\left[E\, e^{-j\omega_0 t} + E^{*}\, e^{j\omega_0 t}\right]^3 \hat{x} =$$

$$= \frac{\varepsilon_0 \chi^{(3)}}{8}\hat{x} \cdot \left[\begin{array}{l} E^3\, e^{-j3\omega_0 t} + 3 \cdot E^2\, e^{-j2\omega_0 t} \cdot E^{*}\, e^{j\omega_0 t} + 3 \cdot E^{*2}\, e^{j2\omega_0 t} \cdot E\, e^{-j\omega_0 t} \\ + E^{*3}\, e^{j3\omega_0 t} \end{array}\right]$$

$$= \frac{\varepsilon_0 \chi^{(3)}}{8}\hat{x} \cdot \left[E^3\, e^{-j3\omega_0 t} + 3 \cdot E^2 E^{*}\, e^{-j\omega_0 t} + 3 \cdot E^{*2} E\, e^{j\omega_0 t} + E^{*3}\, e^{j3\omega_0 t}\right]$$

$$= \frac{\varepsilon_0 \chi^{(3)}}{8}\hat{x} \cdot \left[E^3\, e^{-j3\omega_0 t} + 3 \cdot E^2 E^{*}\, e^{-j\omega_0 t} + c.c.\right].$$

Desprezando-se o 3º harmônico, pois este necessita de condições apropriadas de casamento de fase, e considerando a relação:

$$E^2 \cdot E^{*} = E \cdot E \cdot E^{*} = E \cdot \left(|E| e^{j\phi} \cdot |E^{*}| e^{-j\phi}\right) = E \cdot |E|^2 ,$$

obtém-se:

$$\frac{1}{2}\left[P_{NL}\, e^{-j\omega_0 t} + c.c.\right]\hat{x} = \frac{\varepsilon_0 \chi^{(3)}}{8}\left[3 \cdot E \cdot |E|^2\, e^{-j\omega_0 t} + c.c.\right]\hat{x} =$$

$$\frac{1}{2} P_{NL}\, e^{-j\omega_0 t} = 3 \cdot E \cdot |E|^2 \frac{\varepsilon_0 \chi^{(3)}}{8} e^{-j\omega_0 t}$$

$$P_{NL} = \frac{3}{4}\chi^{(3)} |E|^2 \cdot \varepsilon_0 E .$$

Pela definição de ε_{NL}, onde a contribuição não-linear para a constante dielétrica é definida como:

$$\varepsilon_{NL} = \frac{3}{4}\chi^{(3)} |E(\vec{r},t)|^2 . \tag{2.38}$$

Logo,

$$P_{NL}(\vec{r},t) \approx \varepsilon_0 \varepsilon_{NL} E(\vec{r},t) , \tag{2.39}$$

Para obter a representação da equação de onda, para a amplitude $E(\vec{r},t)$, é mais conveniente trabalhar no domínio de Fourier. Isso não é geralmente possível quando a Eq. (2.31) for não-linear, por causa da dependência da ε_{NL}. Em uma primeira aproximação, pode-se tratar ε_{NL} como uma constante durante a dedução da equação de propagação. A aproximação é justificada devido à natureza perturbatória de P_{NL}. Substitui-se as Eqs. (2.32) – (2.34) na Eq. (2.31) e considera-se, a transformada de Fourier $\widetilde{E}(\vec{r},\omega-\omega_0)$, definida como:

$$\widetilde{E}(\vec{r},\omega-\omega_0)=\int_{-\infty}^{\infty}E(\vec{r},t)e^{j(\omega-\omega_0)t}dt, \tag{2.40}$$

de modo a satisfazer a equação de Helmholtz, conforme dedução a seguir. Considere, inicialmente, a Eq. (2.31) substituindo $\vec{E}$ dado por (2.40). Logo:

$$\nabla^2\left\{\frac{1}{2}\hat{x}\left[E(\vec{r},t)e^{-j\omega_0 t}+c.c.\right]\right\}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{\frac{1}{2}\hat{x}\left[E(\vec{r},t)e^{-j\omega_0 t}+c.c.\right]\right\}=$$

$$=\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{\frac{1}{2}\hat{x}\left[P_L(\vec{r},t)e^{-j\omega_0 t}+c.c.\right]\right\}+\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{\frac{1}{2}\hat{x}\left[P_{NL}(\vec{r},t)e^{-j\omega_0 t}+c.c.\right]\right\}$$

Desconsiderando os complexos conjugados, os vetores unitários e as componentes c.c., tem-se:

$$\begin{aligned}&\nabla^2\left[E(\vec{r},t)e^{-j\omega_0 t}\right]-\frac{1}{c^2}\left(-\omega_0{}^2\right)\left[E(\vec{r},t)e^{-j\omega_0 t}\right]=\\&=-\mu_0\omega_0{}^2\left[P_L(\vec{r},t)e^{-j\omega_0 t}\right]-\mu_0\omega_0{}^2\left[P_{NL}(\vec{r},t)e^{-j\omega_0 t}\right].\end{aligned} \tag{2.41}$$

Usando a Eq. (2.40):

$$P_L(\vec{r},t)e^{-j\omega_0 t}=\varepsilon_0\int_{-\infty}^{\infty}\chi^{(1)}(t-t')E(\vec{r},t')e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega_0 t'}e^{-j\omega_0 t}dt'\Rightarrow$$

$$P_L(\vec{r},t)e^{-j\omega_0 t}=\varepsilon_0\int_{-\infty}^{\infty}\chi^{(1)}(t-t')E(\vec{r},t')e^{-j\omega_0 t'}dt'$$

Pela propriedade da convolução de Fourier:

$$P_L(\vec{r},t)e^{-j\omega_0 t}=\varepsilon_0\chi^{(1)}(\omega)E(\vec{r},\omega)e^{-j\omega_0 t'}$$

Utilizando-se, agora, a propriedade do deslocamento em freqüência:

$$P_L(\vec{r},t)e^{-j\omega_0 t} = \varepsilon_0 \chi^{(1)}(\omega)E(\vec{r},\omega-\omega_0). \tag{2.42}$$

Considerando-se agora da Eq. (2.39) e aplicando-se o deslocamento para $P_{NL}(\vec{r},t)e^{-j\omega_0 t}$, fica:

$$P_{NL}(\vec{r},t)e^{-j\omega_0 t} = \varepsilon_0\varepsilon_{NL}E(\vec{r},\omega-\omega_0). \tag{2.43}$$

Substituindo (2.40), (2.42) e (2.43) em (2.41), tem-se:

$$\nabla^2\left[E(\vec{r},\omega-\omega_0)\right]+\frac{\omega_0^{\ 2}}{c^2}\left[E(\vec{r},\omega-\omega_0)\right]=$$

$$= -\mu_0\omega_0^{\ 2}\varepsilon_0\chi^{(1)}(\omega)E(\vec{r},\omega-\omega_0)-\mu_0\omega_0^{\ 2}\varepsilon_0\varepsilon_{NL}E(\vec{r},\omega-\omega_0).$$

Como $k_0 = \omega_0/c$ e $\mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$:

$$\nabla^2\tilde{E}+k_0^{\ 2}\tilde{E} = -k_0^{\ 2}\chi^{(1)}(\omega)\tilde{E}-k_0^{\ 2}\varepsilon_{NL}\tilde{E}$$

$$\nabla^2\tilde{E}+k_0^{\ 2}\left[1+\chi^{(1)}(\omega)+\varepsilon_{NL}\right]\tilde{E}=0$$

Sendo a relação:

$$\varepsilon(\omega) = 1+\chi^{(1)}{}_{(\omega)}+\varepsilon_{NL}, \tag{2.44}$$

tem-se:

$$\nabla^2\tilde{E}+\varepsilon(\omega)k_0^{\ 2}\,\tilde{E}=0 \tag{2.45}$$

A expressão

(2.45) é conhecida como Equação de Helmholtz [7], onde:

$$\varepsilon(\omega) = \left(1+\chi^{(1)}{}_{(\omega)}\right)+\varepsilon_{NL} \tag{2.46}$$

é a constante dielétrica cuja parte não-linear, ε_{NL}, é dada pela Eq. (2.38).

Similar à Eq. (2.20), a constante dielétrica pode ser relacionada com o índice de refração $\tilde{n}$ e o coeficiente de absorção $\tilde{\alpha}$. Porém, $\tilde{n}$ e $\tilde{\alpha}$ tornam-se dependentes da intensidade, por causa de ε_{NL}. É comum introduzir [7]:

$$\tilde{n} = n_L + n_2 |E|^2 \tag{2.47}$$

$$\tilde{\alpha} = \alpha + \alpha_2 |E|^2 , \tag{2.48}$$

onde n_2 e α_2 são os índices de refração não-linear e o coeficiente de absorção, respectivamente.

A Eq.

(2.45) pode ser resolvida usando-se o método clássico de separação de variáveis. Assumindo-se uma solução da forma:

$$\tilde{E}(\vec{r}, \omega - \omega_0) = F(x,y)\,\tilde{A}(z, \omega - \omega_0)\, e^{j\beta_0 t} , \tag{2.49}$$

onde: $\tilde{A}(z,\omega)$ é uma função de variação suave em z e β_0 é o número de onda em ω_0 [7]. Na Eq.

(2.45) substitui-se a Eq. (2.49) e, a partir da Eq. (2.50), obtêm-se as Eqs. (2.51) para $F(x,y)$ e (2.52) para $\tilde{A}(z,\omega)$, apresentadas nas deduções das Eq. (A.4) e (A.5), presentes no Anexo A:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\tilde{A}\, e^{j\beta_0 z} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\tilde{A}\, e^{j\beta_0 z} + F\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[\tilde{A}\, e^{j\beta_0 z}\right] + \varepsilon(\omega) k_0{}^2 \left[F\,\tilde{A}\, e^{j\beta_0 z}\right] = 0 \tag{2.50}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \left[\varepsilon(\omega) k_0{}^2 - \tilde{\beta}_0^2\right] F = 0 \tag{2.51}$$

$$2j\beta_0 \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} + \tilde{A}\left[\tilde{\beta}^2 - \beta_0{}^2\right] = 0 \tag{2.52}$$

A Eq. (2.51) refere-se à distribuição do campo no sentido transversal à direção de propagação e sua solução leva aos modos propagantes da fibra [16] e [21]. A Eq. (2.52) representa a propagação do campo ao longo do eixo z e sua solução leva à componente axial do campo. O número de onda $\tilde{\beta}$ é determinado resolvendo-se a equação de auto-valor (2.51) para os modos da fibra [7], [13] e [15]. Para obter a Eq. (2.52), a segunda derivada $\partial^2 \tilde{A} / \partial z^2$ foi desprezada, visto que $\tilde{A}(z,\omega)$ é uma função

de z variando suavemente. A constante dielétrica $\varepsilon(\omega)$, na Eq. (2.51), pode ser aproximada por:

$$\varepsilon = (n_L + \Delta n)^2 = n_L^2 + 2n_L \Delta n + \Delta n^2, \tag{2.53}$$

onde Δn é uma pequena perturbação, dada por [7]:

$$\Delta n = n_2 |E|^2 + j\frac{\tilde{\alpha}}{2k_0} \tag{2.54}$$

A Eq. (2.51) pode ser resolvida usando a teoria da perturbação de 1ª Ordem que considera que Δn não altera a distribuição $F(x,y)$ do campo [19]. Deve-se, primeiro, substituir ε_L por n_L^2 e obtêm-se a distribuição modal de $F(x,y)$ e o número de onda $\beta(\omega)$ correspondente.

Apesar da teoria da perturbação de 1ª Ordem acarretar que Δn não afeta a distribuição modal de $F(x,y)$, contudo, o auto valor $\tilde{\beta}$ torna-se [7]:

$$\tilde{\beta}(\omega) = \beta(\omega) + \Delta\beta, \tag{2.55}$$

onde:

$$\Delta\beta = \frac{k_0 \iint \Delta n |F(x,y)|^2 \, dx\, dy}{\iint |F(x,y)|^2 \, dx\, dy}, \tag{2.56}$$

sendo os limites das integrais de -∞ a +∞.

Esse processo completa a solução formal da Eq. (2.31), em primeira ordem para a perturbação $\vec{P}_{NL}$. Usando a Eq. (2.32), o campo elétrico $\vec{E}(\vec{r},t)$ pode ser escrito, no domínio do tempo na forma:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{2}\hat{x}\left[F(x,y)\,A(z,t)\,e^{j\beta_0 z} \cdot e^{-j\omega_0 t} + c.c\right]. \tag{2.57}$$

Logo,

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{2}\hat{x}\left[F(x,y)\,A(z,t)\,e^{j(\beta_0 z - \omega_0 t)} + c.c\right] \tag{2.58}$$

onde $A(z,t)$ é a envoltória de variação suave do pulso. A transformada de Fourier $\widetilde{A}(z,\omega-\omega_0)$, de $A(z,t)$, satisfaz a Eq. (2.52), e considerando a Eq. (2.55) e, ainda, assumindo a aproximação:

$$\widetilde{\beta}^2-\beta_0{}^2\approx 2\beta_0\left(\widetilde{\beta}-\beta_0\right),$$

resulta em:

$$-\frac{\partial\widetilde{A}}{\partial z}+j\left(\beta(\omega)+\Delta\beta-\beta_0\right)\widetilde{A}=0\,.$$

Logo,

$$\frac{\partial\widetilde{A}}{\partial z}=j\widetilde{A}\left(\beta(\omega)+\Delta\beta-\beta_0\right). \tag{2.59}$$

O significado físico dessa equação é claro. Cada componente espectral, dentro da envoltória do pulso, quando se propaga na fibra, adquire um deslocamento de fase cuja magnitude é dependente da freqüência e da intensidade [7], [13]. Nesse ponto, pode-se voltar no domínio do tempo, tomando a transformada inversa de Fourier da Eq. (2.59), e obter a equação de propagação para $A(z,t)$. Contudo, dado que a dependência funcional exata de $\beta(\omega)$ é difícil de ser avaliada, então ela é geralmente expandida numa série de Taylor em função da freqüência da portadora ω_0 [19]:

$$\beta(\omega)=\beta_0+(\omega-\omega_0)\beta_1+\frac{1}{2}(\omega-\omega_0)^2\beta_2+\frac{1}{6}(\omega-\omega_0)^3\beta_3+\cdots, \tag{2.60}$$

onde:

$$\beta_m=\left(\frac{d^m\beta}{d\omega^m}\right)_{\omega=\omega_0}\qquad (m=1,2,3,\cdots). \tag{2.61}$$

Os termos cúbicos e de ordem superior nessa expansão geralmente podem ser desprezados, se a largura espectral $\Delta\omega<<\omega_0$. Substituindo-se a Eq. (2.60) na Eq. (2.59) e tomando a transformada inversa de Fourier, definida como:

$$A(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{A}(z,\omega-\omega_0)\, e^{-j(\omega-\omega_0)t}\, d\omega\,, \tag{2.62}$$

a equação resultante para $A(z,t)$ fica:

$$\frac{\partial \widetilde{A}}{\partial z} = j\widetilde{A}\left(\beta_0 + (\omega-\omega_0)\beta_1 + \frac{1}{2}(\omega-\omega_0)^2\beta_2 + \Delta\beta - \beta_0\right).$$

Se $\beta_2 \approx 0$ para alguns valores específicos de ω_0, situados próximo do comprimento de onda de dispersão zero da fibra, é necessário incluir o termo cúbico β_3. Passando para o domínio do tempo e substituindo $\omega-\omega_0$ por $j\partial/\partial t$, tem-se:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = j\left(j\beta_1\frac{\partial A}{\partial t} + j^2\frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \Delta\beta\, A\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\beta_1\frac{\partial A}{\partial t} - j\frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + j\Delta\beta\, A\,. \tag{2.63}$$

No caso de operarmos próximo ao comprimento de onda zero, a Eq. (2.63) deve incluir termos de ordem cúbica, conforme mostrado a seguir:

$$\frac{\partial A(z,t)}{\partial z} = -\beta_1\frac{\partial A(z,t)}{\partial t} - j\frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A(z,t)}{\partial t^2} + \frac{\beta_3}{6}\frac{\partial^3 A(z,t)}{\partial t^3} + j\Delta\beta A(z,t)\,. \tag{2.64}$$

O termo com $\Delta\beta$ inclui o efeito de perda e de não-linearidade na fibra. Usando-se as Eqs. (2.54) e (2.56), $\Delta\beta$ pode ser calculado e substituído na Eq. (2.63). De fato, usando estas relações, pode-se escrever o terceiro termo do lado direito de (2.63):

$$j\,\Delta\beta\, A = j\, A\frac{k_0\iint_{-\infty}^{\infty}\left(n_2|E|^2 + j\dfrac{\widetilde{\alpha}}{2k_0}\right)|F(x,y)|^2\, dx\, dy}{\iint_{-\infty}^{\infty}|F(x,y)|^2\, dx\, dy}$$

De (2.58) advém: $\vec{E}(\vec{r},t) = \dfrac{1}{2}\hat{x}\left[F(x,y)\,A(z,t)\,e^{j(\beta_0 z-\omega_0 t)} + c.c\right]$

$$\therefore \left|\vec{E}(\vec{r},t)\right|^2 = |F(x,y)|^2\cdot|A(z,t)|^2\,.$$

Tem-se:

$$= j\,A\left\{\frac{k_0\int\int_{-\infty}^{\infty}\left(n_2\left|F(x,y)\right|^4\cdot\left|A(z,t)\right|^2+j\frac{\tilde{\alpha}}{2k_0}\left|F(x,y)\right|^2\right)dx\,dy}{\int\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(x,y)\right|^2dx\,dy}\right\}$$

$$= j\,A\left\{\frac{k_0 n_2\left|A(z,t)\right|^2\int\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(x,y)\right|^4dx\,dy+j\frac{\tilde{\alpha}}{2}\int\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(x,y)\right|^2dx\,dy}{\int\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(x,y)\right|^2dx\,dy}\right\}$$

$$= j\,k_0 n_2 A\left|A\right|^2\frac{\int\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(x,y)\right|^4dx\,dy}{\int\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(x,y)\right|^2dx\,dy}-\frac{\tilde{\alpha}}{2}A$$

$$= j\,n_2\frac{\omega_0}{c}A\left|A\right|^2\frac{1}{\dfrac{\int\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(x,y)\right|^2dx\,dy}{\int\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(x,y)\right|^4dx\,dy}}-\frac{\tilde{\alpha}}{2}A\,.$$

Define-se a área efetiva, A_{eff}, por [7]:

$$A_{eff}=\frac{\left(\int\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(x,y)\right|^2dx\,dy\right)^2}{\int\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(x,y)\right|^4dx\,dy} \tag{2.65}$$

$$\therefore\; j\,\Delta\beta\,A = j\,n_2\frac{\omega_0}{c}\frac{A\left|A\right|^2}{A_{eff}}-\frac{\tilde{\alpha}}{2}A\,.$$

Dado que:

$$\gamma=\frac{n_2\,\omega_0}{c\,A_{eff}}\,, \tag{2.66}$$

decorre:

$$j\Delta\beta A = jA\left|A\right|^2\gamma-\frac{\tilde{\alpha}}{2}A\,.$$

Da Eq. (2.48): $\tilde{\alpha} = \alpha + \alpha_2 |E|^2$; sendo $\alpha_2 << \alpha$ em fibras ópticas e considerando-se o regime de não-linearidade fraca, tem-se: $\tilde{\alpha} = \alpha$. Adotando essa aproximação e considerando-se a Eq. (2.63), obtém-se:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} - j\frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + jA|A|^2\gamma - \frac{\alpha}{2}A .$$

Portanto:

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + j\frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{\alpha}{2}A = j\gamma|A|^2 A \qquad (2.67)$$

A amplitude do pulso A é considerada normalizada, tal que $|A|^2$ representa a potência óptica [7], [22]. A quantidade $\gamma|A|^2$ é, então, medida em m^{-1}, se n_2 for expresso por m^2/W.

O cálculo do parâmetro A_{eff} requer o uso da distribuição $F(x,y)$ para o modo fundamental da fibra. Destaca-se, aqui, que A_{eff} depende claramente dos parâmetros da fibra, tais como: o raio do núcleo e a diferença dos índices do núcleo e da casca, sendo que A_{eff} pode variar numa faixa de 20 - 100 μm^2 na janela de 1550 nm, dependendo do tipo de fibra. Como resultado, γ apresenta valores em uma faixa de 1 até 10 W^{-1}/Km, se for usado $n_2 \approx 2{,}6 \cdot 10^{-20}$ m^2/W. Vale salientar que existem tipos de fibra que apresentam uma grande área efetiva, sendo A_{eff} incrementada intencionalmente para reduzir o impacto da não-linearidade na fibra.

A Eq. (2.67) descreve a propagação do pulso óptico de picosegundos numa fibra monomodo. Na literatura ela é referida como a equação Não-Linear de Schrödinger (*NLS*). A equação *NLS* inclui os efeitos de perda da fibra, através de α, da dispersão cromática de primeira ordem, através de β_2, e da não-linearidade da fibra, através de γ. O significado físico do parâmetro β_1 pode ser interpretado como uma envoltória do pulso movendo-se a uma velocidade de grupo $v_g \equiv 1/\beta_1$, enquanto que os efeitos da dispersão de velocidade de grupo (*GVD*) são governados por β_2. Este parâmetro pode ser negativo ou positivo, dependendo se o comprimento de onda

de operação λ estiver abaixo ou acima do comprimento de onda de dispersão zero, λ_D, da fibra (ver Figura 3.4).

Deve-se ter presente que, se estivermos trabalhando próximo da região de comprimento de onda zero, ou seja, $\beta_2 \approx 0$, torna-se necessário a inclusão do termo cúbico β_3, sendo que este representa a dispersão cromática de segunda ordem. Neste caso, tem-se a equação Não-Linear de Schrödinger (*NLS*) escrita na seguinte forma:

$$\frac{\partial A(z,t)}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A(z,t)}{\partial t} + j\frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A(z,t)}{\partial t^2} - \frac{\beta_3}{6}\frac{\partial^3 A(z,t)}{\partial t^3} + \frac{\alpha}{2}A(z,t) = j\gamma\left|A(z,t)\right|^2 A(z,t) \tag{2.68}$$

Se, nesta última equação, introduzir-se um sistema de coordenadas que se move com a mesma velocidade de grupo, v_g, e usar-se a seguinte transformação $T = t - z/v_g = t - \beta_1 z$, obtém-se uma forma simplificada para a Eq. (2.68):

$$\frac{\partial A(z,T)}{\partial z} + j\frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A(z,T)}{\partial T^2} - \frac{\beta_3}{6}\frac{\partial^3 A(z,T)}{\partial T^3} + \frac{\alpha}{2}A(z,T) = j\gamma\left|A(z,T)\right|^2 A(z,T) \tag{2.69}$$

Deve-se destacar que a Eq. (2.69) servirá como base para a análise dos efeitos lineares e não-lineares presentes numa fibra óptica, sobre os quais esta dissertação se fundamenta. Sua solução será dada pelo método numérico *Split-Step Fourier – SSF* (ver Anexo B), através de simulações realizadas com a plataforma computacional *VPI – Virtual Photonics Inc. – Transmission Module*.

Capítulo 3

EFEITOS LINEARES EM FIBRAS ÓPTICAS.

3.1 – Atenuação.

Dentre os parâmetros da fibra, a atenuação é um dos mais significativos com relação ao desempenho dos sistemas ópticos. O fato de se ter conseguido uma grande redução neste fator foi decisivo para viabilizar o uso das fibras como meio de transporte. Dos diversos fatores que contribuem para as perdas na fibra, os dois mais significativos são: a absorção do material e o espalhamento Rayleigh [2], [7] e [16]. As fibras de sílica apresentam impurezas, sendo os íons OH^- os mais difíceis de serem removidos, tendo grande influência na presença dos picos de absorção próximos de 1230 nm e 1370 nm, como mostrados na Figura 3.1.

O espalhamento Rayleigh é um mecanismo de perda que surge das flutuações aleatórias de densidade da sílica fundida durante sua fabricação. Essas flutuações causam alterações no índice de refração e a luz é, então, espalhada em todas as direções. A perda por espalhamento Rayleigh varia diretamente com λ^{-4} e, portanto, domina nos comprimentos de onda menores. A atenuação faz com que parte da potência acoplada numa fibra seja perdida, de tal forma que a potência transmitida é dada por:

$$P_t = P_0\, e^{(-\alpha L)}, \tag{3.1}$$

onde α é a constante de atenuação e L é o comprimento do enlace. Normalmente, a perda da fibra é expressa em unidades de dB/km, sendo:

$$\alpha_{(dB/km)} = -\frac{10}{L} log \frac{P_t}{P_0} \tag{3.2}$$

Os fatores que contribuem para a atenuação na fibra ocorrem devido às perdas do próprio material, impurezas e imperfeições [23]. A contribuição destes dois últimos fatores pode ser minimizada no processo de fabricação, enquanto que a primeira é intrínseca à fibra.

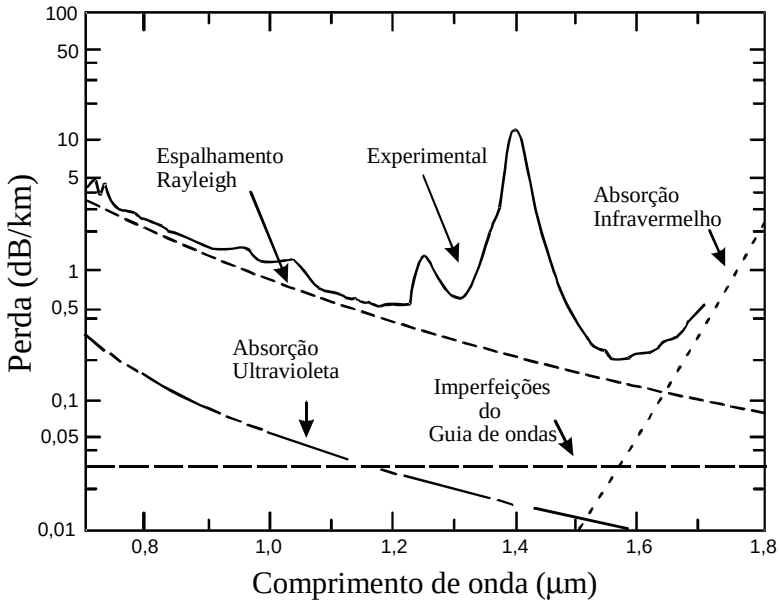


Figura 3.1: *Curva de atenuação da fibra em função do comprimento de onda*

Na Figura 3.1 mostra-se a atenuação em função do comprimento de onda. A sílica apresenta um pico de absorção de origem eletrônica no ultravioleta (≈ 0,2 μm) e um pico de origem vibracional em 9,2 μm. Pela Figura 3.1 tem-se, ainda, a região onde a perda é mínima, devido a esses picos de absorção, na janela em torno 1550 nm. Como conseqüência, esta região tornou-se apropriada para enlaces de longa distância para utilização em comunicações ópticas [16] e [24], sendo o espalhamento Rayleigh um efeito preponderante na atenuação.

3.2 - *GVD* – Dispersão de Velocidade de Grupo.

Nos próximos capítulos, estuda-se como os efeitos combinados da dispersão de velocidade de grupo (*GVD*), Automodulação de Fase (*SPM*), Modulação de Fase Cruzada (*XPM*) e outros efeitos não-lineares, presentes na propagação de pulsos ópticos dentro da fibra, podem ser estudados pela solução da equação de propagação do pulso. Porém, antes de considerar o caso geral, é interessante abordar o efeito de *GVD* isolado, ou seja, tratar a fibra óptica como um meio linear. Cada comprimento de onda propaga pela fibra segundo a sua relação com o índice de refração do meio [7]. Em função desta característica, o pulso incidente na fibra, o qual apresenta uma certa largura espectral, irá sofrer um espalhamento no tempo. Ou seja, este pulso apresenta um espalhamento temporal devido à dependência do índice de refração com o comprimento de onda. Cada componente espectral do pulso, com um comprimento de onda específico, apresenta uma velocidade, e a esta diferença entre tais velocidades dá-se o nome de dispersão de velocidade de grupo. A dispersão limita a capacidade do sistema, ou a taxa de transmissão, devido ao fato que um aumento de dispersão leva a um aumento na interferência entre os símbolos [25]. Na Figura 3.2, nota-se o efeito da dispersão que podem levar a erros na recepção, por causar uma variação nos níveis de potência, devido à interferência entre os símbolos.

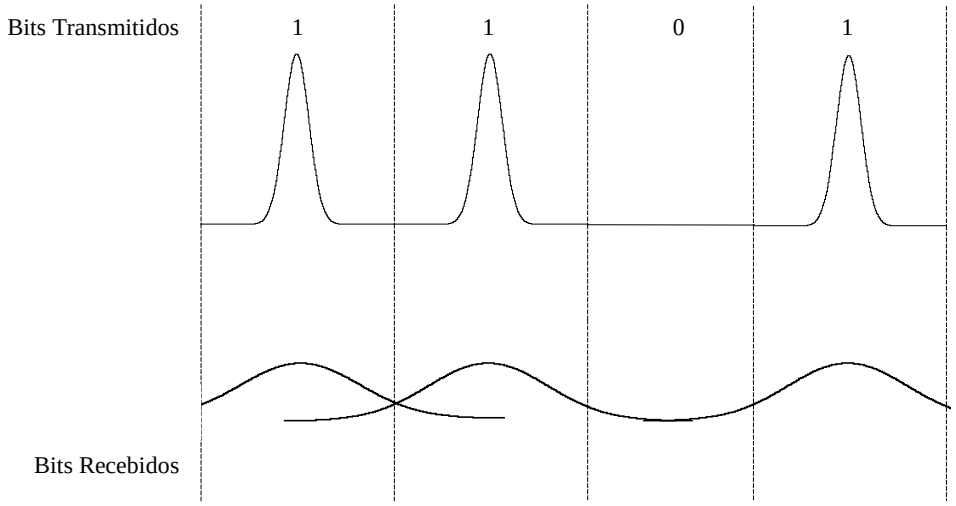


Figura 3.2: *Seqüência temporal de bits transmitidos e recebidos com efeito da dispersão, podendo ocorrer interferência entre símbolos*

Nesse capítulo, discute-se as condições onde os efeitos de *GVD* dominam sobre os demais efeitos não-lineares. Introduzi-se duas escalas de comprimento, associadas à *GVD* e à *SPM*. Os efeitos da freqüência de *chirp* (do inglês, gorjeio; pois o canto dos pássaros varia em frequência. Sendo este efeito semelhante no pulso que propaga-se pela fibra) são, também, discutidos neste capítulo [7].

3.2.1 – DISPERSÃO CROMÁTICA DO MATERIAL.

A dispersão do material tem sua origem na dependência do índice de refração com a freqüência, com a qual uma onda eletromagnética incide sobre este material. O índice de refração da sílica, pode ser aproximado pela Equação de Sellmeier [7] e [20]:

$$n_L^2(\lambda) = 1 + \sum_{j=1}^{m} \frac{B_j \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_j^2}, \tag{3.3}$$

onde: λ_j (j = 1, 2 ..m) são os comprimentos de onda das ressonâncias do meio e B_j são os fatores de peso referente a cada ressonância, sendo ambos obtidos de forma empírica, λ é o comprimento de onda do campo incidente. Para o caso da sílica e m = 3, os valores de λ_j e B_j são dados pela Tabela 3.1.

Tabela 3.1*: Comprimento de onda de ressonância e o equivalente fator de peso, para a sílica, m=3 [7], [20]*

Peso do fator	Comprimento de onda de ressonância.
B_1 = 0,6961663	λ_1 = 0,0684043 μm
B_2 = 0,4079426	λ_2 = 0,1162414 μm
B_3 = 0,8974794	λ_3 = 9,896161 μm

Os efeitos da dispersão de material nas fibras podem ser calculados através da constante de propagação $\beta_M(\omega)$. Expandido-se a constante de propagação em série de Taylor [19], em função de ω, e usando como referência uma freqüência central ω_0, procedimento similar ao adotado no Capítulo 2, obtém-se:

$$\beta_M(\omega) = \beta_{0M} + (\omega - \omega_0)\beta_{1M} + \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)^2 \beta_{2M} + \ldots \tag{3.4}$$

Os valores de $\beta_M(\omega)$ se relacionam com o índice de refração por meio de um sistema de equações [4] e [20]:

$$\beta_{1M}(\omega) = \frac{1}{v_g} = \frac{n_g}{c} = \frac{1}{c}\left(n_L + \omega \frac{dn}{d\omega} \right) \tag{3.5}$$

$$\beta_{2M}(\omega) = \frac{d\beta_{1M}(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{c}\left(2\frac{dn_L}{d\omega} + \omega \frac{d^2 n_L}{d\omega^2} \right), \tag{3.6}$$

sendo: n_g o índice de refração de grupo, v_g a velocidade de grupo, que representa a velocidade com que a envoltória do pulso move-se, e β_{2M} o parâmetro da dispersão de velocidade de grupo de material, *GVD*, que causa o espalhamento temporal do pulso. As Figuras 3.3 e 3.4 são obtidas a partir das Eqs. (3.3), (3.5) e (3.6), que mostram a relação entre os índices de refração $n_L(\lambda)$, $n_g(\lambda)$ e $\beta_{2M}(\lambda)$ com o λ, para a sílica fundida.

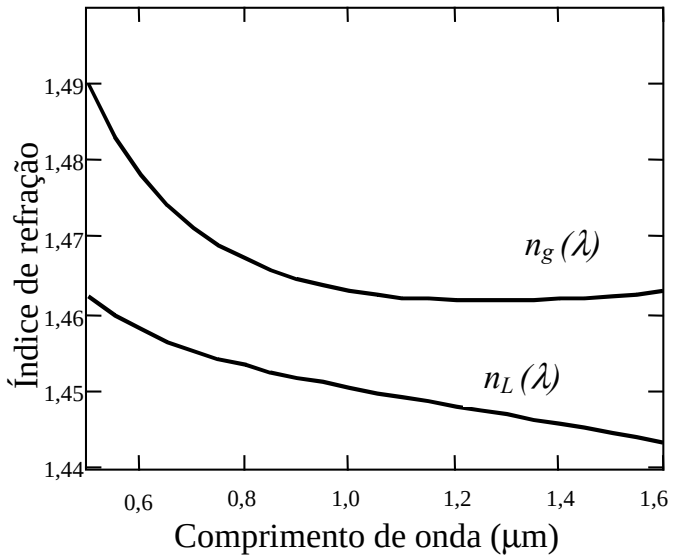


Figura 3.3: *Variação do índice de refração n e do índice de refração de grupo n_g, para sílica fundida, em função do comprimento de onda*

A Figura 3.4 mostra que β_{2M} é, praticamente, igual a zero no comprimento de onda próximo a 1,27μm, denominado *comprimento de onda de dispersão zero*. No caso onde $\beta_{2M} = 0$, os efeitos da dispersão não podem ser desprezados, tornando-se

importantes os efeitos de dispersão de segunda ordem β_{3M}, o que será estudado posteriormente.

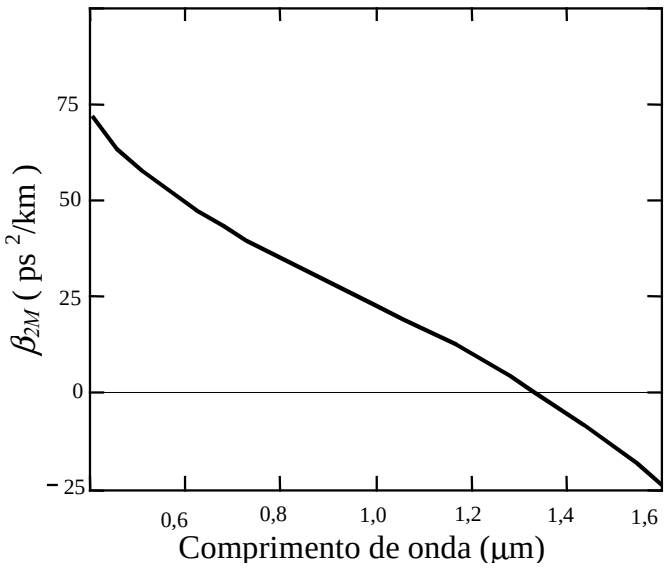


Figura 3.4: *Variação de β_{2M}, para a sílica fundida, com o comprimento de onda*

A Figura 3.5 mostra o parâmetro dispersão referente ao material (D_M), sendo este a maior contribuição para a dispersão total na fibra. Ela pode ser obtida pela variação do índice de grupo com o comprimento de onda, como mostra a equação a seguir [7]:

$$D_M = \frac{1}{c}\left(\frac{dn_g}{d\lambda}\right) \tag{3.7}$$

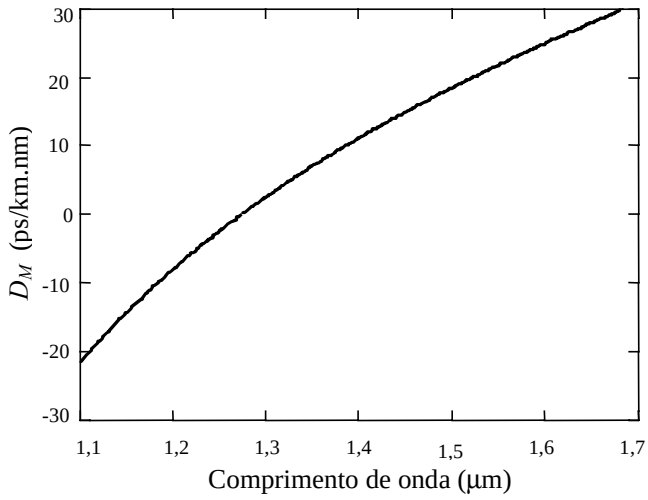


Figura 3.5: *Dispersão do material (sílica fundida), D_M, em função da variação do comprimento de onda*

3.2.2 – DISPERSÃO CROMÁTICA DO GUIA DE ONDA.

Guias de onda são dispositivos caracterizados pela capacidade de transportar ondas eletromagnéticas em seu interior [2], [14], [22] e [26]. As ondas são inseridas em uma das extremidades e recebidas na outra. Na Figura 3.6 tem-se um modelo de guia, composto por dois planos paralelos que limitam a área de propagação, em outras palavras, que definem a região capaz de conduzir o sinal. Tomando a trajetória definida pelos pontos (*PQRS*), descrita pelo raio de luz no interior do guia, tem-se múltiplas reflexões ao longo do mesmo [14] e [20].

A fibra possui forma cilíndrica e apresenta esse mesmo comportamento, podendo ser interpretada como um guia de onda. Além disso, possui um núcleo central com índice de refração n_n e outra região que envolve o núcleo, conhecida como casca, de índice n_c.

A relação $n_c < n_n$ proporciona a condição de condução da luz através de múltiplas reflexões, de forma que um raio incidente propaga-se ao longo do eixo da fibra, emergindo na outra extremidade [2]. Porém, esta propagação está diretamente relacionada com o ângulo de incidência, podendo-se ter apenas um parcela da luz sendo refletida na interface casca/núcleo e o restante propagando-se pela casca.

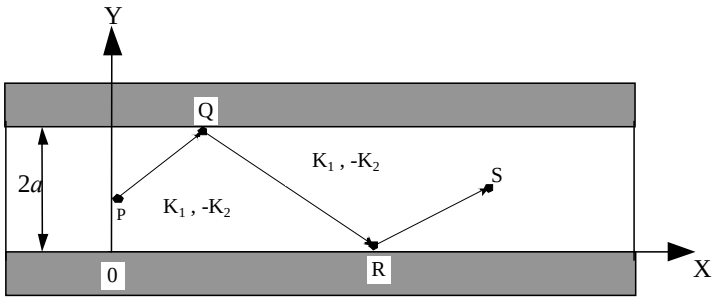


Figura 3.6: *Corte transversal de um guia de onda [14], [20]*

A relação entre os índices faz com que a velocidade do sinal na casca seja maior do que a parcela que caminha pelo núcleo, o que leva a um espalhamento temporal do pulso. A este fenômeno dá-se o nome de dispersão cromática do guia.

Pode-se calcular o número de campos suportado pelo guia, sendo que estas configurações de campos são denominadas por “modos propagantes” [20]. Em fun-

ção dos parâmetros de projeto, os guias podem ser projetados para suportar apenas um modo, sendo esta a escolha adotada para o caso de fibras monomodo.

A dispersão cromática do guia advém da interação da onda luminosa nas paredes internas da estrutura dielétrica. Logo a contribuição desta dispersão depende, fundamentalmente, dos parâmetros tomados no projeto, tais como: a diferença entre n_n e n_c, e as dimensões do núcleo e da casca. A Figura 3.7 ilustra um corte longitudinal de uma fibra óptica.

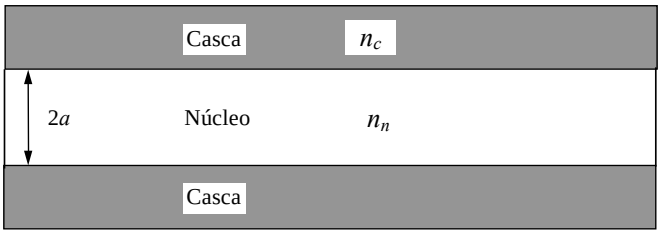


Figura 3.7: *Corte longitudinal de uma fibra óptica, sendo n_n e n_c os índices de refração do núcleo e da casca, respectivamente, e 2a o diâmetro do núcleo*

3.2.3 – DISPERSÃO CROMÁTICA TOTAL.

Conforme mencionado anteriormente, uma onda eletromagnética, ao incidir em um meio, fará com que o meio apresente uma resposta a esta excitação, sendo tal resposta uma função da freqüência ω. Em função desta dependência, tem-se a dispersão cromática; ou seja, as diferentes componentes espectrais da fonte de luz experimentam velocidades de propagação diferentes, devido à dependência do índice de refração com a freqüência, isto é, da função $n(\omega)$. A dispersão total (D) é obtida, aproximadamente, como a soma da dispersão do guia (D_W), que depende das características tomadas no projeto, mais a dispersão do material (D_M) [2], [26] e [27]. A dispersão total: $D = D_M + D_W$ está relacionada com a constante de propagação β_2 pela seguinte equação [16]:

$$D = -\left(\frac{2\pi c}{\lambda^2}\right)\beta_2 \tag{3.8}$$

Na curva ilustrada pela Figura 3.8 tem-se a dispersão total, bem como suas componentes, ou seja, a dispersão de guia de onda e a dispersão do material, sendo estas curvas válidas para uma fibra monomodo do tipo padrão (*Standard - ST*).

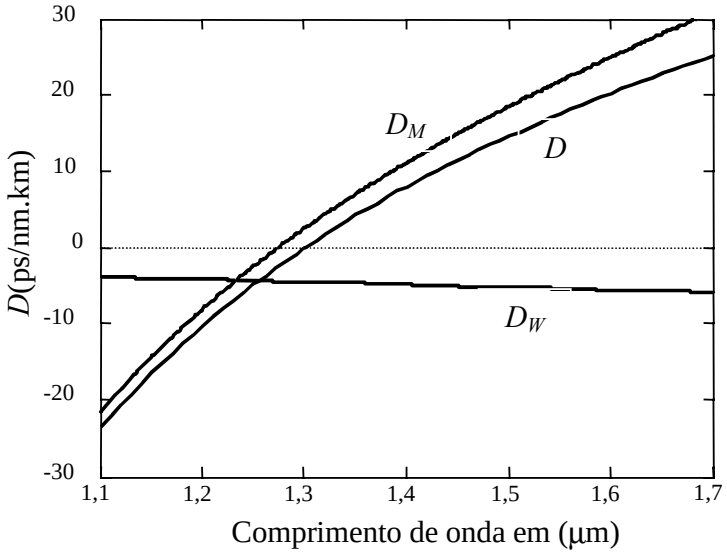


Figura 3.8: *Curva da dispersão total para uma fibra padrão em função do comprimento de onda, além das curvas da dispersão do guia de ondas e da dispersão do material*

3.2.4 – REGIMES DE PROPAGAÇÃO.

No capítulo anterior obteve-se a equação Não-Linear de Schrödinger (*NLS*) que governa a propagação de pulsos ópticos dentro de fibras monomodo. Na Eq. (2.67), se for feita a mudança de variável: $T = t - z/v_g \equiv t - \beta_1 z$, obtém-se a Eq. abaixo:

$$j\frac{\partial A}{\partial z} = -j\frac{\alpha}{2}A + \frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial T^2} - \gamma|A|^2 A, \tag{3.9}$$

onde: A é a variação suave da amplitude da envoltória do pulso e T é medido em um sistema de coordenadas movendo-se com o pulso, na velocidade de grupo v_g.

Os três termos do lado direito da Eq. (3.9) governam, respectivamente, os efeitos das perdas da fibra, da dispersão de primeira ordem e da não-linearidade dos pulsos. Em função da largura inicial, T_0, e da potência de pico, P_0, do pulso inciden-

te, pode-se ter o efeito dispersivo ou o efeito não-linear dominante ao longo da fibra. É comum introduzir-se duas escalas de comprimento, conhecidas como comprimento de dispersão, L_D, e comprimento não-linear, L_{NL}, definidas como:

$$L_D = \frac{T_0^2}{|\beta_2|} \qquad\qquad L_{NL} = \frac{1}{\gamma P_0} \ . \tag{3.10}$$

Dependendo das magnitudes relativas de L_D, L_{NL} e do comprimento da fibra, L, os pulsos podem evoluir de formas diferentes. Define-se uma escala de tempo normalizada para o pulso de entrada, com largura T_0, na forma:

$$\tau = \frac{T}{T_0} = \frac{t - z/v_g}{T_0} \tag{3.11}$$

e, ao mesmo tempo, introduzimos a amplitude normalizada U como:

$$A(z,\tau) = \sqrt{P_0}\, exp\left(-\frac{\alpha z}{2}\right) U(z,\tau)\,, \tag{3.12}$$

onde o fator exponencial, na Eq. (3.12), se deve às perdas na fibra. Utilizando-se as Eqs. (3.9), (3.11) e (3.12), a parcela $U(z,\tau)$ satisfaz a equação diferencial:

$$j\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{sgn(\beta_2)}{2L_D}\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \frac{exp(-\alpha z)}{L_{NL}}|U|^2 U\,, \tag{3.13}$$

onde: $sgn(\beta_2) = \pm 1$, depende do sinal do parâmetro β_2, ou seja, do fato do regime de dispersão ser normal ou anômalo.

Através dos comprimentos de dispersão, L_D, e do não-linear, L_{NL}, introduzidos anteriormente, temos uma escala de comprimento na qual o efeito dispersivo ou de não-linearidade, torna-se importante para a evolução do pulso. O comportamento da propagação pode ser classificado nas quatro categorias seguintes:

1º) $L \ll L_{NL}$ e $L \ll L_D$

Neste caso, ambos os efeitos, dispersivo e não-linear, não desempenham um papel importante na propagação do pulso. Pode-se verificar esta situação pela Figura 3.9, onde o comprimento da fibra é muito menor do que os comprimentos de disper-

são e não-linearidade. Nesse caso, na Eq. (3.13), ambos os termos do membro direito devem ser desprezados.

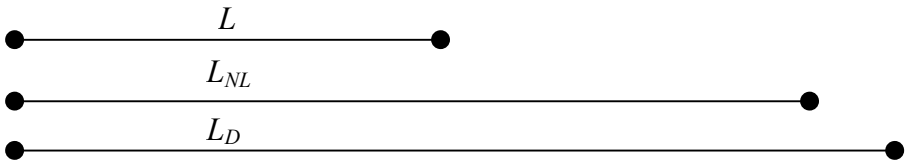


Figura 3.9: *Escalas de comprimento do enlace, do comprimento não-linear e do comprimento de dispersão. Neste caso temos* $L<<L_{NL}$ *e* $L<<L_D$

Pode-se dizer que, neste caso, a fibra desempenha um papel passivo e atua como um mero transportador de pulsos ópticos, sem distorção.

2º) $L<<L_{NL}$ e $L>L_D$

Tem-se, agora, um caso no qual o último termo da Eq. (3.13) torna-se desprezível em relação aos outros dois termos. Nesta situação, a evolução do pulso é governada pela *GVD*, sendo que os efeitos não-lineares não irão desempenhar um papel importante e, deste modo, podem ser desprezados, conforme pode-se observar na Figura 3.10.

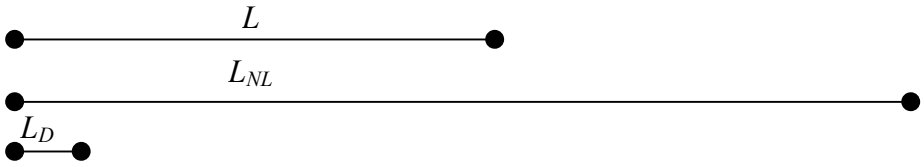


Figura 3.10: *Escalas de comprimento da fibra, do comprimento não-linear e do comprimento de dispersão. Neste caso temos* $L<<L_{NL}$ *e* $L>L_D$

O regime de dispersão dominante é aplicável sempre que os parâmetros da fibra e do pulso satisfazem a seguinte condição:

$$\frac{L_D}{L_{NL}} = \frac{\gamma \cdot P_0 T_0^2}{|\beta_2|} << 1. \tag{3.14}$$

Esta condição fica verificada usando valores de potência inferiores a 1 W em pulsos que apresentam uma largura de aproximadamente 1 ps, utilizando valores típicos para os parâmetros da fibra γ e $|\beta_2|$, na janela de 1,55 μm.

3º) $L<<L_D$ e $L>L_{NL}$

Com esta condição, descrita acima, tem-se o caso onde o termo de dispersão na Eq. (3.13) é desprezível quando é comparado ao termo não-linear. Neste caso, a evolução do pulso na fibra é governada pelos efeitos não-lineares, o que conduz ao alargamento espectral do pulso. Na Figura 3.11 observa-se as escalas de comprimento impostas para esta situação.

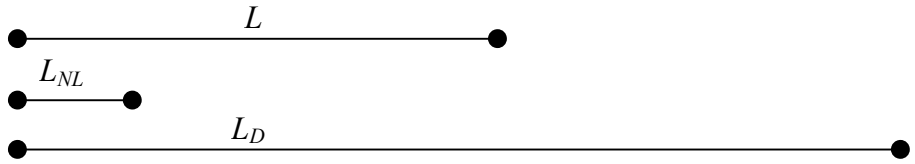


Figura 3.11: *Escalas de comprimento para o caso onde os efeitos não-lineares governam a propagação do pulso, com as seguintes condições* $L<<L_D$ *e* $L>L_{NL}$

O regime de não-linearidade dominante é aplicável sempre que a seguinte condição for satisfeita:

$$\frac{L_D}{L_{NL}} = \frac{\gamma P_0 T_0^2}{|\beta_2|} >> 1 . \tag{3.15}$$

Pode-se atender esta condição utilizando pulsos relativamente largos, como por exemplo, um pulso com T_0 > 100 ps e com um valor de pico de potência próximo 1 W.

4º) $L>L_D$ e $L>L_{NL}$

Neste caso, a dispersão e a não-linearidade atuam juntamente, enquanto o pulso propaga-se ao longo da fibra. A Figura 3.12 apresenta as escalas de comprimento nas quais esta situação torna-se realizável. A interação dos efeitos de *GVD* e não-linearidades podem levar a um comportamento qualitativamente diferente, quando comparado com aquele no qual estes efeitos aparecem isoladamente [7], [13] e [18].

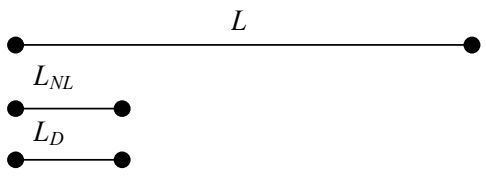


Figura 3.12: *Escalas de comprimento para o caso onde a não-linearidade e a dispersão governam a propagação do pulso, segundo as seguintes condições $L>L_D$ e $L>L_{NL}$*

No regime de dispersão anômala $\beta_2 < 0$, e a fibra pode suportar sólitons [7] e [17]. No caso do regime de dispersão normal $\beta_2 > 0$ isso não ocorre. A Eq. (3.13) é extremamente útil para a compreensão da evolução do pulso em fibras ópticas, quando os efeitos dispersivo e não-linear devem ser levados em conta. Entretanto, este capítulo é dedicado ao regime linear e a discussão seguinte é aplicável para pulsos cujos parâmetros satisfazem a Eq. (3.14), ou seja, regime no qual apenas a dispersão domina na propagação do pulso, conforme foi visto no segundo caso.

3.2.5 – ALARGAMENTO DO PULSO INDUZIDO PELA DISPERSÃO.

Os efeitos da *GVD* nos pulsos ópticos propagando-se em um meio dispersivo linear são estudados fazendo-se $\gamma = 0$, na Eq. (3.9). Definindo-se a amplitude normalizada *U(z,T)* de acordo com a Eq. (3.12) e considerando que $T = t - z/v_g$, a derivada parcial de *A* será [19]:

$$\frac{\partial A(z,T)}{\partial z} = \sqrt{P_0}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)exp\left(-\frac{\alpha z}{2}\right)U(z,T) + \sqrt{P_0}\,exp\left(-\frac{\alpha z}{2}\right)\frac{\partial U(z,T)}{\partial z}. \qquad (3.16)$$

A derivada $\frac{\partial U(z,T)}{\partial z}$ satisfaz a relação :

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial z} = -\beta_1\frac{\partial U}{\partial T} + \frac{\partial U}{\partial z}. \qquad (3.17)$$

Substituindo-se a Eq. (3.17) em (3.16), resulta:

$$\frac{\partial A(z,T)}{\partial z} = \sqrt{P_0}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)exp\left(-\frac{\alpha z}{2}\right)U(z,T) + \sqrt{P_0}\,exp\left(-\frac{\alpha z}{2}\right)\left[-\beta_1\frac{\partial U}{\partial T} + \frac{\partial U}{\partial z}\right] \qquad (3.18)$$

sendo:

$$\frac{\partial A}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T}\left[\sqrt{P_0}\, exp\left(-\frac{\alpha z}{2}\right)U(z,T)\right] = \sqrt{P_0}\, exp\left(-\frac{\alpha z}{2}\right)\frac{\partial U(z,T)}{\partial T} \tag{3.19}$$

e, também:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial T^2} = \frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{\partial A}{\partial T}\right] = \sqrt{P_0}\, exp\left(-\frac{\alpha z}{2}\right)\frac{\partial^2 U(z,T)}{\partial T^2}. \tag{3.20}$$

Logo, substituindo as equações (3.12), (3.18) e (3.20) em (3.9) e fazendo *U(z,T) = U*, para simplificar a notação, obtém-se:

$$j\left\{\sqrt{P_0}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)exp\left(-\frac{\alpha z}{2}\right)U + \sqrt{P_0}\, exp\left(-\frac{\alpha z}{2}\right)\left[\frac{\partial U}{\partial z} - \beta_1\frac{\partial U}{\partial T}\right]\right\} =$$
$$-j\frac{\alpha}{2}\sqrt{P_0}\, exp\left(-\frac{\alpha z}{2}\right)U + \frac{\beta_2}{2}\sqrt{P_0}\, exp\left(-\frac{\alpha z}{2}\right)\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial T^2}.$$

Simplificando os termos comuns, tem-se:

$$-j\frac{\alpha}{2}U + j\frac{\partial U}{\partial z} - j\beta_1\frac{\partial U}{\partial T} = -j\frac{\alpha}{2}U + \frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial T^2} \Rightarrow$$

$$j\frac{\partial U}{\partial z} - j\beta_1\frac{\partial U}{\partial T} - \frac{\beta_2}{2}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial T^2} = 0 \Rightarrow j\left[\frac{\partial U}{\partial z} - \beta_1\frac{\partial U}{\partial T}\right] - \frac{\beta_2}{2}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial T^2} = 0.$$

Sendo $\frac{\partial U}{\partial z} - \beta_1\frac{\partial U}{\partial T} = \frac{\partial U}{\partial z}$, tem-se:

$$j\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial T^2} = 0$$

Reescrevendo a equação anterior:

$$j\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial T^2} \tag{3.21}$$

A Eq. (3.21) é resolvida pelo método da transformada de Fourier. Se $\tilde{U}(z,\omega)$ é a transformada de Fourier de *U(z,T)*, tal que:

$$U(z,T) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}(z,\omega)\, exp(-j\omega T)\, d\omega, \tag{3.22}$$

então ela satisfaz a equação diferencial ordinária:

$$j\frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} = -\frac{1}{2}\beta_2\omega^2 \tilde{U}, \tag{3.23}$$

cuja solução é dada por:

$$\tilde{U}(z,\omega) = \tilde{U}(0,\omega)\, exp\left(\frac{j}{2}\beta_2\omega^2 z\right) \tag{3.24}$$

A Eq. (3.24) mostra que a *GVD* muda a fase de cada componente espectral do pulso de uma quantia que depende tanto da freqüência como da distância propagada. Embora tais mudanças de fase não afetem o espectro do pulso, elas podem modificar a forma temporal deles.

3.2.6 - PULSOS GAUSSIANOS.

Em geral os pulsos incidentes na fibra têm forma gaussiana [7]:

$$U(0,T) = exp\left(-\frac{T^2}{2T_0^2}\right) \tag{3.25}$$

onde T_0 é a meia largura, ou seja, o ponto onde a intensidade cai a 1/*e*.

Pode-se mostrar que o pulso gaussiano mantém sua forma durante a propagação, mas sua largura T_1 aumenta, em função de *z*, conforme a relação [7]:

$$T_1(z) = T_0\left[1 + (z/L_D)^2\right]^{1/2}, \tag{3.26}$$

onde o comprimento de dispersão $L_D = T_0 / |\beta_2|$. A Eq. (3.26) mostra como a *GVD* alarga o pulso gaussiano e a extensão do alargamento é governada pelo comprimento de dispersão L_D. Para um dado comprimento de fibra, os pulsos curtos alargam-se

mais devido a um menor comprimento de dispersão, sendo que, em $z = L_D$, um pulso gaussiano alarga-se por um fator de $\sqrt{2}$. A Figura 3.13 mostra a extensão do alargamento induzido por dispersão, para pulsos gaussianos, traçando-se $|U(z,T)|^2$ nos pontos $z = 0, 2L_D$ e $4L_D$. E usando-se estes valores de comprimento de fibra para o enlace, a partir da plataforma computacional VPI obtém-se o seguinte resultado da Figura 3.13.

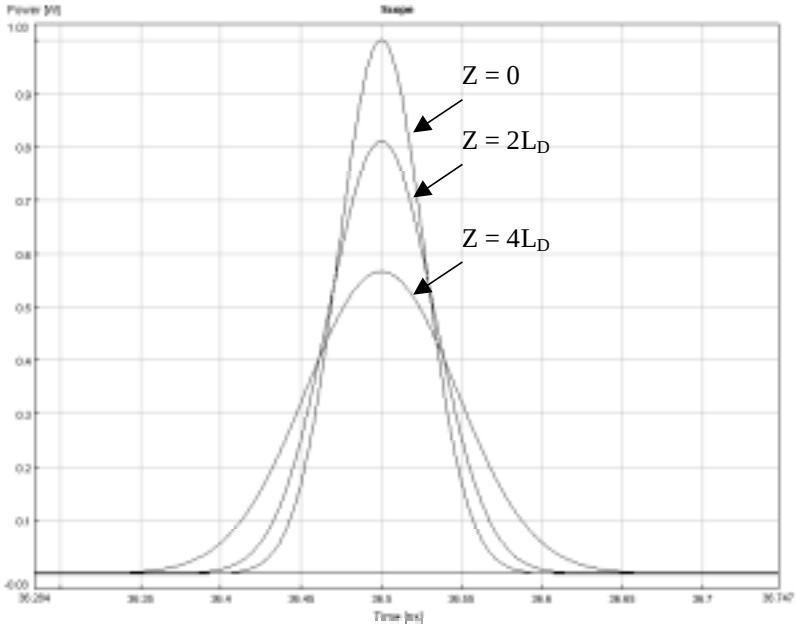


Figura 3.13: *Alargamento induzido pela dispersão de um pulso gaussiano incidente em uma fibra para $z = 2L_D$ e $z = 4L_D$. A curva superior mostra o pulso incidente em $z = 0$ com $L_D = 50$ km*

O alargamento do pulso, induzido por dispersão, pode ser entendido da seguinte maneira: diferentes componentes de freqüência de um pulso viajam com velocidades levemente diferentes ao longo da fibra, devido à *GVD*. Mais especificamente, as componentes do vermelho viajam mais rápido do que as componentes do azul, no regime de dispersão normal ($\beta_2 > 0$), enquanto o oposto ocorre na dispersão anômala ($\beta_2 < 0$). O pulso só manterá sua largura se todas as componentes espectrais chegarem juntas, sendo que qualquer atraso não uniforme na chegada das diferentes componentes espectrais leva ao alargamento do pulso.

3.3 – Compensação de Dispersão.

Tem-se agora uma descrição de uma técnica de compensação de dispersão cromática. Essa técnica tem o princípio de funcionamento baseado em equalizar a dispersão de uma fibra de transmissão através de outra fibra operando no regime de dispersão oposta, e denominada de fibra de compensação [21], [28] até [31]. Considera-se, como fibra de transmissão, uma fibra *ST* [35] que apresenta uma alta dispersão, da ordem de 16 ps/nm·km, quando opera na terceira janela de 1550 nm. A operação em 1550 nm é de interesse, devido aos amplificadores ópticos *EDFA*. A fibra de compensação foi desenvolvida especialmente com objetivo de apresentar alta dispersão com sinal oposto, na região da terceira janela. A atuação conjunta destas leva a significativa redução da dispersão total (D_T), de acordo com a equação [21] e [28]:

$$D_T = L_{ST} \cdot D_{ST} + L_{DCF} \cdot D_{DCF} = 0\,, \tag{3.27}$$

onde: L_{ST} é o comprimento da fibra de transmissão, D_{ST} é a dispersão da fibra de transmissão, L_{DCF} é o comprimento da fibra de compensação e D_{DCF} é a dispersão da fibra de compensação. A fibra de compensação pode ser inserida em diferentes posições, ao longo do enlace, conforme descrito abaixo.

1º) <u>*Pré-Compensação*</u> – neste caso, para que os efeitos da dispersão possam ser reduzidos, coloca-se a fibra de compensação na saída do transmissor, como é visto na Figura 3.14. Por ser projetada para apresentar uma dispersão muito superior à das fibras *ST* (em geral, na ordem de 4 a 5 vezes maior), não há necessidade de um grande comprimento deste tipo de fibra, comparado com o comprimento da fibra de transmissão.

Em geral, a fibra de compensação apresenta menor área efetiva do que a fibra *ST* e, por isso, o esquema de pré-compensação, no qual o nível do sinal na *DCF* é alto, é muito susceptível à geração de efeitos não-lineares no sistema.

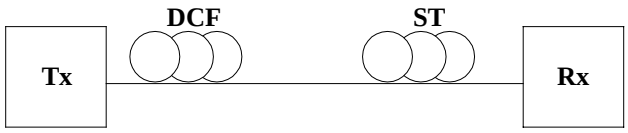


Figura 3.14: *Diagrama esquemático da técnica de pré-compensação de dispersão*

2º) <u>*Pós-Compensação*</u> – neste caso, a *DCF* é acrescentada na recepção, como pode-se observar na Figura 3.15. Ou seja, primeiramente o pulso propaga-se pela fibra *ST* e, depois, atinge uma *DCF*, a fim de reduzir os efeitos da dispersão.

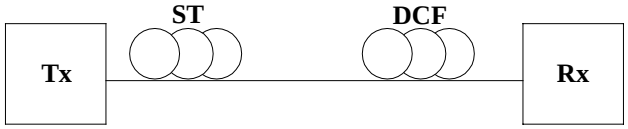


Figura 3.15: *Diagrama esquemático da técnica de pó- compensação de dispersão*

3º) <u>*Compensação Simétrica*</u> – este tipo de compensação consiste de uma pré-compensação em múltiplos estágios, ou seja, temos vários lances de *DCF* colocadas ao longo do enlace. Essa implementação está apresentada, esquematicamente, na Figura 3.16. Deve-se salientar que este tipo de solução apresenta uma maior dificuldade para ser implementada, pois tem-se várias inserções no enlace, entre o transmissor e o receptor, o que acarreta um custo maior nesta implementação. Este tipo de implementação pode reduzir de forma significativa a interação dos efeitos não-lineares com os da dispersão.

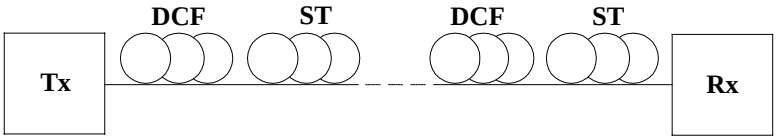


Figura 3.16: *Diagrama esquemático da técnica de compensação simétrica de dispersão*

Essa é, hoje, uma área de intensa pesquisa e permite que se obtenha significativo aumento da Capacidade de Transmissão da fibra, através do gerenciamento ou controle dos efeitos conjuntos da dispersão e das não-linearidades. A Capacidade de Transmissão é definida pelo produto taxa (b/s) x distância (km) [21], [29] até [31].

As simulações que se seguem visam demonstrar o desempenho das fibras de compensação. Conforme foi dito, é mais fácil implementar a pré- ou a pós-compensação pois, nestas, necessitam-se apenas uma inserção da *DCF* no enlace e, como conseqüência, reduz-se os gastos com instalações físicas.

Os resultados das simulações serão apresentados através dos diagramas de olho para cada caso. Nas Figura 3.17 – 3.19 tem-se os resultados obtidos em um regime linear, usando as técnicas de pré-, pós-compensação e a compensação simétri-

ca, respectivamente. A simulação foi desenvolvida para um pulso propagando-se na janela de λ = 1,554 μm em um enlace com L_{ST} = 240 *km* de fibra *ST*, com A_{eff} = 80 $(\mu m)^2$ e D_{ST} = 16 ps/nm·km, e uma *DCF* com D_{DCF} = -90 ps/nm·km e L_{DCF} = 42,67 km e A_{eff} = 30 μm^2.

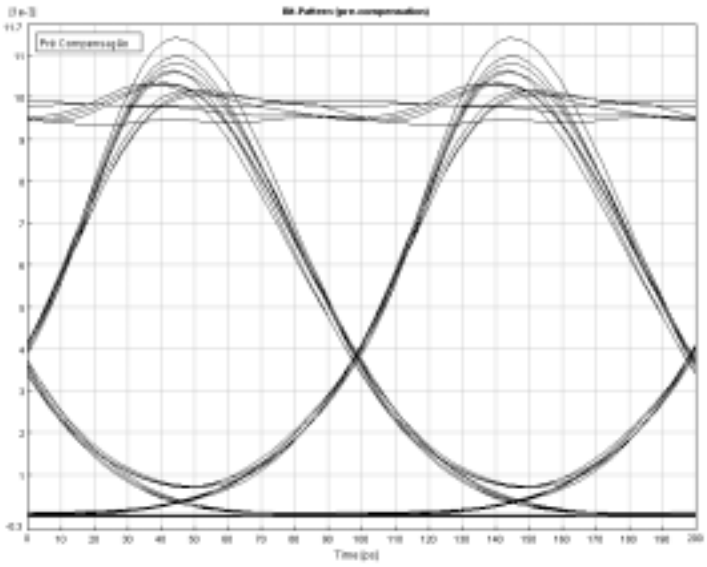


Figura 3.17: *Diagrama de olho na saída da fibra padrão, operando em λ = 1,554 μm, utilizando a técnica de pré-compensação em regime linear de operação*

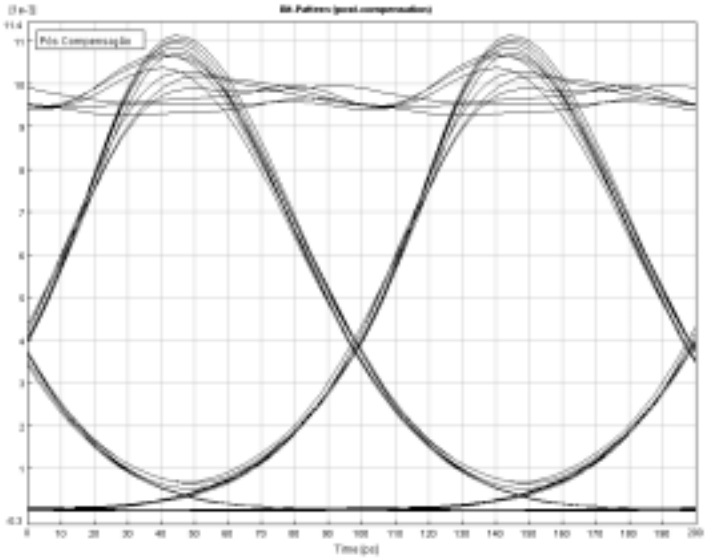


Figura 3.18: *Diagrama de olho na saída da fibra padrão, operando em λ = 1,554 μm, utilizando a técnica de pós-compensação em regime linear de operação*

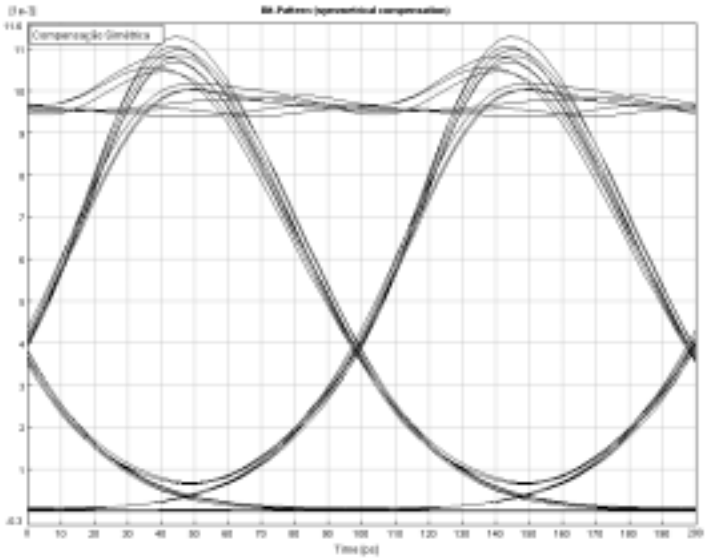


Figura 3.19: *Diagrama de olho na saída da fibra padrão, operando em λ = 1,554 μm, utilizando a técnica de compensação simétrica em regime linear de operação*

Das três figuras anteriores, pode-se notar que, quando opera-se em regime linear, ou seja, baixa potência, todas as técnicas apresentam um excelente desempenho. Neste caso, pode-se escolher a disposição do enlace que for mais conveniente para ser implementada, em função da facilidade e a disponibilidade física.

Capítulo 4

EFEITOS NÃO-LINEARES EM FIBRAS ÓPTICAS.

4.1 – Introdução.

Neste capítulo faz-se uma abordagem dos efeitos não-lineares em fibras ópticas, mostrando as principais características de cada um destes efeitos. Alguns dos fenômenos não-lineares têm, como principal causa, o fato do índice de refração da fibra variar com a intensidade do campo aplicado. De uma forma geral, pode-se dizer que os efeitos não-lineares em fibras não são defeitos de fabricação, porém sua eficiência é dependente do projeto da fibra. A resposta não-linear do meio ocorre para intensos níveis de sinal óptico (potência por área) propagando-se na fibra. A resposta não-linear é, hoje, o principal fator limitante dos projetos das redes ópticas, que constituem os sistemas de comunicação [25] e [32].

Na presença de dispersão anômala ($\beta_2 < 0$), os efeitos não-lineares podem levar à compressão do pulso. Em casos específicos, pode-se ter a formação de *sólitons* [7], [21] e [25], onde o pulso na recepção recupera sua forma inicial, ou seja, há um balanceamento entre dispersão e efeitos não-lineares. Este efeito será descrito mais detalhadamente nos próximos capítulos.

Para que se possa ter sistemas ópticos trabalhando numa taxa de transmissão (b/s) mais elevada, torna-se necessário o uso da técnica de multiplexagem por comprimento de onda (*WDM*). Essa técnica provê, aos sistemas ópticos, o uso de múltiplos comprimentos de onda (canais). Por exemplo, um sistema operando na taxa de 10 Gb/s é equivalente a um sistema multiplexado com 4 x 2,5 Gb/s. Ao transmitir vários canais, a potência de cada um deles pode ser moderada, porém a soma total poderá excitar a fibra não linearmente. Sistemas de múltiplos canais proporcionam o aparecimento de efeitos não-lineares, tais como a Modulação de Fase Cruzada (*XPM*) e a Mistura de Quatro Ondas (*FWM*). Além disso, ocorre uma modulação de fase em cada canal, devido ao valor de sua própria potência. Esse efeito é designado Automodulação de Fase (*SPM*) [7], [18], [21] e [25].

Os efeitos não-lineares que são considerados neste capítulo, surgem devido à dependência do índice de refração com a intensidade do campo óptico aplicado, sendo que este é proporcional ao quadrado da amplitude do campo. Essa propriedade é designada como Efeito Kerr não-linear [7], [16] e [18].

Como conseqüência dos efeitos não-lineares, ocorre o alargamento espectral dos pulsos; isso acentua o problema da dispersão cromática. Decorre disso um aumento na taxa de erro na recepção, podendo levar o sistema a tornar-se inoperante. Ainda que seja injetada uma potência moderada na fibra, devido ao fato dessa possuir núcleo da ordem de micrometros, isso acarreta uma alta densidade de potência (*potência*/*área*). Assim, potências da ordem de miliwatt, já são suficientes para gerar efeitos não-lineares que degradam a qualidade da informação transmitida pela fibra [7] e [18].

As manifestações não-lineares aparecem como ruído e distorção do sinal. O ruído inclui o efeito de interferência entre canais (*crosstalk*); um exemplo disso são os sinais espúrios gerados pela Mistura de Quatro Ondas (*FWM*) [33].

A Tabela 4.1 lista alguns efeitos não-lineares, bem como suas principais conseqüências aos sistemas de transmissão óptica.

Tabela 4.1: *Características de alguns efeitos não-lineares*

SPM	Acumulo de fase não-linear, devido ao próprio canal.	Alargamento espectral.
XPM	Acumulo de fase não-linear, devido ao canal adjacente.	Alargamento espectral.
FWM	Perda de potência do canal original.	Criação de novos canais.

Uma das formas para reduzir os efeitos não-lineares é manter a densidade de potência abaixo de um limiar, no qual eles tornam-se significantes. A atenuação reduz o nível de potência ao longo da fibra; assim, a densidade de potência é mais crítica nas regiões onde o nível de potência é elevado, isto é, próximo dos transmissores ou na saída dos amplificadores ópticos. Uma solução seria usar fibras que apresentem um núcleo maior, reduzindo a densidade de potência nessas regiões. Essa fibras são caracterizadas por apresentar um maior diâmetro modal [14]. Outra alternativa seria a redução do espaçamento entre os amplificadores, com a conseqüente redução do ganho dos mesmos. Entretanto, em enlaces muito longos, isso poderá levar ao uso de um número excessivo de amplificadores e, isso, poderia inviabilizar o enlace, não só devido a questões de custo, mas, também, haveria necessidade de um controle de ruído de amplificação espontânea, que seria introduzido no sistema [7], [21] e [25].

A instalação dos modernos sistemas de multiplexagem por comprimento de onda com alta densidade de canais (*DWDM*) tem, como principal objetivo, maximizar a capacidade de transmissão de dados em vários canais, com comprimentos de onda diferentes, numa única fibra. No entanto, a transmissão de altas taxas em longas distâncias pode trazer problemas na comunicação devido à dispersão do sinal na fibra. Novas gerações de fibras ópticas, como, por exemplo, a fibra de dispersão deslocada não-nula (*NZDS*) [37], foram desenvolvidas especificamente para solucionar os problemas de dispersão e não-linearidades nos enlaces. Essa fibra possui o comprimento de onda de dispersão nula fora da banda de amplificação dos *EDFA*'s [38].

4.2 - *SPM* – Automodulação de Fase.

No caso do efeito não-linear de Automodulação de Fase (*SPM*), o pulso transmitido sofre um *chirp* (gorjeio) de freqüência, pois o mesmo se auto modula em fase [7].

O *chirp* é o agrupamento de freqüências mais altas e mais baixas, respectivamente, para as partes anterior e posterior do pulso óptico (fator de *chirp* negativo, $C < 0$), ou vice-versa (fator de *chirp* positivo, $C > 0$) [18]. Um pulso com *chirp* apresenta maior largura espectral do que um pulso sem *chirp*. No Capítulo 5, estudam-se aspectos teóricos relacionados ao efeito da *SPM*, incluindo o caso do pulso com *chirp*. O estudo é complementado por simulações numéricas, através da plataforma computacional *VPI*.

4.3 - *XPM* – Modulação de Fase Cruzada.

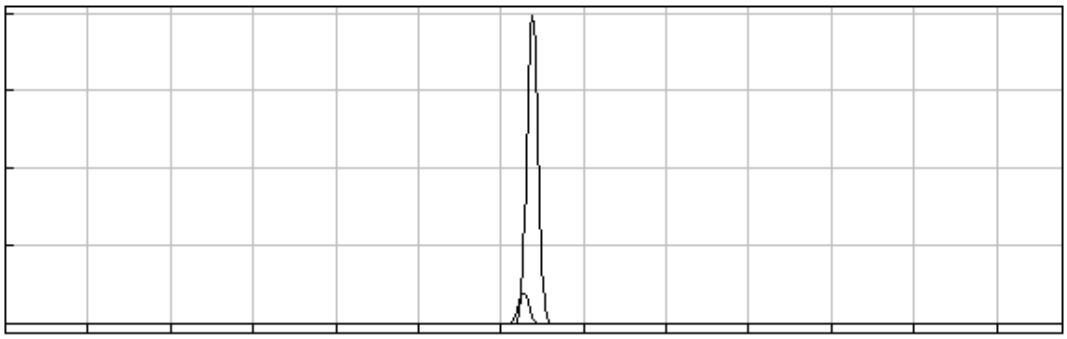
Em sistemas *WDM*, mesmo que os canais individuais estejam operando com potências moderadas, os efeitos não-lineares, dependentes da intensidade, podem se tornar eficazes. Isto ocorre *porque* o sinal combinado de todos os canais pode apresentar um valor acima do limiar no qual esses efeitos tornam-se não desprezíveis.

O efeito da Modulação de Fase Cruzada, *XPM*, caracteriza-se pela interferência em um canal a partir do canal adjacente. O canal que sofre a interferência, a exemplo do que ocorre no fenômeno da *SPM*, torna-se modulado em fase e com *chirp* [7].

O efeito da *XPM* em sistemas *WDM*, como será visto no Capítulo 6, pode ser significativamente reduzido pelo aumento do espaçamento entre os canais individuais, pois isso provoca uma redução no valor de L_W. Para estudar o fenômeno não-linear da *XPM*, é definido um parâmetro conhecido como comprimento de interação (*walk-off*), L_W. O conceito relacionado a esse parâmetro está representado na Figura

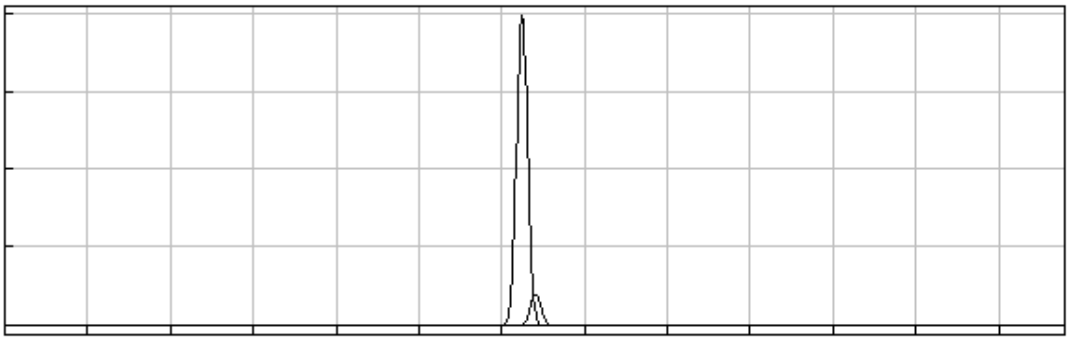
4.1, para dois pulsos injetados em tempos distintos em uma fibra. Pode-se notar que, após percorrida a distância equivalente a L_W, os pulsos separam-se, não havendo mais interação entre eles.

Comprimento de Interação (L_W)



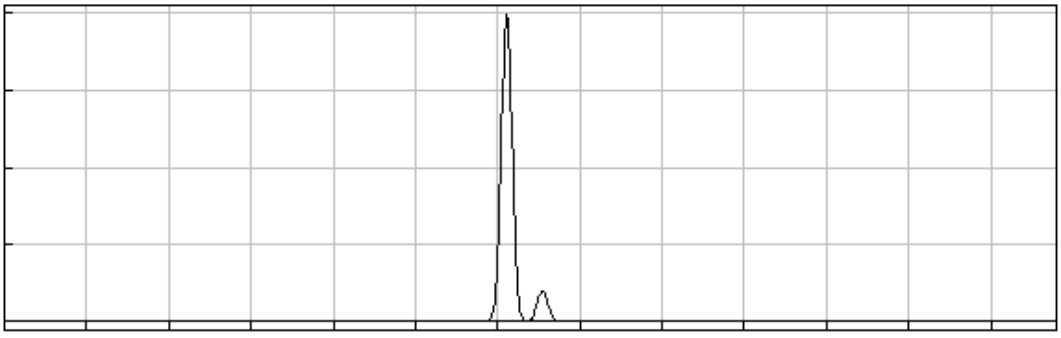
L = 0 (início da fibra)

(a)



Percorrida uma distância (L) qualquer

(b)



$L = L_W$

(c)

Figura 4.1: *Representação gráfica do comprimento de walk-off, onde (a) representa os pulsos na entrada da fibra, (b) para um valor qualquer de L, (c) L = L_W*

4.4 - *FWM* – Mistura de Quatro Ondas.

4.4.1 – INTRODUÇÃO.

Ao aplicar um sinal elétrico intenso em um meio dielétrico, os elétrons respondem com um movimento não harmônico. Daí, a polarização induzida no meio não variar como uma função linear do campo aplicado, pois essa apresenta termos que são governados pelas susceptibilidades não-lineares, sendo predominante o termo não-linear de terceira ordem. Nesse comportamento da matéria é que se origina o fenômeno de Mistura de Quatro Ondas, *FWM*.

O fenômeno não-linear da *FWM* é a interação entre três ondas transmitidas através de uma fibra produzindo uma quarta onda, com freqüência igual à soma das freqüências de duas destas ondas menos a freqüência da terceira onda. Analiticamente, a nova freqüência tem a forma [7]:

$$f_4 = f_1 + f_2 - f_3 \tag{4.1}$$

Na prática, f_1 e f_2 podem apresentar o mesmo valor. Quando os canais *WDM* são espaçados igualmente no espectro, o resultado da combinação das ondas pode coincidir com a freqüência do sinal de um canal original, gerando ruído neste canal. Deste modo, trabalhando com espaçamento espectral diferente entre os canais transmitidos, pode-se minimizar o efeito da *FWM* sobre o enlace óptico. A potência das componentes geradas pelo processo de Mistura de Quatro Ondas é maior quando os canais ópticos são casados em fase. Esse casamento de fase depende da separação entre canais, da potência individual de cada canal, do valor da dispersão da fibra na região de operação e do comprimento da fibra [7], [33] e [34]. As fibras *ST*, *DS* e *NZDS* apresentam valores diferenciados de dispersão na janela de 1550 nm e, por isso, o fenômeno de *FWM* manifesta-se com diferentes eficiências em cada uma dessas fibras [35] – [37].

4.4.2 – EFEITO DA POSIÇÃO DOS CANAIS.

Como foi dito anteriormente, se a separação entre os canais transmitidos for feita igual ou diferente, as ondas geradas pela *FWM* coincidem ou não, respectivamente, com os canais originais. A Figura 4.2 representa um esquemático de dois campos injetados na fibra, com freqüências f_1 *e* f_2, e dois novos campos oriundos do efeito de *FWM* [34].

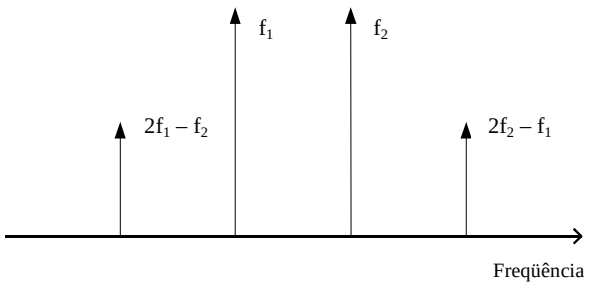


Figura 4.2: *Processo da FWM para dois canais injetados na fibra com freqüências* f_1 *e* f_2

A Figura 4.3 ilustra nove campos gerados devido a três canais injetados na fibra, f_1, f_2 e f_3, com mesmo espaçamento entre os canais.

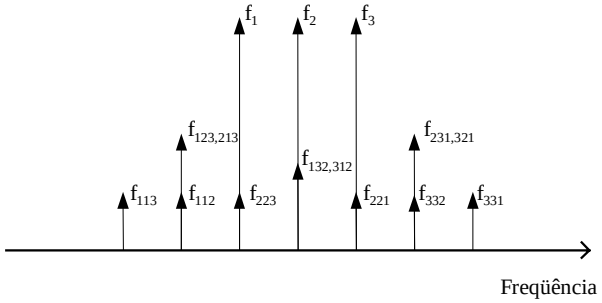


Figura 4.3: *Processo da FWM para três canais injetados na fibra, com freqüências* f_1 *,* f_2 *e* f_3 *, para mesma separação de canais*

A Figura 4.4 mostra os produtos da *FWM* gerados a partir de três campos, quando os mesmos têm um espaçamento diferenciado entre eles. Comparando as Figuras 4.3 e 4.4, pode-se notar que o espaçamento diferenciado evita que as freqüências dos campos novos coincidam com a freqüência dos canais originais, evitando a interferência nos canais do sistema *WDM* (*crosstalk*).

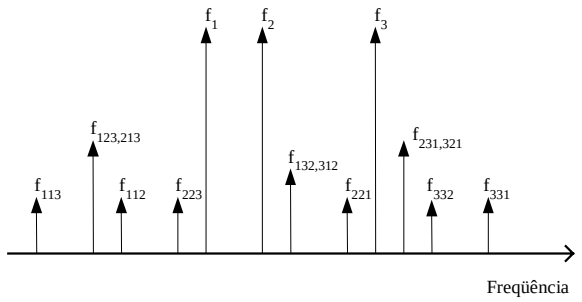


Figura 4.4: *Processo da FWM para três canais injetados na fibra, com freqüências f_1, f_2 e f_3, para separação de canais diferente*

4.5 – Espalhamento Estimulado Raman.

O Espalhamento Estimulado Raman, *SRS*, é a interação entre a luz e o meio propagante, ocorrendo uma conversão de parte da energia da luz para comprimentos de onda maiores. Quando a fibra está no regime não-linear de operação, um *fóton,* com energia hf_1, é anulado para criar um *fóton* de menor energia, hf_2, e a outra parcela da energia provoca uma vibração molecular, essa parcela é chamada de *fônon*. Uma constante importante nesta análise é conhecida como constante de Planck, h, e vale $h = 6.63 \times 10^{-34}$ J·s. Em análise de efeitos ópticos, é usual apresentar a energia em elétron-volts (eV), ou seja, $E = (h\ c)/\lambda$ é igual a $E\ (eV) = 1{,}241/\lambda$ para o comprimento de onda dado em μm [2]. No processo de Espalhamento Estimulado Raman, o valor do deslocamento do comprimento de onda depende das características do material.

Pode-se dizer que o Espalhamento Estimulado Raman se caracteriza como uma atenuação do sinal. Como dito, o *fóton* criado apresenta uma freqüência menor do que o original, ou seja, $f_2 < f_1$. Sendo a diferença f_1- f_2 denominada freqüência de Stokes.

A Figura 4.5 representa o ganho Raman em função do deslocamento de freqüência, podendo-se notar que o ganho máximo ocorre próximo de 12 THz. Na janela de operação de 1550 nm e, para o caso em que a separação entre canais não ultrapasse 125 nm, a transferência de potência (dos canais de comprimento de onda

mais baixo para os canais de comprimento de onda mais alto) varia com uma aproximação linear com o espaçamento entre os canais.

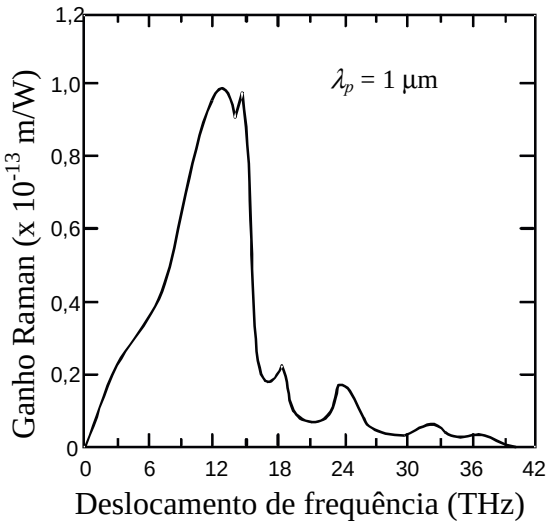


Figura 4.5: *Espectro do ganho Raman em função do deslocamento de fase*

Se outro sinal está presente na fibra, no comprimento de onda maior λ_2, o *SRS* irá amplificar esse sinal, a partir do decréscimo do sinal de comprimento de onda menor λ_1. A amplificação do sinal com comprimento de onda λ_2 é obtida da depleção da potência do sinal com comprimento de onda λ_1; por isso, esse último é denominado "sinal de bombeamento". Esse é o princípio de funcionamento dos Amplificadores Raman. A Figura 4.6 mostra uma representação de um Amplificador Raman, onde os comprimentos de onda maiores são amplificados, adquirindo potência dos comprimentos de ondas menores.

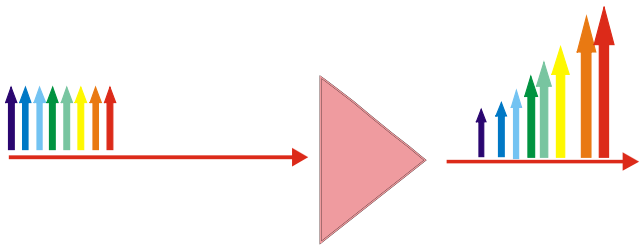


Figura 4.6: *Representação esquemática do ganho do Amplificador Raman, onde comprimentos de onda maiores são amplificados a partir de comprimentos de onda menores*

Dessas características citadas, pode-se verificar que um sistema *DWDM* pode ter seu desempenho degradado pelo *SRS*, transferindo energia dos canais de comprimentos de onda mais curtos para os canais de comprimentos de onda mais longos.

Capítulo 5

AUTOMODULAÇÃO DE FASE.

5.1 – Introdução.

Devido à variação do índice de refração, em função da intensidade em um meio óptico não-linear, ocorre, entre outros fenômenos não-lineares, a Automodulação de Fase (*SPM – Self-Phase Modulation*) do sinal propagante. Esse fenômeno leva ao alargamento espectral dos pulsos ópticos [7]. Stolen e Lin fizeram um estudo sistemático da *SPM* em uma fibra de núcleo de sílica. Posteriormente, outros trabalhos, considerando a *SPM* em fibras, foram desenvolvidos [39] a [42].

Neste capítulo, estuda-se o efeito não-linear da *SPM*, estando esse organizado da seguinte forma: primeiramente, a Seção 5.2 faz uma abordagem do efeito da *SPM*, desprezando os efeitos de dispersão. Na Seção 5.3, os efeitos da dispersão sobre a *SPM* serão discutidos. Na Seção 5.4 estuda-se a relação entre os fenômenos de *SPM* e a Instabilidade Modulacional (*MI*).

5.2 – *SPM* Induzindo Alargamento Espectral.

Conforme visto no Capítulo 3, a Eq. (3.9) pode ser usada para estudar a propagação de pulsos com largura temporal da ordem de picosegundos, sendo válida para fibras dispersivas com perdas e com não-linearidade devida ao Efeito Kerr.

Reescreve-se essa equação abaixo:

$$j\frac{\partial A(z,T)}{\partial z} = -j\frac{\alpha}{2}A(z,T) + \frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A(z,T)}{\partial T^2} - \gamma\left|A(z,T)\right|^2 A(z,T). \tag{5.1}$$

Esta equação de propagação pode ser normalizada em relação à amplitude $U(z,T)$, definida na Eq. (3.12), e considerando-se, também, a Eq. (3.11), onde:

$\tau = \dfrac{T}{T_0} = \dfrac{t - z/v_g}{T_0}$ é o tempo normalizado em relação a T_0.

Derivando-se a Eq. (3.12), tem-se:

$$\frac{\partial A(z,\tau)}{\partial z} = \sqrt{P_0}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)exp\left(-\frac{\alpha\cdot z}{2}\right)U(z,\tau) + \sqrt{P_0}\,exp\left(-\frac{\alpha\cdot z}{2}\right)\frac{\partial U(z,\tau)}{\partial z}, \tag{5.2}$$

onde $\dfrac{\partial U(z,\tau)}{\partial z}$ é obtida usando a relação [19]:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial \tau}\cdot\frac{\partial \tau}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\beta_1}{T_0}\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial U}{\partial z}, \tag{5.3}$$

visto que: $\tau = \dfrac{T}{T_0} = \dfrac{t - z/v_g}{T_0} = \dfrac{t - \beta_1 z}{T_0} \Rightarrow \dfrac{\partial \tau}{\partial z} = -\dfrac{\beta_1}{T_0}$.

Retomando-se a Eq. (5.2), tem-se:

$$\frac{\partial A(z,\tau)}{\partial z} = \sqrt{P_0}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)exp\left(-\frac{\alpha\cdot z}{2}\right)U(z,\tau) + \sqrt{P_0}\,exp\left(-\frac{\alpha\cdot z}{2}\right)\left[-\frac{\beta_1}{T_0}\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial U}{\partial z}\right] \tag{5.4}$$

e também:

$$\frac{\partial A}{\partial T} = \frac{\partial A}{\partial \tau}\cdot\frac{\partial \tau}{\partial T} = \frac{\partial A}{\partial \tau}\cdot\frac{1}{T_0}. \tag{5.5}$$

Então:

$$\frac{\partial A}{\partial T} = \frac{1}{T_0} \cdot \sqrt{P_0}\, exp\left(-\frac{\alpha \cdot z}{2}\right) \frac{\partial U(z,\tau)}{\partial \tau}. \tag{5.6}$$

Decorre, então, que:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial T^2} = \frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{1}{T_0}\sqrt{P_0}\, exp\left(-\frac{\alpha \cdot z}{2}\right)\frac{\partial U(z,\tau)}{\partial \tau}\right] \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial T^2} = \frac{1}{T_0}\sqrt{P_0}\, exp\left(-\frac{\alpha \cdot z}{2}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial U(z,\tau)}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial T} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial T^2} = \frac{1}{T_0^2}\sqrt{P_0}\, exp\left(-\frac{\alpha \cdot z}{2}\right) \cdot \frac{\partial^2 U(z,\tau)}{\partial \tau^2}.$$

Substituindo (5.4) e a equação acima na Eq. (5.1), e usando a notação $U(z,\tau) = U$, temos:

$$j\left\{\sqrt{P_0}\left(-\frac{\alpha}{2}\right) exp\left(-\frac{\alpha \cdot z}{2}\right) U + \sqrt{P_0}\, exp\left(-\frac{\alpha \cdot z}{2}\right)\left[\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\beta_1}{T_0}\frac{\partial U}{\partial \tau}\right]\right\} =$$
$$-j\frac{\alpha}{2}\sqrt{P_0}\, exp\left(-\frac{\alpha \cdot z}{2}\right) U + \frac{\beta_2}{2}\frac{1}{T_0^{\,2}}\sqrt{P_0}\, exp\left(-\frac{\alpha \cdot z}{2}\right) \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} -$$
$$-\gamma P_0\, exp(-\alpha \cdot z)|U|^2 \sqrt{P_0}\, exp\left(-\frac{\alpha z}{2}\right) U.$$

Simplificando os termos comuns resulta:

$$-j\frac{\alpha}{2}U + j\frac{\partial U}{\partial z} - j\frac{\beta_1}{T_0}\frac{\partial U}{\partial \tau} = -j\frac{\alpha}{2}U + \frac{\beta_2}{2}\frac{1}{T_0^{\,2}} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \gamma P_0\, exp(-\alpha \cdot z)|U|^2 U \Rightarrow$$

$$j\left[\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\beta_1}{T_0}\frac{\partial U}{\partial \tau}\right] - \frac{\beta_2}{2T_0^{\,2}} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = -\gamma P_0\, exp(-\alpha \cdot z)|U|^2 U.$$

Usando-se a Eq. (5.3), tem-se:

$$j\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\beta_2}{2T_0^{\,2}} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = -\gamma P_0\, exp(-\alpha \cdot z)|U|^2 U \Rightarrow$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} + j\frac{\beta_2}{2T_0^{\,2}} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = j\gamma P_0\, exp(-\alpha \cdot z)|U|^2\, U\ .$$

Considerando que (conforme Capítulo 3):

$$L_D = \frac{T_0^2}{|\beta_2|} \qquad\qquad L_{NL} = \frac{1}{\gamma \cdot P_0}\,,$$

tem-se:

$$\frac{\partial U}{\partial z} + j\frac{sgn(\beta_2)}{2L_D} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = j\frac{exp(-\alpha z)}{L_{NL}}|U|^2\, U\ .$$

Multiplicando por *j*, tem-se, finalmente:

$$j\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{sgn(\beta_2)}{2L_D} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \frac{exp(-\alpha z)}{L_{NL}}|U|^2\, U \tag{5.7}$$

Essa equação governa a propagação de pulsos, considerando os efeitos de dispersão de primeira ordem e da *SPM*.

5.2.1 – *SPM* SEM DISPERSÃO.

Para uma primeira abordagem, desconsidera-se o efeito da dispersão na fibra e, para isso, despreza-se o termo β_2 na Eq. (5.7):

$$j\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{exp(-\alpha z)}{L_{NL}}|U|^2\, U \tag{5.8}$$

As condições para as quais a dispersão pode ser ignorada foram discutidas no Capítulo 3, através da introdução das escalas de comprimento L_D e L_{NL}, pela Eq. (3.10). Naquele capítulo, mostra-se que, para isso, é preciso $L << L_D$ e $L \approx L_{NL}$ em uma fibra de comprimento L. A evolução do pulso na fibra será, então, governada pelo termo não-linear, que provocará a Automodulação de Fase (*SPM*) do mesmo, conduzindo a um alargamento espectral.

O regime de não-linearidade será dominante, sempre que a condição abaixo for atendida [7]:

$$\frac{L_D}{L_{NL}} = \frac{\gamma P_0 T_0^2}{|\beta_2|} >> 1$$

Esta equação pode ser satisfeita, por exemplo, com a utilização de pulsos com T_0 = 100 ps e com potência de pico $P_0 \approx 1$ W em fibras *ST* [35] operando na janela de 1550 nm. A Eq. (5.8) foi resolvida, na referência [7], obtendo-se:

$$U(L,T) = U(0,T)\, e^{j\phi_{NL}(L,T)} \quad , \tag{5.9}$$

onde $U(0,T)$ é a amplitude do campo, em $z = 0$, e:

$$\phi_{NL}(L,T) = |U(0,T)|^2 (L_{eff}/L_{NL}) \, , \tag{5.10}$$

onde $L_{eff} = \dfrac{1\text{-}e^{-\alpha \cdot L}}{\alpha}$, conforme demonstrado a seguir.

O comprimento efetivo, L_{eff}, foi introduzido levando-se em conta algumas importantes implicações. Há de se considerar que, quando o sinal propaga-se na fibra, a potência decresce devido à atenuação. Um modelamento matemático deste efeito pode ser complicado e, na prática, um simples modelo que assume que a potência é constante sobre um certo comprimento efetivo (L_{eff}) é suficiente no entendimento dos efeitos não-lineares [25].

A Figura 5.1 ilustra as duas situações: no primeiro caso, tem-se a situação real, onde a potência decai com a distância e, na outra, apresenta-se o caso da consideração do L_{eff}, onde a potência mantém-se constante em uma porção do comprimento, sendo este denominado de comprimento efetivo.

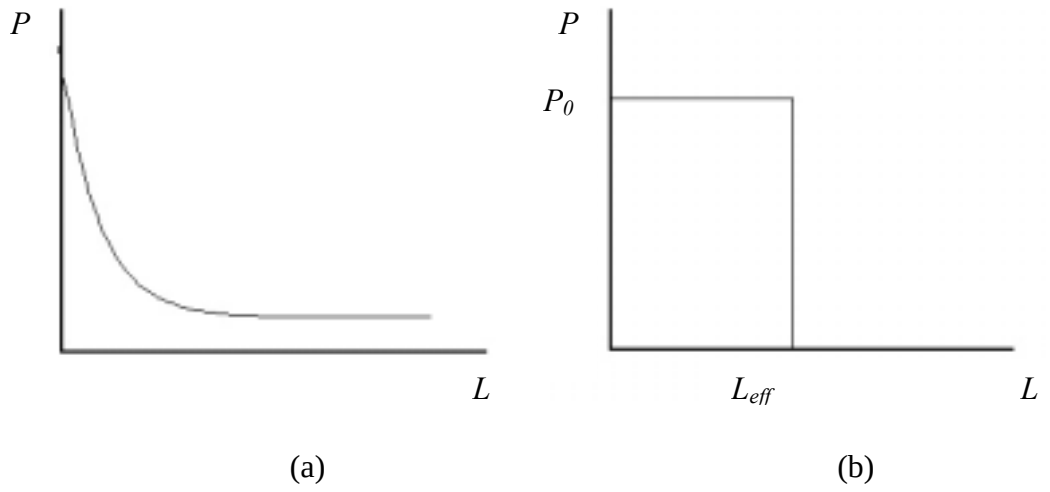


Figura 5.1: *Curva da potência (P) versus o comprimento do enlace(L), onde: (a) caso real onde potência decai com a distância, (b) conceito de Leff com a potência constante ao longo do enlace [25]*

Admite-se uma potência inicial de transmissão P_0, na fibra, e $P(z) = P_0\, e^{-\alpha z}$ como a potência em uma distância z ao longo do comprimento do enlace, com α correspondendo a atenuação na fibra. O comprimento efetivo é definido de forma a satisfazer a relação [25]:

$$P_0 \cdot L_{eff} = \int_{z=0}^{z=L} P(z)dz = \int_0^L P_o \cdot e^{-\alpha \cdot z} dz \Rightarrow L_{eff} = \int_0^L e^{-\alpha z} dz$$

Logo, L_{eff} fica definido pela expressão:

$$L_{eff} = \frac{1 - e^{-\alpha \cdot L}}{\alpha}. \tag{5.11}$$

Na Seção 5.2.1.2, foi feita uma simulação para comprovar a validade do modelo matemático de comprimento efetivo.

A Eq. (5.9) mostra que a *SPM* provoca um aumento no deslocamento de fase, dependendo da intensidade, mas o formato do pulso se mantém inalterado. O deslocamento de fase não-linear, ϕ_{NL} na Eq. (5.10), aumenta com o comprimento da fibra L. O deslocamento de fase máximo, ϕ_{max}, ocorre no centro do pulso localizado em $T = 0$. Com U normalizado, tal que $|U(0,0)| = 1$, ϕ_{max} é dado por [7]:

$$\phi_{max} = \frac{L_{eff}}{L_{NL}} = \gamma P_0 L_{eff}. \tag{5.12}$$

O alargamento espectral induzido por *SPM* é uma conseqüência da dependência temporal da fase ϕ_{NL}. Isto pode ser entendido notando-se que a fase, variando no tempo, implica que a freqüência óptica instantânea difere, através do pulso, do seu valor central ω_0. A diferença $\delta\omega$ é dada por [7]:

$$\delta\omega(T) = -\frac{\partial\phi_{NL}}{\partial T} = -\left(\frac{L_{eff}}{L_{NL}}\right)\frac{\partial}{\partial T}\left|U(0,T)\right|^2, \tag{5.13}$$

onde o sinal negativo é devido à escolha do fator $e^{(-j\omega_0 t)}$ na Eq. (2.32). A dependência do tempo, de $\delta\omega$, é referido ao *chirp*(gorjeio) da freqüência, sendo que este efeito induzido pela *SPM* aumenta em magnitude com a distância propagada. Em outras palavras, novas componentes de freqüência são geradas continuamente com a propagação do pulso ao longo da fibra. Estas componentes de freqüências, geradas pela *SPM*, alargam o espectro sobre sua largura inicial em z = 0, como será confirmado por simulação na seqüência desse trabalho.

Lasers modulados diretamente por sinais digitais, utilizados em sistemas ópticos de telecomunicações, têm o sinal de luz de saída representado, geralmente, por pulsos gaussianos ou super-gaussianos. Considere, por exemplo, o caso de um pulso super-gaussiano, de ordem m, com o campo incidente $U(0,T) = exp\left[-\left(\frac{T}{T_0}\right)^{2m}\right]$, na Eq. (5.13). O *chirp* induzido pela *SPM* será, então:

$$\delta\omega(T) = \frac{2m}{T_0}\frac{L_{eff}}{L_{NL}}\left(\frac{T}{T_0}\right)^{2m-1} exp\left[-\left(\frac{T}{T_0}\right)^{2m}\right]. \tag{5.14}$$

O caso m = 1 corresponde a um pulso gaussiano. Para valores grandes de m, o pulso incidente torna-se aproximadamente retangular, com tempo de subida e descida cada vez menor. A Figura 5.2, gerada a partir da Eq. (5.10), mostra a variação do deslocamento de fase não-linear, ϕ_{NL}, em função do tempo, para m = 1, 2 e 3. Pode-se observar, pela Eq. (5.10), que ϕ_{NL} é diretamente proporcional a $|U(0,T)|^2$, sendo assim, a variação temporal é idêntica àquela da intensidade do pulso.

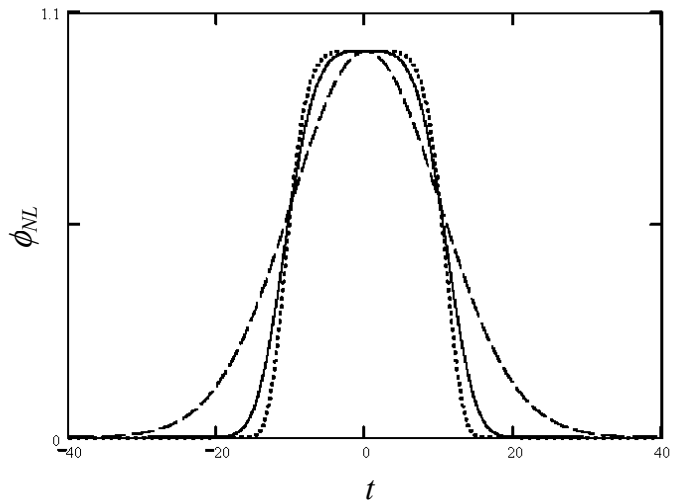


Figura 5.2: *Deslocamento de fase não-linear ϕ_{NL} induzido pela SPM em função do tempo. A linha tracejada corresponde um pulso gaussiano, a linha cheia um super-gaussiano m=2 e a pontilhada a um super-gaussiano m=3*

A Figura 5.3 demonstra como é a variação da freqüência no tempo, ou seja, o *chirp* de freqüência $\delta\omega$, sendo este induzido através do pulso.

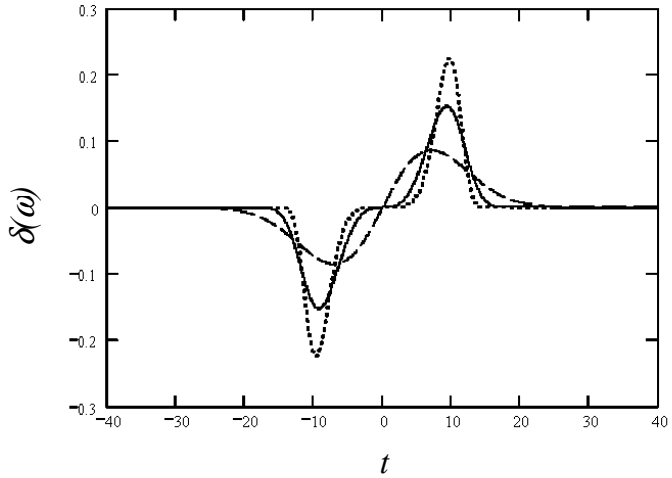


Figura 5.3: *Variação da freqüência no tempo $\delta(\omega)$ (chirp de freqüência),onde a linha tracejada corresponde a um pulso gaussiano, a linha cheia um super-gaussiano m=2 e a pontilhada a um super-gaussiano m=3*

Pela Figura 5.3 observa-se que a variação de freqüência, $\delta\omega$, é negativa na parte frontal do pulso e, sendo assim, este efeito causa deslocamento para freqüências menores, ou seja, para o vermelho (*red chirp*). E $\delta\omega$ torna-se positivo na parte posterior do pulso, deslocando a portadora de freqüência para o azul, o que corresponde a freqüências maiores (*blue chirp*). Esta característica pode ser visualizada na Figura 5.4, onde se tem a forma do pulso gaussiano (m = 1), com o deslocamento da

sua portadora de freqüência sendo causado pela *SPM*. Esse *chirp* é positivo, uma vez que $\partial\omega / \partial t > 0$ [24].

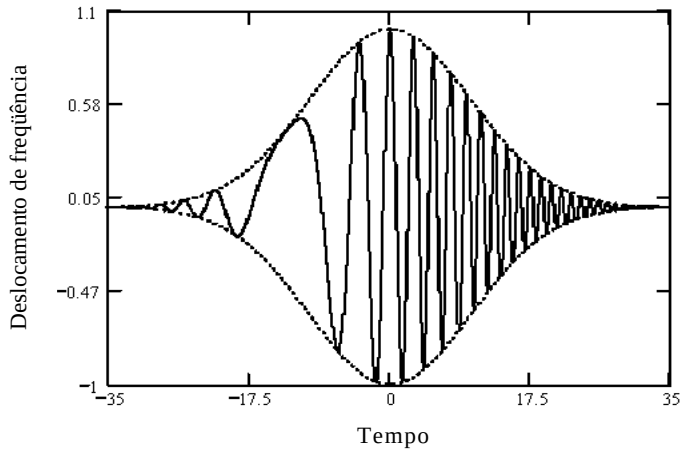


Figura 5.4: *Deslocamento da portadora de freqüência imposto pela SPM dentro de um pulso gaussiano*

Outra característica que se pode notar na Figura 5.3 é que o valor absoluto de $\partial\omega$ é maior para pulsos super-gaussianos do que para pulsos gaussianos. Na Figura 5.5, mostra-se o *chirp* de freqüência induzido pela *SPM* para um pulso super-gaussiano, com $m = 3$.

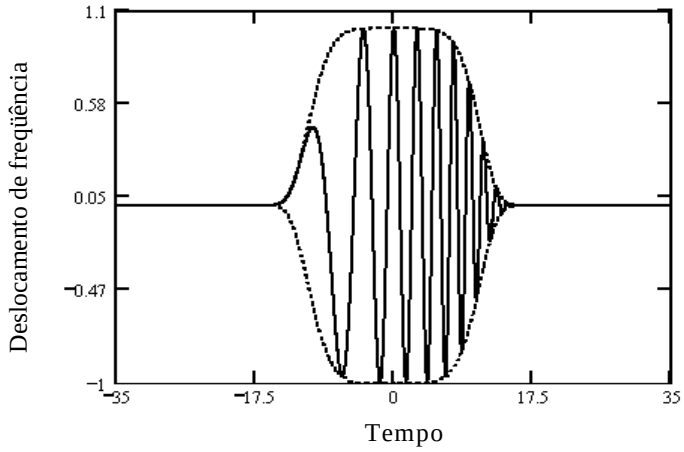


Figura 5.5: *Deslocamento da portadora de freqüência imposto pela SPM dentro de um pulso super-gaussiano para m=3*

5.2.1.1 – SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO.

Tomando a transformada de Fourier da Eq. (5.9) e fazendo $S(\omega)=\left|\widetilde{U}(z,\omega)\right|^2$, obtém-se a solução no domínio da freqüência, para um pulso, após ele se propagar por uma distância *L*, na fibra:

$$S(\omega)=\left|\int_{-\infty}^{\infty}U(0,T)exp\left[j\phi_{NL}(L,T)+j(\omega-\omega_0)T\right]dT\right|^2 \qquad (5.15)$$

A Eq. (5.15) corresponde à solução da Eq. (5.9), podendo ser resolvida analiticamente. Entretanto, neste trabalho apresenta-se uma solução numérica baseada na plataforma computacional *VPI*.

A Figura 5.6 mostra a forma do pulso no domínio da freqüência, para os diversos comprimentos de fibra considerados na Eq. (5.12).

Algumas características importantes são tiradas desta solução. A primeira delas é que o espectro cresce com o comprimento, para uma dada fibra, ou seja, o pulso ao propagar-se dá origem a novas componentes espectrais. Este comportamento é causado pela *SPM*. Outra característica é que, mantendo-se o comprimento e aumentando a potência, também tem-se um alargamento do espectro, o que pode ser visto na Eq. (5.12). Além disso, se forem mantidos o comprimento da fibra e a potência incidente, o alargamento espectral cresce com o aumento do índice não-linear da fibra γ, ou seja, quando se usa fibras que são mais susceptíveis a não-linearidade. Observa-se que, para um dado comprimento de fibra, ϕ_{max} cresce linearmente com a potência de pico P_0, de acordo com a Eq. (5.12).

Uma característica notável, na Figura 5.6, é que o alargamento espectral induzido pela *SPM* é acompanhado por uma estrutura oscilatória que cobre toda a faixa de freqüência, sendo este espectro alargado simetricamente.

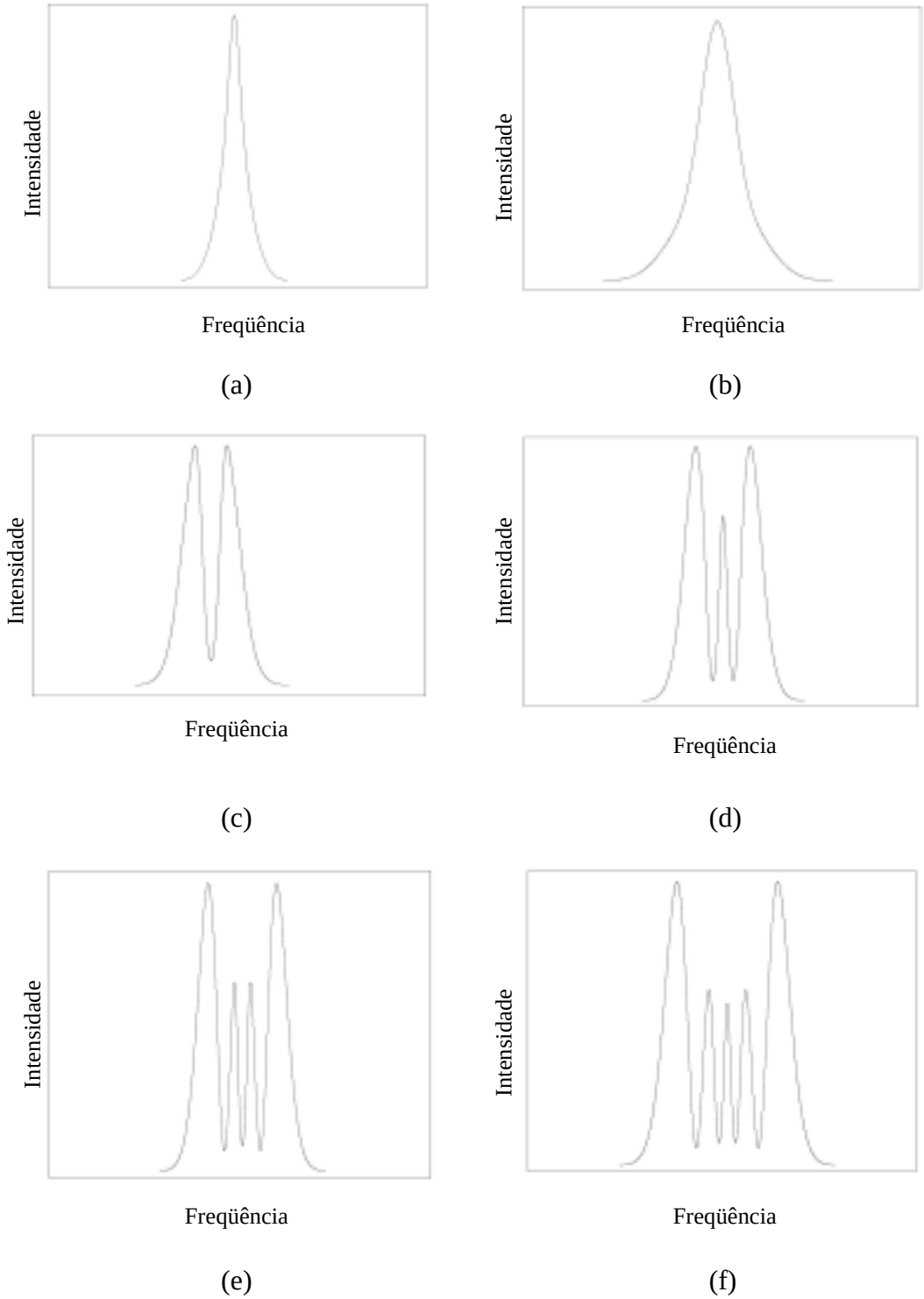


Figura 5.6: *Espectro alargado pela SPM para um pulso sem chirp para diferentes valores de* ϕ_{max}*, sendo (a) espectro de entrada, (b)* $\phi_{max} = 0{,}5\pi$*, (c)* $\phi_{max} = 1{,}5\pi$*, (d)* $\phi_{max} = 2{,}5\pi$*, (e)* $\phi_{max} = 3{,}5\pi$ *e (f)* $\phi_{max} = 4{,}5\pi$*.*

A origem da estrutura oscilatória pode ser entendida analisando-se a Figura 5.3, onde a dependência no tempo do *chirp* de freqüência induzido pela *SPM* é mostrado. Em geral, o mesmo *chirp* pode ocorrer em dois valores de *T*, mostrando, as-

sim, que o pulso tem a mesma freqüência instantânea em dois pontos distintos. Qualitativamente falando, esses dois pontos representam duas ondas de mesma freqüência, mas em fases distintas, que podem interferir construtivamente ou destrutivamente, dependendo de suas diferenças relativas de fase. A estrutura, com múltiplos picos no espectro do pulso, resulta de tal interferência.

Na Referência [7] (e na referência lá citada), mostra-se que o número de picos da estrutura oscilatória, notada na Figura 5.6, relaciona-se com o parâmetro $\phi_{max,}$ da Eq. (5.12), segundo a expressão:

$$\phi_{max} \approx (M - \frac{1}{2})\pi \tag{5.16}$$

De acordo com a Figura 5.6, a *SPM* aumenta consideravelmente a largura espectral inicial do pulso incidente na fibra. Considerando a tendência das atuais redes ópticas, baseadas na tecnologia *DWDM*, um menor espaçamento espectral entre canais é desejável. Nesse sentido, o efeito da *SPM* pode influenciar no desempenho dessas redes. Para estudar essa influencia, é útil estimar o Fator de Alargamento Espectral causado pela *SPM*, isto é, a razão entre a largura *rms* do pulso $(\Delta\omega_{rms})_L$, após propagar uma distância L na fibra, e a largura no início da fibra, $(\Delta\omega_{rms})_{L=0}$. O valor da largura espectral *rms*, $\Delta\omega_{rms}$, é definido como [43]:

$$\Delta\omega_{rms}^2 = \left\langle (\omega - \omega_0)^2 \right\rangle - \left\langle (\omega - \omega_0) \right\rangle^2 , \tag{5.17}$$

onde o símbolo “<.>” denota o valor médio, sendo calculado por:

$$\left\langle (\omega - \omega_0)^n \right\rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_0)^n \, S(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega} . \tag{5.18}$$

Para o caso específico de um pulso óptico gaussiano e em fibras com dispersão desprezível, como é o caso estudado nessa seção, a Referência [7] apresenta uma forma analítica para o Fator de Alargamento Espectral:

$$\frac{(\Delta\omega_{rms})_L}{(\Delta\omega_{rms})_{L=0}} = \left(1 + \frac{4}{3\sqrt{3}} \phi_{max}^2 \right)^{1/2} . \tag{5.19}$$

Para casos mais gerais, é necessário resolver numericamente a Eq. (5.1) e usar as relações (5.17) e (5.18). A Figura 5.7 mostra o Fator de Alargamento Espectral imposto pela *SPM* em um pulso gaussiano, com duração temporal inicial T_{FWHM} = 100 ps, P_0 = 130 mW, em função do comprimento efetivo, para o caso de uma fibra *ST*, que apresenta um índice não-linear γ = 1,52 $W^{-1}km^{-1}$; a dispersão sendo desprezada. A Figura 5.7 foi obtida a partir das Eqs. (5.12) e (5.19).

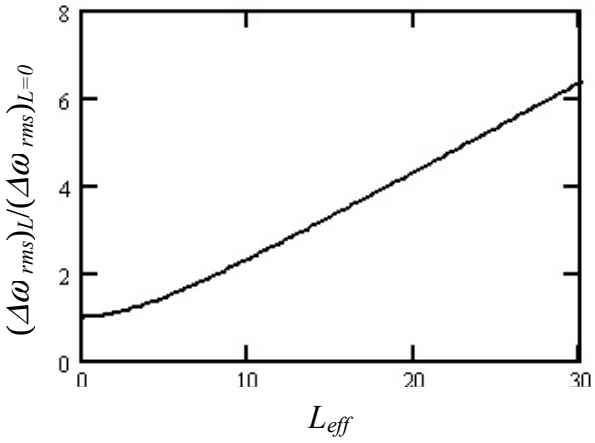


Figura 5.7: *Alargamento espectral rms imposto pela SPM, em função do comprimento efetivo do enlace*

Pela figura, pode-se observar que, para L_{eff} = 10 km, o pulso dobra sua largura espectral.

5.2.1.2 – SIMULAÇÕES: COMPRIMENTO EFETIVO E ALARGAMENTO ESPECTRAL.

Nessa subseção apresenta-se os resultados obtidos a partir de duas simulações realizadas com a plataforma computacional *VPI*.

Na primeira delas, comprova-se a validade do conceito de comprimento efetivo e, na segunda, comprova-se, por simulação, os resultados obtidos analiticamente com a Eq. (5.19), para o Fator de Alargamento Espectral.

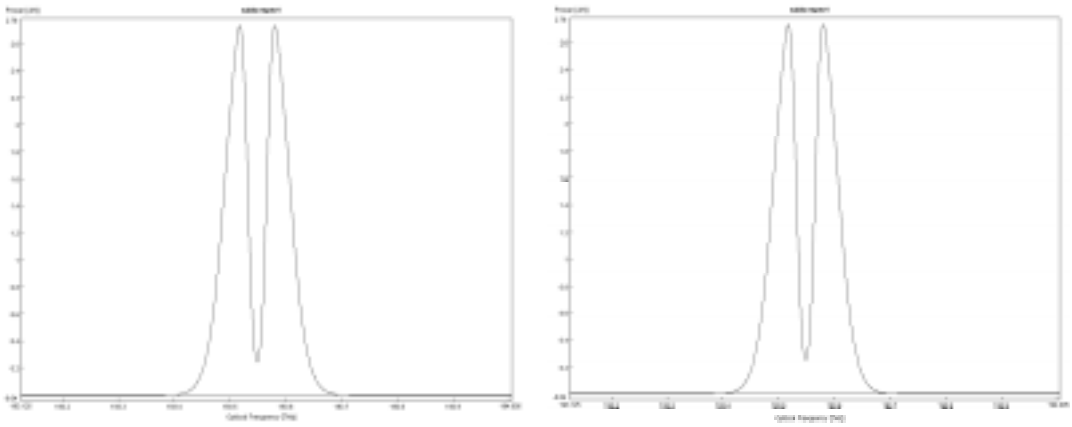
1ª) <u>*Modelo Matemático de Comprimento Efetivo*</u>:

Para comprovar a validade do modelo de comprimento efetivo, foi feita uma simulação utilizando a plataforma computacional *VPI*. Empregou-se uma fibra *ST* [35], operando em 1550 nm. Duas situações foram simuladas, a primeira considera uma fibra sem perda ($\alpha = 0$) e, na segunda, considera-se uma perda $\alpha = 0{,}2$ dB/km. Considerando-se um enlace de 150 km, como comprimento real, resulta em $L_{eff} \approx 20$ km. Para o cálculo foi utilizado o fator de conversão $\alpha(\text{km})^{-1} = \alpha(\text{dB/km}) / 4{,}34$. Os dados da simulação, bem como o alargamento espectral induzido pela *SPM*, calculados pela Eq. (5.19), estão mostrados na Tabela 5.1. Calculando teoricamente o alargamento espectral, pela Eq. (5.19), obteve-se o mesmo valor. Para esse cálculo tomou-se $M = 2$ na Eq. (5.16) e calculou-se o valor de ϕ_{max}.

Tabela 5.1: *Dados da simulação para o caso com e sem perdas na fibra e alargamento espectral induzido pela SPM*

Dados da Simulação.				Resultados obtidos da simulação.
$n_2(m^2/w)$	$D(ps/\ nm\ km)$	$\alpha\ (dB/km)$	$L\ (km)$	$(\Delta W_{RMS})_L\ /\ (\Delta W_{RMS})_{L=0}$
$2{,}6\ 10^{-20}$	0	0	19,71	4,25
$2{,}6\ 10^{-20}$	0	0,2	147,18	4,242

A Figura 5.8 mostra os espectros de saída das duas situações simuladas, sendo (a) o caso sem perdas e (b) o caso com perdas.



(a) (b)

Figura 5.8: *Espectro alargado do pulso na saída de uma fibra utilizando um canal em λ = 1550 nm (f = 193,54 THz): (a) corresponde ao caso ideal sem perdas, para um L= 20 km, (b) corresponde caso real, para uma perda igual a α = 0.2 dB/km e L≈150 km*

2ª) *Fator de Alargamento Espectral*:

A Figura 5.9 mostra o Fator de Alargamento Espectral induzido pela *SPM* em função do comprimento do enlace. Pode-se notar que o valor do alargamento tende a estabilizar, o que não ocorre na Figura 5.7. Isso é devido à queda no nível de potência do sinal, pois tem-se, agora, a situação real onde a fibra apresenta uma perda de 0,2 dB/km. Na Figura 5.9, pode-se ver a curva teórica (linha cheia) traçada conforme a Eq. (5.19) e os resultados da simulação (pontos sobre a mesma). Na simulação usou-se uma fibra *ST* com índice de refração γ= 1,52 $W^{-1}km^{-1}$, sendo transmitido um pulso gaussiano de potência de entrada P_0 = 160 mW e largura inicial T_0 = 10 ps. A Tabela 5.2 mostra os valores obtidos na simulação.

Tabela 5.2: *Valores da simulação para as dadas distâncias percorridas em uma fibra tipo padrão*

Distância (km)	$(\Delta W_{rms})_L$ / $(\Delta W_{rms})_{L=0}$
10	1.96
60	4.38
110	4.63

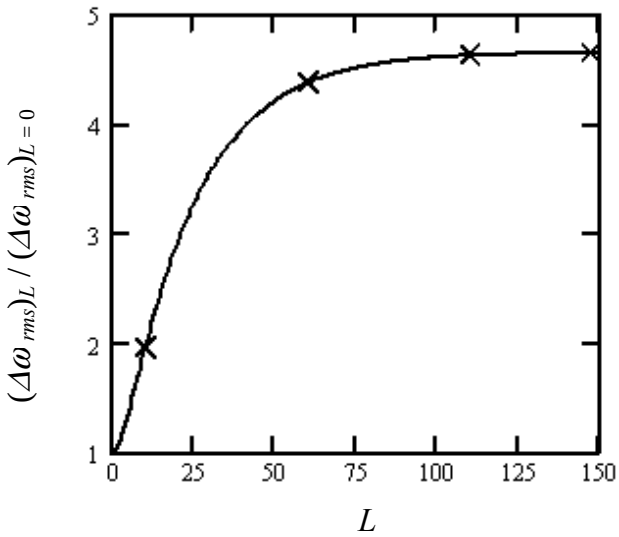


Figura 5.9: *Fator de Alargamento Espectral induzido pela SPM, em função do comprimento do enlace de fibra (km). Os pontos marcados com x foram obtidos através de simulação e a curva cheia é uma predição teórica*

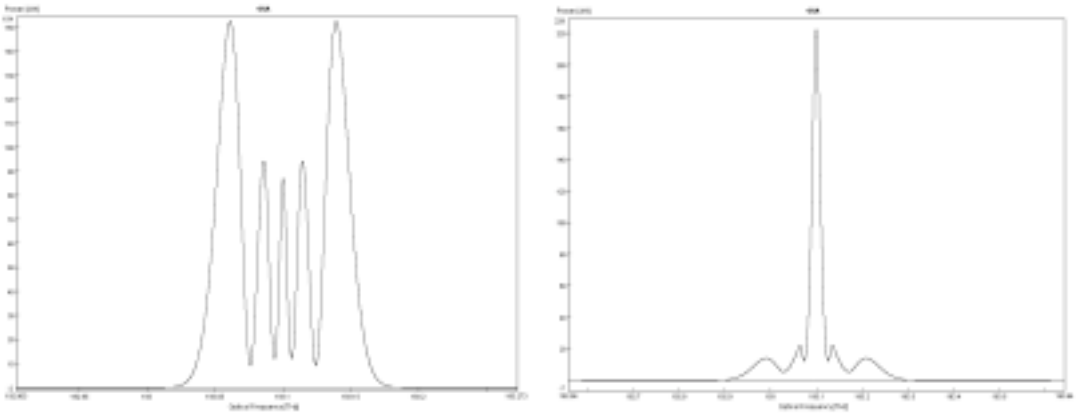
5.2.1.3 – SIMULAÇÕES DE EFEITOS DA FORMA DO PULSO E DO CHIRP INICIAL.

Nessa subseção a Eq. (5.8) foi resolvida numericamente, para pulsos de entrada com formato super-gaussiano e já com *chirp* inicial. O formato final do pulso, no domínio da freqüência, depende da forma inicial do pulso e do *chirp* inicial. Os resultados aqui obtidos constam da referência [7].

A expressão matemática de um pulso super-gaussiano, de ordem *m*, e com fator de *chirp C*, é dada por [7]:

$$U(0,T) = exp\left(-\frac{1+iC}{2}\left(\frac{T}{T_0}\right)^{2m}\right) \tag{5.20}$$

Para a simulação, considerou-se a Eq. (5.20) como a forma do pulso inicial e uma fibra *ST* [35], com parâmetros tais que ϕ_{max} = 4,5 π (Eq. (5.12)). No caso da Figura 5.10, os pulsos de entrada são sem *chirp* (*C* = 0), sendo, no caso, *m* = 1 na Figura 5.10 (a) e *m* = 3 na Figura 5.10 (b).

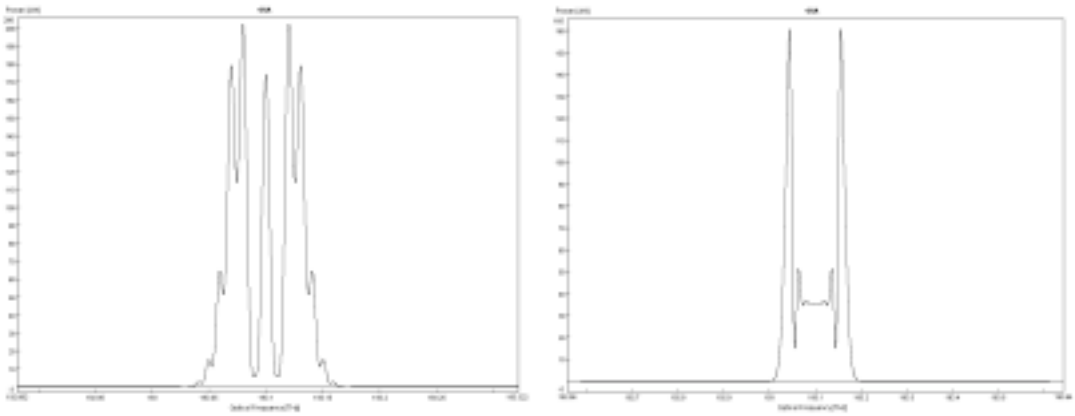


(a) (b)

Figura 5.10: *Comparação do espectro alargado pela SPM: (a) pulso gaussiano, (b) super-gaussiano sem chirp, com uma potência de pico correspondente a* $\phi_{max} = 4{,}5\pi$

A Figura 5.10 mostra que, ambos os pulsos, apresentam cinco picos, confirmando as previsões da Eq. (5.16). Também, pode-se observar que, no caso do pulso super-gaussiano, o alargamento espectral provocado pelo *chirp* da *SPM* é maior do que aquele provocado no pulso gaussiano (conforme Figura 5.3).

A freqüência inicial do *chirp* pode gerar mudanças no alargamento espectral do pulso, o que é ilustrado na Figura 5.11, na qual são mostrados os espectros de pulsos com *chirp*s positivos e negativos de $C = \pm 5$, na Eq. (5.20). Os outros parâmetros são os mesmos da Figura 5.10.



(a) (b)

Figura 5.11: *Efeito do chirp de freqüência inicial no espectro alargado pela SPM para um pulso gaussiano com chirp (a) C = 5 e (b) C = -5. Em ambos os casos* $\phi_{max} = 4{,}5\pi$

O *chirp* positivo aumenta o número de picos espectrais, enquanto que o oposto ocorre no caso do *chirp* negativo. Isto pode ser entendido notando que a freqüência de *chirp* induzida pela *SPM* é linear e positiva ao longo da região central do pulso gaussiano, conforme a Figura 5.3. Assim esse *chirp* é adicionado com o *chirp* inicial, $C > 0$, resultando em uma estrutura oscilatória maior, conforme a Figura 5.11 (a). No caso em que $C < 0$, as duas contribuições do *chirp* são opostas em sinal, e há redução da estrutura oscilatória, na região central, conforme observado na Figura 5.11 (b). Os picos na região mais externa, na Figura 5.11, para $C = -5$, são devidos ao *chirp* residual perto da frente e da cauda do pulso. Para valores negativos do parâmetro de *chirp* C, o espectro do pulso na saída da fibra pode torna-se mais estreito que os pulsos inicialmente sem *chirp*.

5.2.2 – INTERAÇÃO DA *SPM* COM A DISPERSÃO DA VELOCIDADE DE GRUPO.

Até aqui, mostrou-se como a *SPM* afeta o pulso levando-o a uma estrutura oscilatória no domínio da freqüência e, também, a um alargamento espectral . Foi estudada a ação da *SPM*, tomando-se as condições $L_D >> L$ e $L \approx L_{NL}$, conforme a Eq. (3.10), o que levou ao estudo dos efeitos isolados da *SPM*.

Nessa seção, estuda-se a influência da dispersão sobre um pulso auto-modulado em fase, ou seja, mostra-se como a *SPM* e a dispersão atuam de forma conjunta e quais as conseqüências impostas a um pulso que propaga-se em uma fibra dispersiva e não-linear. Nessa nova condição, o pulso apresenta mudanças espectrais e temporais, com características diferentes das apresentadas quando tem-se *SPM* ou dispersão isoladas.

A dispersão também têm o efeito de provocar um *chirp* no pulso (separação de freqüências mais altas das mais baixas). A interação desse efeito com o efeito da *SPM*, a qual foi vista na seção anterior e que provoca um *chirp* positivo, terá certamente conseqüências no comportamento das formas temporal e espectral final do pulso. Além disso, se a fibra opera na região de dispersão anômala ou normal, resultará em interações diversas.

5.2.2.1 – SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO: EFEITO DE DISPERSÃO DE PRIMEIRA ORDEM.

Quando a dispersão deve ser considerada, a equação que governa a propagação do pulso deve incluir os termos β_2 e β_3, respectivamente, dispersão cromática de primeira e de segunda ordem. Nessa seção considera-se, inicialmente, a influência de β_2 e, posteriormente, na Seção 5.2.2.2, estuda-se também o efeito de β_3.

A Eq. (5.7) inclui os efeitos de β_2 e da *SPM* e pode ser reescrita na forma:

$$j\frac{\partial U}{\partial \xi} = sgn(\beta_2)\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - N^2\, e^{-\alpha \cdot z}|U|^2 U\,, \tag{5.21}$$

sendo *sgn* (β_2) positivo para fibra operando na região normal e negativo para a fibra operando na região anômala; ξ representa a distância normalizada, definida por:

$$\xi = z / L\,, \tag{5.22}$$

e o parâmetro N é dado por:

$$N^2 = \frac{L_D}{L_{NL}} \equiv \frac{\gamma P_0 T_0^2}{|\beta_2|}\ . \tag{5.23}$$

O significado físico de N refere-se à ordem do *sóliton*, um fenômeno abordado posteriormente [7]. O parâmetro N, na Eq. (5.21), indica a importância relativa dos efeitos de dispersão e de não-linearidade na evolução dos pulsos ao longo da fibra. A dispersão domina para $N << 1$, enquanto a *SPM* é dominante para $N >> 1$. Para valores de $N \approx 1$, ambos apresentam importância equivalente durante a evolução do pulso.

Utilizou-se a plataforma computacional *VPI*, para resolver numericamente a Eq. (5.21) e simular diversas condições de propagação do pulso.

Numa primeira simulação, mostrada na Figura 5.12, observa-se a evolução temporal e espectral para um pulso sem *chirp* inicial. O regime de dispersão considerado é o normal, N =1 e $\alpha = 0$. A *SPM* gera novas componentes de freqüências que são deslocadas para o "vermelho" (comprimento de ondas maiores) na parte frontal do pulso e para o "azul" (comprimentos de onda menores) na parte posterior do pulso. Como as componentes em vermelho viajam mais rápidas, no regime de dispersão normal, o *chirp* causado pela *SPM* aumenta a taxa de alargamento temporal, em comparação ao efeito da dispersão isolada. O espectro apresentado na Figura 5.12 (b) não apresenta a estrutura de dois picos que foi observado na Figura 5.6. Isso pode ser entendido considerando-se que, em $z = 5\ L_D$, e, portanto, $\phi_{max} = 5$ ($\approx 1{,}5\ \pi$), a ação da dispersão torna menos efetiva a ação da *SPM*.

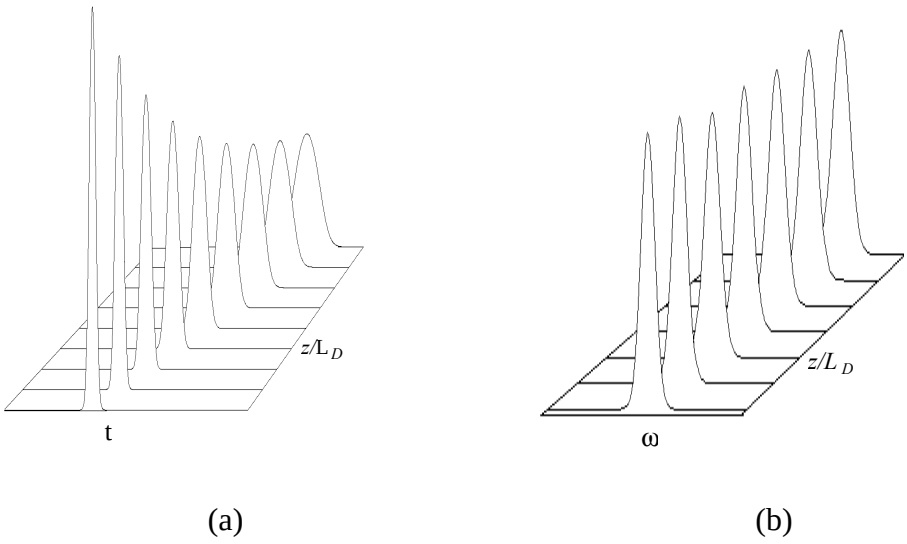


Figura 5.12: *Evolução da (a) forma do pulso e do (b) espectro óptico, sobre uma distância final de $5L_D$, para um pulso gaussiano inicialmente sem chirp propagando num regime de dispersão normal da fibra ($\beta_2 > 0$), com N = 1*

Numa segunda simulação, a Figura 5.13 mostra os formatos temporal e espectral do pulso em condições idênticas aos da Figura 5.12, exceto que o sinal do parâmetro de *GVD*, agora é $\beta_2 < 0$.

Quando o pulso se propaga no regime de dispersão anômala, o *chirp* causado pela *SPM* ($C > 0$) é contrário ao *chirp* causado pela dispersão anômala ($C < 0$). Nesse caso, e considerando-se a ausência de perdas na fibra e ainda a condição $N = 1$, isto é, $L_D = L_{NL}$, ocorrerá um perfeito balanceamento entre os dois efeitos e o pulso se propagará na forma de um *sóliton* [7], [18], [44] até [47].

A simulação foi feita considerando-se um pulso gaussiano, o qual tem sua evolução temporal e espectral, de forma a se ajustar a uma forma de secante hiperbólica, o que é previsto na solução analítica da Eq. (5.21) (para $N = 1$ e $\alpha = 0$) [7]. Esse comportamento é visto, claramente, na Figura 5.13 (a), onde, a partir de uma certa distância de propagação, o formato do pulso fica estável.

Para valores de $N = 2, 3, 4...$, tem-se a evolução de *sólitons* de 2ª ordem, 3ª ordem, 4ª ordem..., respectivamente.

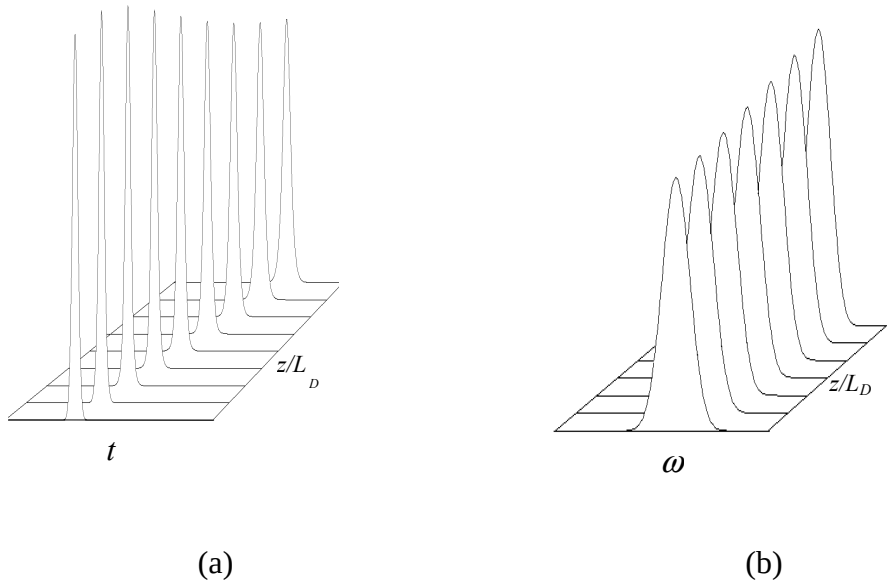


Figura 5.13: *Evolução da (a) forma do pulso e do (b) espectro óptico sobre uma distância final de $5L_D$, para um pulso gaussiano inicialmente sem chirp propagando num regime de dispersão anômalo ($\beta_2 < 0$), com parâmetros tais que N = 1*

A Figura 5.14 mostra uma simulação feita na plataforma *VPI*, considerando-se $N = 4$ na Eq. (5.21). Nessa equação $z = Z_0$, sendo Z_0 o período do *sóliton* e: $Z_0 = \pi/2\ L_D$ [7]. Observa-se a recuperação da forma inicial do pulso quando $z = Z_0$.

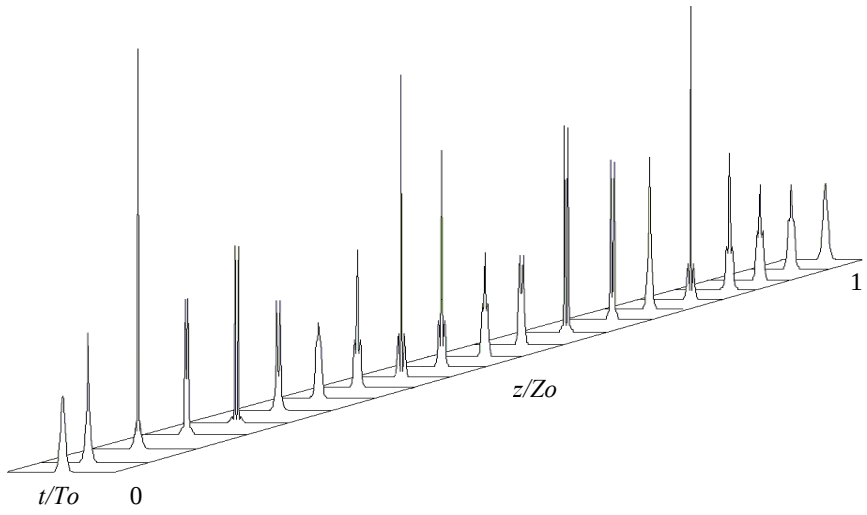


Figura 5.14: *Evolução temporal de um sóliton de ordem quatro (N=4) para um pulso de entrada gaussiano. A distância final é equivalente a um período do sóliton (Z_0).*

Na simulação do *sóliton* de ordem quatro, vista na Figura 5.14, foi considerado um pulso com T_0 = 10 ps, P_0 = 2,11 W propagando-se em uma fibra *ST* [35] com L = 7 km.

5.2.2.2 – SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO: EFEITO DE DISPERSÃO DE SEGUNDA ORDEM.

Se o comprimento de onda óptico λ_0 coincide, aproximadamente, com o de dispersão zero λ_D, então $D \approx 0$ e $\beta_2 \approx 0$, como pode ser visto, por exemplo, na Figura 3.8. Nesse caso, torna-se necessário incluir os efeitos da dispersão de segunda ordem para estudar a evolução do pulso. Desta forma, a equação que irá governar a propagação do pulso é obtida a partir da Eq. (2.69).

Considerando-se o comprimento de dispersão $L_D' = T_0^2 / |\beta_3|$ e definindo-se $\xi' = z/L_D'$ como a distância normalizada, e, também, as normalizações de tempo (τ) e amplitude (U), definidas, respectivamente, nas equações (3.11) e (3.12), então a Eq. (2.69) passa a ser escrita como:

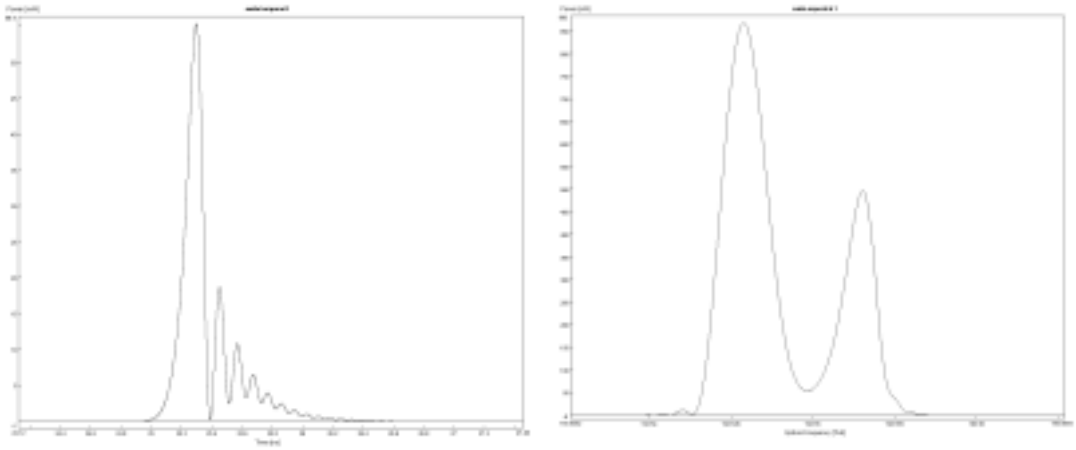
$$j\frac{\partial U}{\partial \xi'} = sgn(\beta_3)\frac{j}{6}\frac{\partial^3 U}{\partial \tau^3} - \bar{N}^2 \cdot e^{-\alpha \cdot z}|U|^2 U\,, \tag{5.24}$$

onde:

$$\bar{N}^2 = \frac{L'_D}{L_{NL}} \equiv \frac{\gamma \cdot P_0 T_0^3}{|\beta_3|}\,. \tag{5.25}$$

O parâmetro $\bar{N}$ governa a importância relativa dos efeitos da dispersão de segunda ordem e da *SPM*, atuando juntas na evolução do pulso. A dispersão de segunda ordem (β_3) é dominante se $\bar{N} << 1$, enquanto que o efeito da *SPM* domina se $\bar{N} >> 1$. A Eq. (5.24) pode ser solucionada numericamente usando o método numérico *SSF* (Anexo B), através do *VPI*.

Numa primeira simulação, usou-se a plataforma *VPI* para um pulso de entrada gaussiano, sem *chirp* inicial. Considerando ξ' =5 e fazendo-se $\bar{N}$ =1 na Eq. (5.25). O resultado da simulação pode ser visto na Figura 5.15, sendo que esta mostra a forma temporal e espectral do pulso.



(a) (b)

Figura 5.15: *(a) Forma temporal e (b) espectro do pulso usando um pulso de entrada gaussiano sem chirp, propagando no comprimento de dispersão zero, com* $\bar{N}$ *=1 e L= 5* L'_D

A alteração temporal, vista na Figura 5.15 (a), ocorre porque, embora o pulso se propague em λ_0, e portanto com $\beta_2 = 0$, ele continua sujeito aos efeitos dispersivos de β_3. Analisando-se o comportamento da Figura 5.15 (b), nota-se o efeito da dispersão de segunda ordem, β_3, no espectro. Na ausência de β_3, são vistos picos simétricos, conforme a Figura 5.6. O efeito da dispersão de segunda ordem, β_3, introduzi assimetria espectral no pulso.

5.2.3 – AUTOMODULAÇÃO DE FASE E INSTABILIDADE MODULACIONAL.

5.2.3.1 – INTRODUÇÃO.

A Instabilidade Modulacional (*MI*) é o resultado da interação entre a não-linearidade e a dispersão de uma fibra operando no regime anômalo [7] , [51] até [54]. Ela causa uma modulação na amplitude e na fase do pulso. Em fibras ópticas, onde situa-se o interesse deste trabalho, a Instabilidade Modulacional requer regime anômalo ($\beta_2 < 0$), manifestando-se como uma quebra de um pulso contínuo – *CW* (*Continuous Wave)* em um trem de pulsos ultracurtos [43].

Nessa seção, apresenta-se os resultados de algumas simulações, com as quais pode-se verificar essas características.

Para estudar o fenômeno da Instabilidade Modulacional (*MI*), considera-se a Eq. (5.1), que governa a propagação de um pulso na fibra, incluindo dispersão e *SPM*. Desprezando-se as perdas ($\alpha = 0$), a equação reduz-se a:

$$j\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial T^2} - \gamma \cdot |A|^2 A. \tag{5.26}$$

Como visto no Capítulo 2, *A(L,T)* representa a amplitude da envoltória do pulso, β_2 é o parâmetro da *GVD* e γ é o parâmetro de não-linearidade. No caso de uma radiação *CW*, a amplitude *A* é independente de *T*. A solução da Eq. (5.26) é uma onda que mantém o nível de potência óptica incidente, P_0, sendo sua fase auto modulada devido à não-linearidade do meio:

$$\widetilde{A} = \sqrt{P_0}\, exp(j\phi_{NL}). \tag{5.27}$$

A modulação de fase advêm do Efeito Kerr não-linear e pode ser obtida considerando-se que a fase do sinal, num comprimento de fibra *L*, varia com:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi L}{\lambda} = \frac{2\pi L}{\lambda_0}(n_L + n_2 P_0). \tag{5.28}$$

A parte não-linear de $\Delta\phi$ pode ser escrita, após algumas passagens matemáticas, como:

$$\phi_{NL} = \gamma P_0 L. \tag{5.29}$$

Considera-se o sinal incidente como uma perturbação, isto é:

$$\widetilde{A} = \left(\sqrt{P_0} + a\right) exp(j\phi_{NL}). \tag{5.30}$$

Substituindo-se a Eq. (5.30) em (5.26), as referências [7] e [53] mostram que, ao se assumir uma solução geral na forma:

$$a(L,T) = a_1\, exp[j(KL - \Omega T)] + a_2\, exp[-j(KL - \Omega T)], \tag{5.31}$$

onde K e Ω são o número de onda e a freqüência da perturbação, respectivamente essa solução pode se tornar instável, como se verá abaixo.

O número de onda, K, satisfaz a equação:

$$K = \pm\frac{1}{2}\left|\beta_2\Omega\right|\left[\sqrt{\Omega^2 + sgn(\beta_2)\Omega_C^2}\right] \tag{5.32}$$

onde sgn(β_2) = ± 1, dependendo do sinal de β_2, e:

$$\Omega_C^2 = \frac{4\gamma \cdot P_0}{\left|\beta_2\right|} = \frac{4}{\left|\beta_2\right| L_{NL}}, \tag{5.33}$$

sendo o comprimento não-linear L_{NL} definido pela Eq. (3.10).

A Eq. (5.32) representa a relação entre o número de onda e a freqüência da perturbação e, dependendo do sgn(β_2), isto é, da região de operação, diferentes comportamentos podem resultar:

1º) <u>*Regime Normal*</u>: com o enlace operando neste regime, a dispersão é negativa, $\beta_2 > 0$, e K é real para todos os valores de Ω. Isso caracteriza uma solução estável.

2º) <u>*Regime Anômalo*</u>: se o regime de operação for anômalo, a dispersão é positiva, $\beta_2 < 0$, e o valor de K pode-se tornar imaginário. Caso isso ocorra, a perturbação tende a crescer exponencialmente com L, conforme Eq. (5.31). Isso ocorre sempre que $|\Omega| < \Omega_C$. Esse fenômeno é referido como Instabilidade Modulacional.

O ganho espectral da Instabilidade Modulacional $g(\Omega)$, é obtido da Eq. (5.32) tomando sgn$(\beta_2) = -1$ e $g(\Omega) = 2\mathrm{Im}(K)$, onde o fator 2 leva em conta que a potência é o quadrado da amplitude do sinal. O ganho vale:

$$g(\Omega) = \left|\beta_2\Omega\right|\left(\Omega_c^2 - \Omega^2\right)^{1/2} \tag{5.34}$$

e só existe se $|\Omega| < |\Omega_C|$.

Na Figura 5.16 tem-se o espectro do ganho *G*, para dois níveis de potência, versus o deslocamento de freqüência Ω, usando valores apropriados para os parâmetros da fibra padrão (*ST*) com comprimentos de onda operando próximos de 1,55 μm.

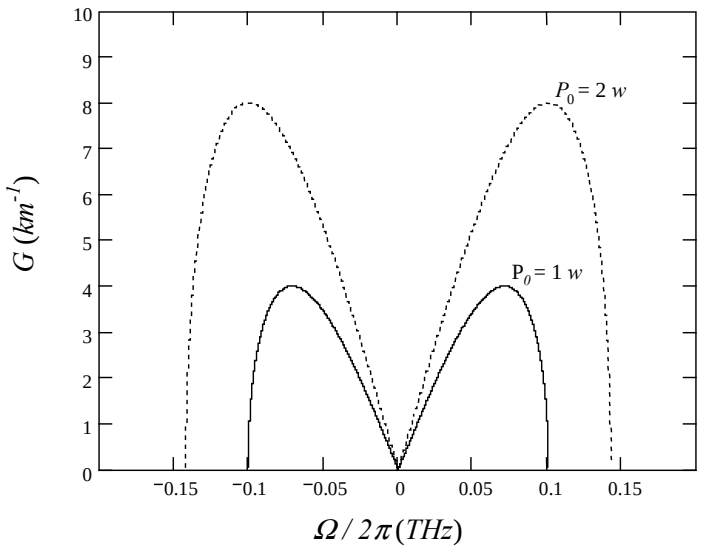


Figura 5.16: *Espectro do ganho da Instabilidade Modulacional pelo deslocamento de freqüência, para dois valores de potência, utilizando uma fibra ST com* β_2 *= -20* ps^2/km *e* $\gamma = 2\ W^{-1}km^{-1}$ *operando com* $\lambda = 1{,}55\ \mu m$

A figura deve ser interpretada considerando-se que, a partir de uma freqüência incidente, f_0, se a freqüência $f_0 + (\Omega / 2\pi)$ estiver no eixo horizontal, o ganho nessa nova freqüência é dado no eixo vertical. O ganho torna-se máximo para dois valores de freqüências dados por:

$$\Omega_{max} = \pm\frac{\Omega_C}{\sqrt{2}} = \pm\left(\frac{2\gamma P_0}{|\beta_2|}\right)^{1/2}, \tag{5.35}$$

com valor de pico:

$$g_{máx} = g(\Omega_{máx}) = \frac{1}{2}|\beta_2|\Omega_C^2 = 2\gamma P_0, \tag{5.36}$$

onde a Eq. (5.33) foi usada para relacionar Ω_C com P_0. Pode-se observar que o valor de pico do ganho é independente do parâmetro de *GVD* (β_2) e cresce linearmente com a potência.

De acordo com a Referência [7] e uma referência lá citada, o ganho de Instabilidade Modulacional é afetado pela perda da fibra α, que foi desprezada na Eq. (5.26). A perda manifesta-se, sobretudo, como uma redução do ganho ao longo da fibra, devido à redução de potência.

5.2.3.2 – SIMULAÇÕES DA *MI* E *SPM*.

Conforme foi visto na descrição da Instabilidade Modulacional, este efeito advém da interação entre a linearidade *SPM* e a *GVD*. Nessa seção, confirma-se, através de simulações, esse aspecto. Para realizar as simulações, resolveu-se a Eq. (5.26), numericamente, utilizando a plataforma computacional *VPI* (*VPI transmission Maker & VPI component Maker 4.0*). As duas simulações seguintes buscam reproduzir os resultados da Referência [53].

Na primeira simulação, considerou-se uma fibra *ST*, operando na região de 1550 nm, portanto no regime anômalo. Essa apresenta, na janela de transmissão em questão, os seguintes parâmetros: A_{eff} = 80 μm^2, D = 16 ps/nm·km, γ= 1,31 W^{-1}km^{-1} [35] e o pulso incidente com: P_0 = 900 mW e T_{FWHM} = 100 ps.

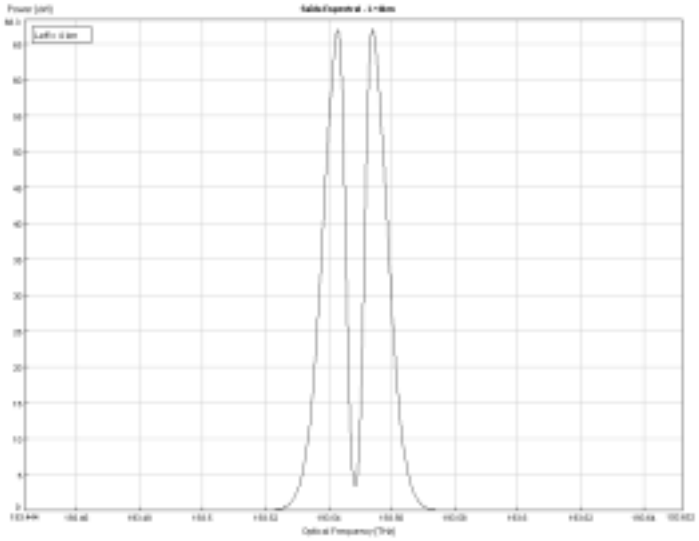


Figura 5.17: *Espectro na saída da fibra ST com dois picos de oscilação. Com L = 4 km, o efeito da MI não é significativo, pois L << L_D e L > L_{NL}*

Com os dados anteriores tem-se: $L_{NL} \approx 850$ m e $L_D \approx 180$ km. Para os valores de L considerados nas Figuras 5.17 e 5.18, $L << L_D$ e $L > L_{NL}$. Esses comprimentos são insuficientes para que a *MI* torne-se pronunciável, pois apenas o efeito de *SPM* é visto.

Os resultados são idênticos àqueles vistos na Figura 5.6. Isto é, no caso da Figura 5.17, $L = 4$ km e da Eq. (5.12), resulta em $\phi_{max} = 1{,}5\ \pi$ e da Eq. (5.16), resulta em $M = 2$, portanto uma estrutura com dois picos. Seguindo o mesmo procedimento de cálculo, na Figura 5.18 é observada uma estrutura oscilatória com 3 picos.

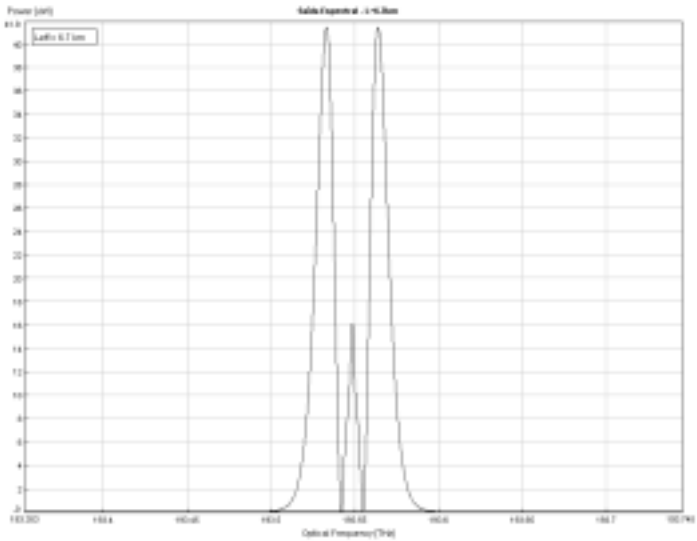


Figura 5.18: *Espectro na saída da fibra ST com três picos de oscilação. Com L = 6.7 km, onde o efeito da MI não esta presente, $L << L_D$ e $L > L_{NL}$*

Na simulação seguinte, considerou-se os mesmos parâmetros da fibra, da primeira simulação, e alterou-se o pulso de entrada para $T_{FWHM} = 10$ ps. Com esse dados, tem-se: $L_D \approx 4{,}9$ km e o valor de L_{NL} continua sendo $L_{NL} \approx 850$ m. Para os valores de L mostrados na Figura 5.19 e Figura 5.20, $L > L_D$ e $L > L_{NL}$ e, desta forma, ocorre a ação de ambos os fenômenos: dispersão e não-linearidade, acarretando a presença da *MI*. Pode-se constatar que ocorre o surgimento de novas componentes espectrais, ou oscilações, nas extremidades do pulso, além daquelas esperadas com a presença da *SPM* pura.

No caso da Figura 5.19, com $L = 9{,}3$ km e da Eq. (5.12), resulta em $\phi_{max} = 3{,}5\ \pi$ e, da Eq. (5.16), $M = 4$; portanto, uma estrutura oscilatória de quatro picos é espe-

rada, no caso da presença única de *SPM*. A presença de uma estrutura oscilatória com maior número de picos confirma a presença da *MI*.

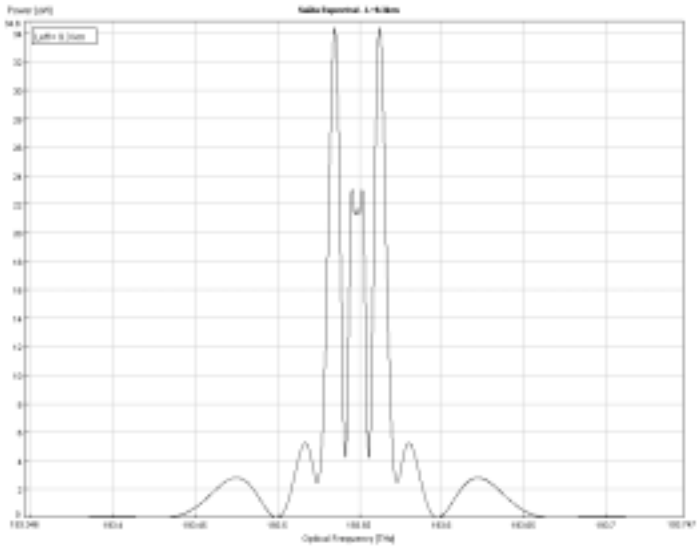


Figura 5.19: *Espectro na saída da fibra ST, com quatro picos de oscilação. Com L = 9,3 km e* T_{FWHM} *= 10 ps, o efeito da MI está presente, pois o* $L > L_D$ *e* $L > L_{NL}$

Seguindo o mesmo procedimento de cálculo relatado para a Figura 5.19, conclui-se que para a Figura 5.20, é esperada uma estrutura oscilatória com cinco picos. Os picos adicionais presentes foram gerados a partir da *MI*.

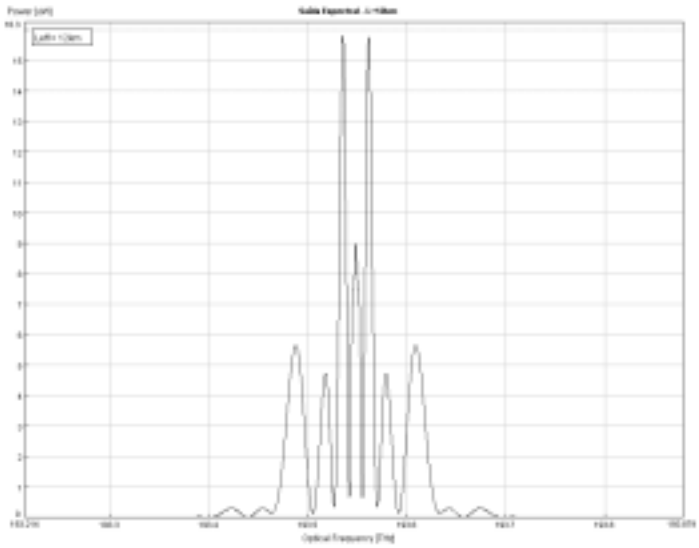


Figura 5.20: *Espectro na saída da fibra ST com cinco picos de oscilação. Com L = 12 km e* T_{FWHM} *= 10 ps, o efeito da MI está presente, pois* $L > L_D$ *e* $L > L_{NL}$

Capítulo 6

MODULAÇÃO DE FASE CRUZADA.

6.1 – Introdução.

A transmissão simultânea de múltiplos comprimentos de onda sobre uma fibra óptica, em um sistema *WDM*, dá origem a efeitos não-lineares entre canais, tais como: Mistura de Quatro Ondas (*FWM*) e a Modulação de Fase Cruzada (*XPM*). A *XPM* é um efeito no qual a fase do sinal óptico, de cada canal, é modulado pela potência dos outros canais. Certamente, a fase do sinal é também modulada pela sua própria potência, isto é, o fenômeno de Automodulação de Fase ocorre simultaneamente, em sistemas de múltiplos canais [7], [13], [21], [55] até [59]. Portanto, a ocorrência do fenômeno *XPM* se deve ao fato de que o índice de refração efetivo, visto por um feixe óptico em um meio não-linear, depende da sua própria intensidade, bem como da intensidade de outros feixes existentes na fibra.

6.2 – Surgimento da *XPM*.

Considera-se o caso no qual os dois pulsos ópticos, com diferentes comprimentos de onda, apresentam a polarização do campo elétrico ao longo do eixo x. As-

sumindo, ainda, uma aproximação de portadora quase monocromática, pode-se escrever o campo elétrico na forma:

$$\vec{E}(r,t) = \frac{1}{2}\hat{x}\{[E_1 exp(-i\omega_1 t) + E_2 exp(-i\omega_2 t)] + c.c..\} \tag{6.1}$$

onde: $\hat{x}$ é o vetor unitário na direção da polarização, ω_1 e ω_2 são as freqüências das portadoras dos dois pulsos e E_1, E_2 são os pulsos modulando as portadoras com freqüências ω_1 e ω_2, respectivamente. Assumindo-se que a largura espectral de cada pulso satisfaz a condição: $\Delta\omega_j << \omega_j$ (j = 1, 2), hipótese essa aplicável para pulsos da ordem de picosegundos, tem-se as funções temporais dos pulsos variando suavemente em relação ao período óptico da portadora. Esta variação suave pode ser comprovada, como segue. Considerando a portadora com λ = 1550 nm, então:

$$\omega_0 = \frac{2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 10^8}{1550 \cdot 10^{-9}} = 1.2 \cdot 10^{15} \text{ rad/s.}$$

Para pulsos com duração temporal ΔT = 0,1 ps, então:

$\Delta\omega\,\Delta T = 1 \Rightarrow \Delta\omega = \dfrac{1}{0{,}1 \cdot 10^{-12}} = 10^{13} \Rightarrow \dfrac{\Delta\omega}{\omega_0} = \dfrac{10^{13}}{1{,}2 \cdot 10^{15}} \approx 0{,}01 << 1$, que verifica a condição anterior. Nesse caso, o número de ciclos da portadora dentro da envoltória gaussiana, será:

$$\frac{\Delta T}{T_0} \cong 20 \text{ ciclos.}$$

As amplitudes E_1 e E_2 variam lentamente, sendo governadas pela equação de propagação do pulso, Eq. (2.30), com as partes lineares e não-lineares, das polarizações induzidas, dadas pelas Eqs. (2.35) e (2.37).

Para demonstrar a origem da *XPM*, substitui-se a Eq. (6.1) na Eq. (2.37):

$$\vec{P}_{NL}(\vec{r},t) = \varepsilon_0 \chi^{(3)} \hat{x} \left\{ \frac{1}{2}\left[E_1 e^{(-j\omega_1 t)} + E_2 e^{(-j\omega_2 t)}\right] + c.c \right\}^3$$

Definindo-se A e B, campos complexos, como:

$$A = E_1 e^{(-j\omega_1 t)} + E_2 e^{(-j\omega_2 t)} \text{ e } B = E_1^* e^{(j\omega_1 t)} + E_2^* e^{(j\omega_2 t)}$$

onde: E_1^* e E_2^* são os complexos conjugados de E_1 e E_2, respectivamente, tem-se:

$$\vec{P}_{NL}(\vec{r},t) = \varepsilon_0 \chi^{(3)} \hat{x} \left[\frac{1}{8} (A+B)^3 \right]. \tag{6.2}$$

No Anexo C apresenta-se o desenvolvimento da expansão binomial da Eq. (6.2). A partir do resultado lá obtido, pode-se escrever a componente não-linear da polarização na forma:

$$\begin{aligned} P_{NL}(r,t) = \frac{1}{2} \hat{x} \{ & P_{NL}(\omega_1) exp(-i\omega_1 t) + P_{NL}(\omega_2) exp(-i\omega_2 t) \\ & + P_{NL}(2\omega_1 - \omega_2) exp[-i(2\omega_1 - \omega_2)t] \\ & + P_{NL}(2\omega_2 - \omega_1) exp[-i(2\omega_2 - \omega_1 t]\}. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Sabendo que $\chi_{eff} = (3\varepsilon_0/4)\chi^{(3)}_{xxxx}$, de acordo com a equação definida acima da Eq. (2.38), obtêm-se os quatro termos dependentes de E_1 e E_2:

$$P_{NL}(\omega_1) = \chi_{eff} \left(|E_1|^2 + 2|E_2|^2 \right) E_1 \tag{6.4}$$

$$P_{NL}(\omega_2) = \chi_{eff} \left(|E_2|^2 + 2|E_1|^2 \right) E_2 \tag{6.5}$$

$$P_{NL}(2\omega_1 - \omega_2) = \chi_{eff} E_1^2 E_2^* \tag{6.6}$$

$$P_{NL}(2\omega_2 - \omega_1) = \chi_{eff} E_2^2 E_1^* \tag{6.7}$$

O termo χ_{eff} representa o parâmetro não-linear efetivo e, de acordo com o modelo adotado no Capítulo 2, este é independente da freqüência. Isso ocorre devido ao fato de que, nesse trabalho, assume-se que a dispersão está contida apenas na parte linear do índice de refração. Na Eq. (6.3), a polarização não-linear induzida apresenta termos oscilando nas freqüências $2\omega_1 - \omega_2$ e $2\omega_2 - \omega_1$, devidos ao efeito da Mistura de Quatro Ondas (*FWM*), já mencionado no Capítulo 4. Sabe-se, ainda, que a *FWM* só será significativa se a condição de casamento de fase entre os campos

aplicados e as polarizações que serão geradas por estes, for atendida. Para estudar os efeitos da *XPM* isoladamente, assume-se, neste capítulo, que esta condição de casamento de fase não é satisfeita e, portanto, os termos da *FWM* podem ser desprezados. Deste modo, desconsideram-se os termos em P_{NL}, dados pelas Eqs. (6.6) e (6.7). Os dois termos restantes fornecem a contribuição não-linear do índice de refração, de tal modo que se pode reescrever as Eqs. (6.4) e (6.5), de $P_{NL}(\omega_j)$, considerando-se a Eq. (2.39):

$$P_{NL}(\omega_j) = \varepsilon_0 \varepsilon_j^{NL} E_j \quad , j = 1, 2, \tag{6.8}$$

onde, de acordo com a Eq. (2.38), tem-se:

$$\varepsilon_j^{NL} = \frac{3\chi_{xxxx}^{(3)}}{4}\left(\left|E_j\right|^2 + \sum_{k \neq j} 2 \cdot \left|E_k\right|^2 \right), j = 1, 2;\ k = 1,2;\ j \neq k.$$

e o campo total está de acordo com as Eqs. (6.4) e (6.5).

Combinando a parte linear com a parte não-linear, a polarização total induzida pode ser representada por:

$$P(\omega_j) = \varepsilon_0 \varepsilon_j E_j \,, \tag{6.9}$$

onde, de acordo com a Eq. (2.46):

$$\varepsilon_j = \varepsilon_j^L + \varepsilon_j^{NL} = (n_j^L + \Delta n_j^{NL})^2 \,, \tag{6.10}$$

sendo: n_j^L a parte linear do índice de refração e Δn_j^{NL} a variação induzida pelos efeitos não-lineares de terceira ordem e, de acordo com a Eq. (2.47), tem-se:

$$\Delta n_j^{NL} = n_2\left(\left|E_j\right|^2 + 2\left|E_k\right|^2 \right) \tag{6.11}$$

A Eq. (6.11) mostra que o índice de refração relacionado com o campo óptico E_j, em uma fibra, depende não apenas da intensidade deste, mas, também, da intensidade do outro campo E_K, existente no guia. De acordo com a Eq. (5.28), o campo

óptico ao propagar-se pela fibra, adquire um deslocamento de fase dependente da intensidade que será dado por:

$$\phi_j^{NL}(z) = \frac{\omega_j z}{c} \Delta n_j^{NL} = \frac{\omega_j z \cdot n_2}{c} \left[\left| E_j \right|^2 + \sum_{K \neq j} 2 \left| E_k \right| \right]^2, \tag{6.12}$$

onde: $j = 1, 2$; $k = 1, 2$; $j \neq k$.

O primeiro termo da Eq. (6.12) é responsável pela *SPM* discutida no Capítulo 5, enquanto que o segundo termo resulta da modulação de fase de uma onda em outra co-propagante e, é responsável pela *XPM*. O fator 2 mostra que a *XPM* é duas vezes mais significativa que a *SPM*, para uma mesma intensidade do campo. Desta forma, pode-se dizer que a *XPM* é um efeito que pode causar mais limitações, quando comparada com a *SPM*, em sistemas de multiplexagem por comprimento de onda (*WDM*).

6.3 – Equações *NLS* Acopladas para dois Campos Co-Propagantes.

A Eq. (2.67) governa a propagação de um único pulso óptico na fibra. Para sua obtenção considerou-se a influência da potência do pulso de luz $|A_1|^2$ alterando o índice de refração do meio. No caso de dois campos co-propagando-se em uma fibra, de acordo com as Eqs. (6.4) e (6.5), o índice de refração visto pela portadora E_1 é modificado pelo termo $|A_1|^2 + 2|A_2|^2$ e o índice de refração visto pela portadora E_2 é modificado por $|A_2|^2 + 2|A_1|^2$. A partir dessas considerações, e seguindo as mesmas simplificações matemáticas adotadas no Capítulo 2, pode-se mostrar que a equação que governa a propagação do campo A_j, $j = 1, 2$, é dada por [7] e [57]:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial A_j}{\partial z} + \beta_{1j} \frac{\partial A_j}{\partial t} + \frac{j\beta_{2j}}{2} \frac{\partial^2 A_j}{\partial t^2} + \frac{\alpha_j}{2} A_j = \\ &jn_2 \left(\frac{\omega_j}{c} \right) \left[f_{jj} \left| A_j \right|^2 + 2 f_{jk} \left| A_k \right|^2 \right], \end{aligned} \tag{6.13}$$

onde: j = 1, 2; k = 1,2; $j \neq k$, $\beta_{1j} = 1/v_{gj}$, v_{gj} é a velocidade de grupo do campo com freqüência ω_j, β_{2j} é o coeficiente da *GVD* na freqüência ω_j e α_j é o coeficiente de perdas na freqüência ω_j, e:

$$f_{jk} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left|F_j(x,y)\right|^2 \left|F_K(x,y)\right|^2 dxdy}{\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left|F_j(x,y)\right|^2 dxdy\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left|F_K(x,y)\right|^2 dxdy\right)} \tag{6.14}$$

sendo $F_j(x,y)$ a distribuição transversal dos modos da fibra, para as componentes do campo ($j = 1, 2$) e $A_j(z,t)$ é a amplitude de variação suave. Os efeitos dispersivos foram incluídos pela expansão da constante de propagação $\beta_j(\omega)$ em função da freqüência, seguindo procedimento análogo à Eq. (2.60).

As variáveis, f_{11}, f_{22}, e f_{12}, conforme visto no Capítulo 2, relacionam-se com a área efetiva da fibra, e nesse trabalho considera-se desprezível a diferença entre as distribuições do modo fundamental, para os campos co-propagantes. Assim, pode-se escrever as seguintes equações *NLS* acopladas [7] e [57]:

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{1}{v_{g1}}\frac{\partial A_1}{\partial t} + \frac{j\beta_{21}}{2}\frac{\partial^2 A_1}{\partial t^2} + \frac{\alpha_1}{2}A_1 = j\gamma_1\left[\left|A_1\right|^2 + 2\left|A_2\right|^2\right]A_1 \tag{6.15}$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \frac{1}{v_{g2}}\frac{\partial A_2}{\partial t} + \frac{j\beta_{22}}{2}\frac{\partial^2 A_2}{\partial t^2} + \frac{\alpha_2}{2}A_2 = j\gamma_2\left[\left|A_2\right|^2 + 2\left|A_1\right|^2\right]A_2\,, \tag{6.16}$$

onde o parâmetro não-linear γ_j, $j = 1, 2$, é definido como:

$$\gamma_j = \frac{n_2\omega_j}{cA_{eff}} \tag{6.17}$$

e a área efetiva do núcleo $A_{eff} = 1 / f_{11}$, sendo a mesma para ambas as ondas ópticas. Tipicamente, A_{eff} = 50 μm^2 na janela de 1,55 μm para fibra de dispersão deslocada (*DS*) [36], e A_{eff} = 80 μm^2 para fibra padrão *ST* [35].

6.4 – Solução das Equações Acopladas *NLS*.

Nesta seção estuda-se as mudanças temporais e espectrais que ocorrem devido à interação da *XPM* entre dois pulsos co-propagantes que apresentam comprimentos de onda diferentes. Para simplificar nosso entendimento, considera-se os efeitos da polarização desprezíveis, assumindo-se que os feixes de entrada mantêm sua polarização durante a propagação. As Eqs. (6.15) e (6.16), então, governam a evolução dos dois pulsos ao longo do comprimento da fibra e incluem os efeitos de descasamento da velocidade de grupo, dispersão da velocidade de grupo (*GVD*), Automodulação de Fase (*SPM*) e Modulação de Fase Cruzada (*XPM*). Considerando-se as perdas na fibra desprezíveis, estas equações se transformam no sistema:

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{j\beta_{21}}{2}\frac{\partial^2 A_1}{\partial T^2} = j\gamma_1\left[|A_1|^2 + 2|A_2|^2\right]A_1 \tag{6.18}$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + d\frac{\partial A_2}{\partial T} + \frac{j\beta_{22}}{2}\frac{\partial^2 A_2}{\partial T^2} = j\gamma_2\left[|A_2|^2 + 2|A_1|^2\right]A_2\,, \tag{6.19}$$

onde:

$$T = t - \frac{z}{v_{g1}} \qquad \text{e} \qquad d = \frac{v_{g1} - v_{g2}}{v_{g1}\cdot v_{g2}}\,, \tag{6.20}$$

sendo o tempo T medido em um sistema de referência movendo-se com o pulso viajando com velocidade v_{g1}. O parâmetro d é uma medida do descasamento da velocidade de grupo entre os dois pulsos. Estes dois pulsos podem apresentar larguras diferentes. Pode-se utilizar a largura T_0, do primeiro pulso no comprimento de onda λ_1, como referência, para definir o comprimento de dispersão L_D como:

$$L_D = \frac{T_0^2}{|\beta_{21}|} \tag{6.21}$$

e o comprimento de interação (*walk-off*), cujo conceito já foi introduzido no Capítulo 4 (ver a Figura 4.1), é matematicamente definido por:

$$L_W = \frac{T_0}{|d|}. \tag{6.22}$$

Em função das magnitudes relativas de L_W e L_D e do comprimento da fibra, L, os dois pulsos podem evoluir de forma bastante diferente.

Se o comprimento da fibra L for pequeno em relação aos comprimentos L_W e L_D, isso é $L_W >> L$ e $L_D >> L$, os efeitos da dispersão e da não-linearidade podem ser desprezados.

Se $L_W < L$ e $L_D >> L$, os termos com β_{21} e β_{22}, nas Eqs. (6.18) e (6.19), respectivamente, podem ser desprezados. Nesse caso, como o efeito da *GVD* foi desprezado, a forma temporal do pulso não sofre alteração. A equação resultante é análoga à Eq. (5.8) e o *chirp* de freqüência induzido pela não-linearidade afeta o espectro do pulso. Nesse caso, o pulso fica com *chirp* pela ação conjunta dos efeitos de *SPM* e de *XPM*.

Outra situação possível é $L_W \approx L$ e $L_D \approx L$, ou seja, o caso em que o comprimento de fibra é comparável a L_W e a L_D. Neste caso, os termos da *GVD* (β_{21} e β_{22}) devem ser mantidos nas Eqs. (6.18) e (6.19), respectivamente, e tanto a forma temporal como o espectro do pulso, serão alterados.

6.4.1 – SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES ACOPLADAS *NLS* PARA UM MEIO NÃO-DISPERSIVO.

Considera-se o caso onde $L_D >> L$ e, portanto, os termos da derivada de segunda ordem, nas Eqs. (6.18) e (6.19), podem ser desprezados. O descasamento de velocidade de grupo é incluído através do parâmetro d, assumindo $L_W < L$. Segue-se um procedimento análogo ao proposto para a solução da Eq. (5.8), a qual governa a propagação de um pulso, em um meio sem *GVD*, porém não-linear. Para esse caso, a forma temporal do pulso é mantida e o mesmo adquire uma variação de fase não-linear e, portanto, soluções gerais do tipo [7] e [57]:

$$A_1(L,T) = A_1(0,T) \cdot e^{j\phi_1} \tag{6.23}$$

$$A_2(L,T) = A_2(0,T - dL) \cdot e^{j\phi_2} \tag{6.24}$$

são apropriadas.

Nas Eqs. (6.23) e (6.24), os deslocamentos de fase não-linear, dependentes do tempo, são:

$$\phi_1(T) = \gamma_1 \left(L\left|A_1(0,T)\right|^2 + 2\int_0^L \left|A_2(0,T - zd)\right|^2 dz \right) \tag{6.25}$$

$$\phi_2(T) = \gamma_2 \left(L\left|A_2(0,T)\right|^2 + 2\int_0^L \left|A_1(0,T + zd)\right|^2 dz \right). \tag{6.26}$$

Como cada campo efetivo visto depende de sua própria potência e da potência do canal adjacente, a variação de fase também terá essa dependência.

O primeiro termo, nas Eqs. (6.25) e (6.26), é devido à *SPM*, enquanto que, o segundo, tem a sua origem na *XPM*. Sua contribuição varia ao longo do comprimento da fibra, devido ao descasamento na velocidade de grupo. A contribuição total da *XPM*, para a fase, é obtida pela integração sobre o comprimento da fibra. A integração pode ser realizada para algumas formas especificas de pulso. Considera-se o caso de dois pulsos gaussianos sem *chirp*, de mesma largura T_0 e, com amplitudes iniciais:

$$A_1(0,T) = \sqrt{P_1}\, exp\left(-\frac{T^2}{2T_0^2} \right) \tag{6.27}$$

$$A_2(0,T) = \sqrt{P_2}\, exp\left(-\frac{(T - T_d)^2}{2T_0^2} \right), \tag{6.28}$$

onde: P_1 e P_2 são as potências de pico e T_d é o atraso de tempo inicial entre os dois pulsos. Substituindo as Eqs. (6.27) e (6.28) na (6.25) e considerando-se as seguintes normalizações:

$$\tau = \frac{T}{T_0} \qquad \tau_d = \frac{T_d}{T_0} \qquad \delta = \frac{dL}{T_0}, \tag{6.29}$$

desta forma, ϕ_1 é obtido como segue-se.

Considera-se inicialmente:

$$\left|A_1(0,\tau)\right| = A_1(0,\tau)\cdot A_1(0,\tau)^* = \left(\sqrt{P_1}e^{-\tau^2/2}\right)\left(\sqrt{P_1}e^{-\tau^2/2}\right) = P_1 e^{-\tau^2}$$

e:

$$\left|A_2(0,\tau)\right| = \sqrt{P_2}e^{-(\tau-\tau_d)^2/2}$$

$$A_2\left(0,\tau - \frac{z}{L_W}\right) = \sqrt{P_2}e^{-\left(\tau-\frac{z}{L_W}-\tau_d\right)^2/2} \Rightarrow \left|A_2\left(0,\tau-\frac{z}{L_W}\right)\right| = P_2 e^{-\left(\tau-\frac{z}{L_W}-\tau_d\right)^2}.$$

A partir destes resultados e substituindo-se na Eq. (6.25), tem-se:

$$\phi_1(\tau) = \gamma_1 L\left[P_1 e^{-\tau^2} + \frac{2}{L}\int_0^L P_2 e^{-\left(\tau-\frac{z}{L_W}-\tau_d\right)^2} dz\right].$$

Denota-se: $\omega = \tau - \frac{z}{L_W} - \tau_d \Rightarrow \frac{\partial\omega}{\partial z} = -\frac{1}{L_W} \therefore \partial z = -L_w \partial\omega$. Assumindo-se as condições: $z = 0, \omega = \tau - \tau_d$ e $z = L,\ \omega = \tau - \frac{L}{L_w} - \tau_d$, e usando a relação da página 183 da Referência [19], segue-se:

$$\phi_1(\tau) = \gamma_1 P_1 L e^{-\tau^2} - 2P_2\gamma_1\left[\int_{\tau-\tau_d}^{\tau-\tau_d-\frac{L}{L_W}} e^{-\omega^2}\left(L_W d\omega\right)\right].$$

Através da Referência [19], obtém-se, finalmente:

$$\phi_1(\tau) = \gamma_1 P_1 L e^{-\tau^2} - 2P_2\gamma_1 L_W \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[erf\left(\tau - \tau_d - \frac{L}{L_W}\right) - erf\left(\tau - \tau_d\right)\right].$$

Usando-se a Eq. (6.22) e a normalização: $\delta = \frac{dL}{T_0}$, tem-se que: $\delta = \frac{L}{L_W}$; logo:

$$\phi_1(\tau) = \gamma_1 L\left\{P_1 e^{-\tau^2} + P_2 \frac{\sqrt{\pi}}{\delta}\left[erf(\tau - \tau_d) - erf(\tau - \tau_d - \delta)\right]\right\}, \qquad (6.30)$$

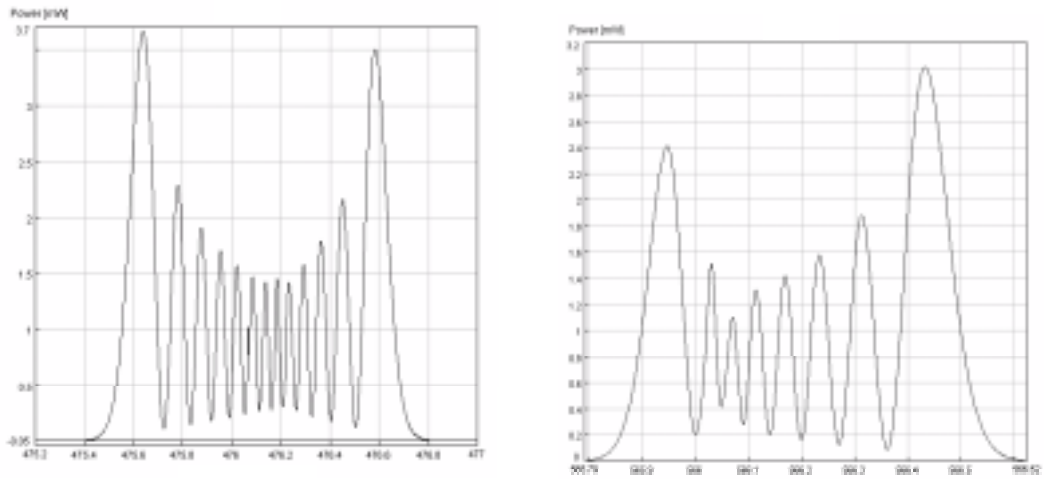
onde *erf (x)* representa a Função Erro [19]. Uma expressão similar, para ϕ_2 *(T)*, pode ser obtida de forma análoga.

6.4.1.1 – ALARGAMENTO ESPECTRAL ASSIMÉTRICO.

Com o objetivo de observar a variação espectral causada pela *XPM* foi feita uma simulação na plataforma computacional *VPI*, a qual está descrita nas Referências [7] e [57].

Nessa simulação, considerou-se dois pulsos gaussianos com largura temporal inicial T_{FWHM} = 16,5 ps. Um dos pulsos tem potência de pico de 50 W (*pulso fraco*), comprimento de onda central em 530 nm e, o outro, tem potência de pico duas vezes maior (*pulso forte*) e opera com comprimento de onda central em 630 nm. Os pulsos entram na fibra, ao mesmo tempo, isto é, $\tau_d = 0$. Os parâmetros da fibra nessa região de operação, são tais que resultam num comprimento de interação (*walk-off*), L_W = 1 m e comprimento de dispersão, $L_D \approx 6$ km. Os parâmetros da fibra satisfazem, ainda, as relações: $\gamma_1 P_1 L = 40$, $\gamma_2/\gamma_1 = 1{,}2$ e $\delta = 5$, [7] e [57]. A Figura 6.1 mostra as características espectrais dos pulsos, após os mesmos propagarem por uma distância L = 5 m. Nessas condições $L_D >> L$ e $L_W \approx L$ e, portanto, os efeitos dispersivos são desprezíveis.

Conforme descrito pela teoria, a simulação confirma a assimetria espectral que é devida à *XPM*. Na ausência da interação da *XPM*, isto é, se os pulsos sofressem somente a ação da *SPM*, os dois espectros seriam simétricos e exibiriam menos alargamento.



(a) (b)

Figura 6.1: *Espectro óptico dos pulsos se co-propagando sendo (a) pulso forte em 630 nm (f_0 = 476,19 THz) e (b) pulso fraco em 530 nm (f_0 =566,08 THz). Os espectros exibem um alargamento espectral assimétrico, induzido pela XPM*

Como o pulso com f_0 = 476,19 THz possui potência duas vezes maior do que o pulso na f_0 = 566,08 THz, o deslocamento de fase não-linear, induzido pelo primeiro no segundo, será mais acentuado, conforme descrito pelas Eqs. (6.18) e (6.19) e confirmado pela simulação da Figura 6.1.

6.4.1.2 – EFEITO DO ATRASO INICIAL ENTRE OS PULSOS CO-PROPAGANTES.

De acordo com o conceito de comprimento de interação (L_W), estudado no Capítulo 4, se os dois pulsos co-propagantes na fibra têm um atraso temporal entre si, isto é, se eles entram na fibra em tempos diferentes (parâmetro τ_d), isso causará uma mudança na interação entre eles.

Visando avaliar a influência de τ_d, confirma-se, a seguir, alguns resultados teóricos apresentados nas Referências [7], [57] e [58].

Como foi visto no Capítulo 5, a partir da Eq. (5.13), uma vez conhecido o deslocamento de fase não-linear, $\Delta\phi_{NL}$, pode-se conhecer a freqüência instantânea do pulso:

$$\delta\omega = -\frac{\partial \Delta\phi_{NL}}{\partial T} \qquad \text{ou} \qquad \delta f = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial \Delta\phi_{NL}}{\partial T}. \tag{6.31}$$

No caso de pulsos co-propagando-se e considerando-se, inicialmente, o pulso 1, onde o deslocamento de freqüência não-linear é dado pela expressão (6.30), tem-se:

$$\delta f(\tau)_1 = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial \Delta\phi_1}{\partial \tau}$$

$$\delta f_1(\tau) = -\frac{1}{2\pi T_0}\frac{\partial}{\partial \tau}\gamma_1 L\left\{P_1 e^{-\tau^2} + P_2\frac{\sqrt{\pi}}{\delta}\left[erf(\tau-\tau_d) - erf(\tau-\tau_d-\delta)\right]\right\} \Rightarrow$$

$$\delta f_1(\tau) = -\frac{1}{2\pi T_0}\frac{\partial}{\partial \tau}\gamma_1 P_1 L e^{-\tau^2} - \frac{1}{2\pi T_0}\gamma_1 P_2 L_W\sqrt{\pi}\frac{\partial}{\partial \tau}\left[erf(\tau-\tau_d) - erf(\tau-\tau_d-\delta)\right]$$

Usando-se a relação dada em [19], tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left[erf(\tau-\tau_d)\right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[e^{-(\tau-\tau_d)^2} - 1\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left[erf(\tau-\tau_d-\delta)\right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[e^{-(\tau-\tau_d-\delta)^2} - 1\right].$$

Fazendo-se as substituições das relações acima, tem-se:

$$\delta f_1(\tau) = -\frac{1}{2\pi T_0}\gamma_1 P_1 L(-2\tau)e^{-\tau^2} - \frac{1}{2\pi T_0}\gamma_1 P_2 L_W\sqrt{\pi}\frac{2}{\sqrt{\pi}}$$
$$\left[e^{-(\tau-\tau_d)^2} - 1 - e^{-(\tau-\tau_d-\delta)^2} + 1\right].$$

Após algumas simplificações, pode-se reescrever a equação na forma:

$$\delta f_1(\tau) = \frac{\gamma_1}{\pi T_0}\left\{P_1 L\tau e^{-\tau^2} - P_2 L_W e^{-(\tau-\tau_d)^2} + P_2 L_W e^{-(\tau-\tau_d-\delta)^2}\right\} \Rightarrow$$

$$\delta f_1(\tau) = \frac{\gamma_1 L}{\pi T_0}\left\{ P_1 \tau e^{-\tau^2} - \frac{P_2}{\delta}\left(e^{-(\tau-\tau_d)^2} + e^{-(\tau-\tau_d-\delta)^2} \right)\right\}. \tag{6.32}$$

Para verificar o efeito isolado da *XPM*, isto é, sem a influência da *SPM*, considera-se a configuração *pump/probe*, ou pulsos de bombeio e de prova. Deste modo, tem-se que a potência de um dos pulsos co-propagantes é bem maior, pulso de bombeio (*pump*), do que a potência do outro, pulso de prova (*probe*). Com esta consideração, tem-se que o deslocamento de fase auto-induzido no pulso de prova pode ser desprezado, pois o deslocamento de fase induzido pela *XPM*, a partir do pulso de bombeio, é bem maior. Matematicamente, isso significa desprezar o termo que contém P_1, na Eq. (6.32). Dessa forma, tem-se:

$$\delta f_1(P_2) = \Delta f_{max}(sgn\,\delta)\left\{ e^{-(\tau-\tau_d)^2} - e^{-(\tau-\tau_d-\delta)^2} \right\}, \tag{6.33}$$

onde:

$$\Delta f_{max}(P_2) = \frac{\gamma_1 P_2 L}{\pi T_0 |\delta|} = \frac{\gamma_1 P_2}{\pi}\frac{L_W}{T_0} \tag{6.34}$$

Comparando-se a Eq. (6.34) com a Eq. (5.12) ($\phi_{max} = \gamma P_0 L_{eff}$) , pode-se verificar que o *chirp*, causado pela *SPM*, gera novas componentes espectrais à medida que o pulso se propaga. Portanto quanto maior for o comprimento da fibra, L, maior o alargamento espectral, veja a Figura 5.6. No caso da *XPM*, a Eq. (6.34) mostra que o alargamento espectral depende de L_W e, não, de L. Em ambas as análises, considerou-se $\alpha = 0$, isto é, a fibra sem atenuação. Reescrevendo a Eq. (6.34) em termos do parâmetro $\Delta\lambda_{max}$, isto é, da variação do comprimento de onda induzido pelo *chirp*, tem-se:

$$\Delta\lambda_{max}(P_2) = -\frac{\lambda^2 \gamma_1 P_2 L_W}{c\pi T_0}. \tag{6.35}$$

A partir das Eqs. (6.33) e (6.35), conclui-se que o *chirp* induzido pela *XPM* depende dos parâmetros da fibra (γ_1, L_W, δ) e do pulso (P_2, T_0 e τ_d). Analisa-se, agora, a dependência do *chirp* com τ_d e P_2. Sabendo-se que:

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{c}{f_2} - \frac{c}{f_1} \cong \frac{f_1 - f_2}{f_2^2} c \Rightarrow$$

$$\Delta\lambda = \frac{-c \cdot \Delta f}{f_2^2} = \frac{-\lambda^2 \Delta f}{c},$$

substituindo-se a Eq. (6.35) na relação anterior, e considerando-se as normalizações dadas pela Eq. (6.29), tem-se:

$$\Delta\lambda_1(\tau_d, P_2) = -\frac{\lambda^2 \gamma_1 P_2 L_W}{c\pi T_0}\left\{e^{-(\tau-\tau_d)^2} - e^{-(\tau-\tau_d-\delta)^2}\right\}. \tag{6.36}$$

A curva da Figura 6.2, gerada a partir da Eq. (6.36), mostra a dependência de $\Delta\lambda_1$ com τ_d. Nessa solução, tem-se os seguintes parâmetros: T_0 = 10 ps, P_2 = 200 mW e λ = 1535 nm, γ_1 = 1,91 x 10^{-3} W^{-1} km^{-1}, δ = - 4; a distância propagada foi de L = 177,6 km.

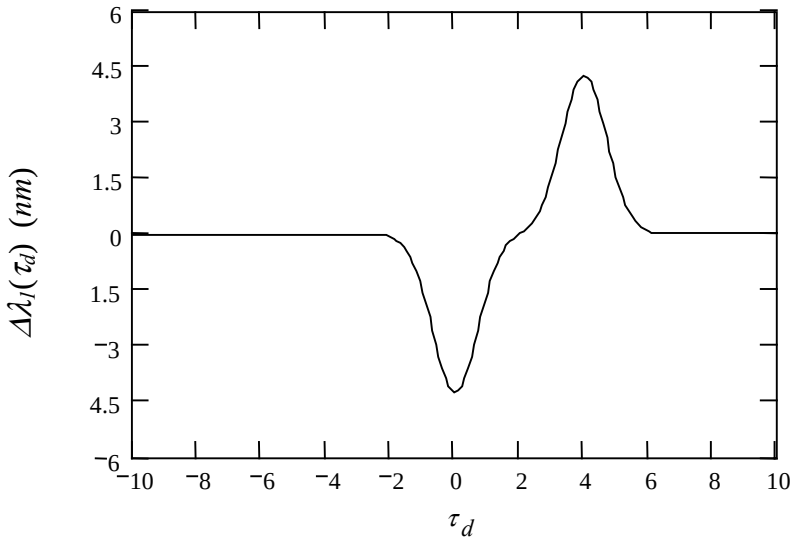
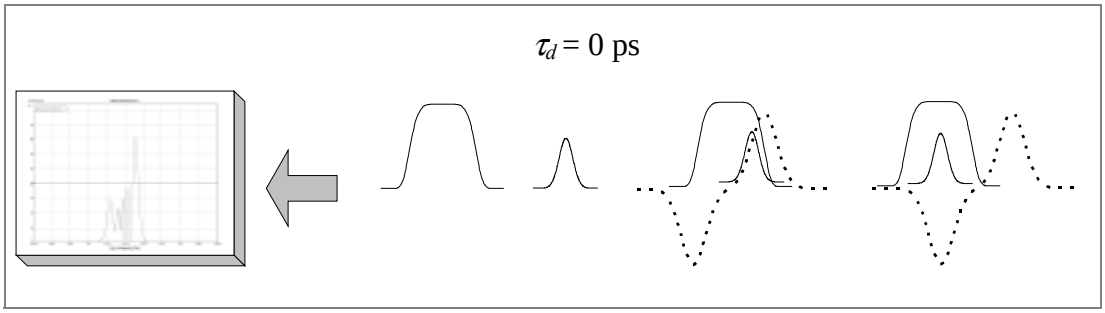


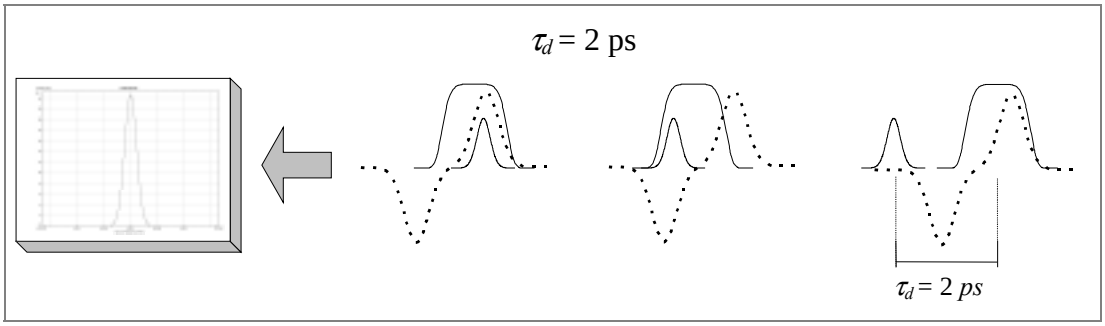
Figura 6.2: *Deslocamento de comprimento de onda induzido pela XPM, em função do atraso inicial normalizado entre os pulsos*

A Figura 6.2 mostra que para τ_d = 0 e τ_d = 4, ocorre os deslocamentos máximos de comprimento de onda e, para τ_d = 2, não ocorre o *chirp*. Considerando-se a normalização $\tau_d = T_d / T_0$, nesse caso com T_0 = 10 ps, os valores τ_d = 0, 2 e 4 correspondem, respectivamente, a T_d = 0, 20 e 40 ps em termos de tempo real.

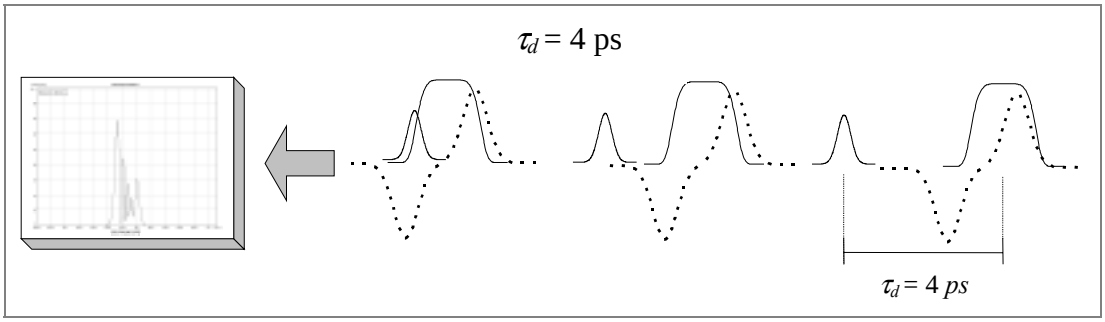
A Figura 6.3 mostra, esquematicamente, a relação entre os *chirps* induzidos e o tempo de atraso normalizado entre os pulsos, τ_d, conforme previsto pela Figura 6.2.



(a)



(b)



(c)

Figura 6.3: *Esquemático da propagação (sentido da direita para esquerda) dos pulsos de bombeio: super-gaussiano, m = 3 (amplitude maior), de prova: gaussiano, m= 1 (amplitude menor) . E do deslocamento de comprimento de onda induzido pela XPM (linha pontilhada). São considerados os seguintes atrasos entre os pulsos: (a)* $\tau_d = 0$*, (b)* $\tau_d = 2$ *e (a)* $\tau_d = 4$

De acordo com a Eq. (6.35) o deslocamento máximo (*chirp*) cresce linearmente com a potência do pulso de prova (P_2) . A curva da Figura 6.4 mostra esse comportamento. Ela foi obtida considerando-se $\tau_d = 0$. Pode-se observar que, para P_2 = 200 mW, ocorrerá um $\Delta\lambda_{max} \approx 4{,}25$ nm, que está de acordo com a Figura 6.2.

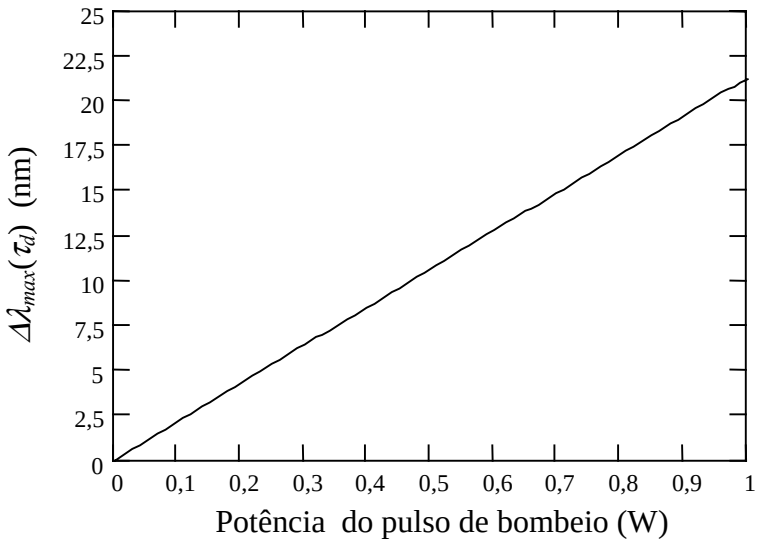


Figura 6.4: *Deslocamento de comprimento de onda induzido no pulso de prova, em função da potência do pulso co-propagante, pulso de bombeio. Considera-se que os pulsos entram na fibra no mesmo momento ($\tau_d = 0$)*

Com foi visto, anteriormente, que o *chirp* induzido tem uma dependência com o valor de δ, sendo $\delta = L\ d\ /\ T_0$, sendo $d = (vg_1 - vg_2)\ /\ (vg_1 \bullet vg_2)$, onde vg_1 e vg_2 são as velocidades de grupo dos pulsos de bombeio e prova, respectivamente. O comportamento mostrado nas Figura 6.3 (b) e (c) poderá ocorrer, mesmo que $\tau_d = 0$, pois, dependendo da relação entre vg_1 e vg_2, os pulsos poderão ter diferentes valores de L_W.

As Figuras 6.5, 6.6 e 6.7 mostram o resultado de simulações realizadas na plataforma computacional *VPI*. Esses são resultados do *chirp* induzido pela *XPM* em três pulsos, com comprimentos de onda centrados em: λ_1 = 1550 nm (193,55 THz), λ_2 = 1520 nm (197,37 THz) e λ_3 =1580 nm (189,87 THz). Neste caso P_1 = 200 mW, para o pulso em 1550 nm, e $P_2 = P_3$ = 10 mW para cada um dos outros dois pulsos; e T_0 = 10 ps para todos os pulsos. Os parâmetros da fibra são: n_2 = 2,45 x 10^{-20} m^2 / W, A_{eff} = 52 μm^2, D = - 0,0075 x 10^{-6} s/m^2, α = 0,2 dB/ km, S_0 = 0, considerados no comprimento de onda 1550 nm.

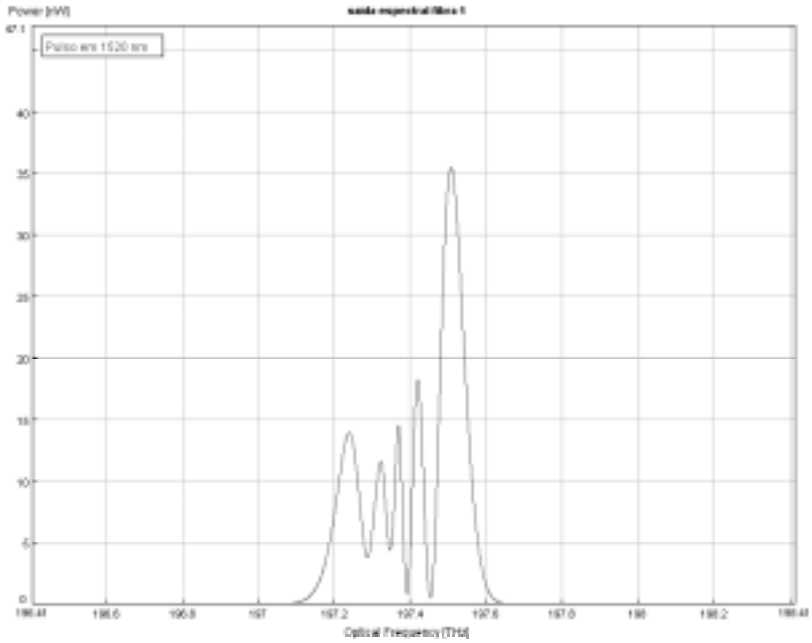


Figura 6.5: *Deslocamento de freqüência, induzido pela XPM, levando a portadora do pulso (197,37 THz) para as freqüências mais altas (chirp para o azul)*

As Figuras 6.5 e 6.6, mostram, respectivamente, as formas espectrais dos pulsos com: λ_2 = 1520 nm e λ_3 =1580 nm, após propagarem-se na fibra por uma distância L = 44 km ($\approx L_W$). O parâmetro d é positivo, na Figura 6.5, e negativo, na Figura 6.6, e dá deslocamentos opostos para as freqüências: deslocamento para o "azul" e para o "vermelho".

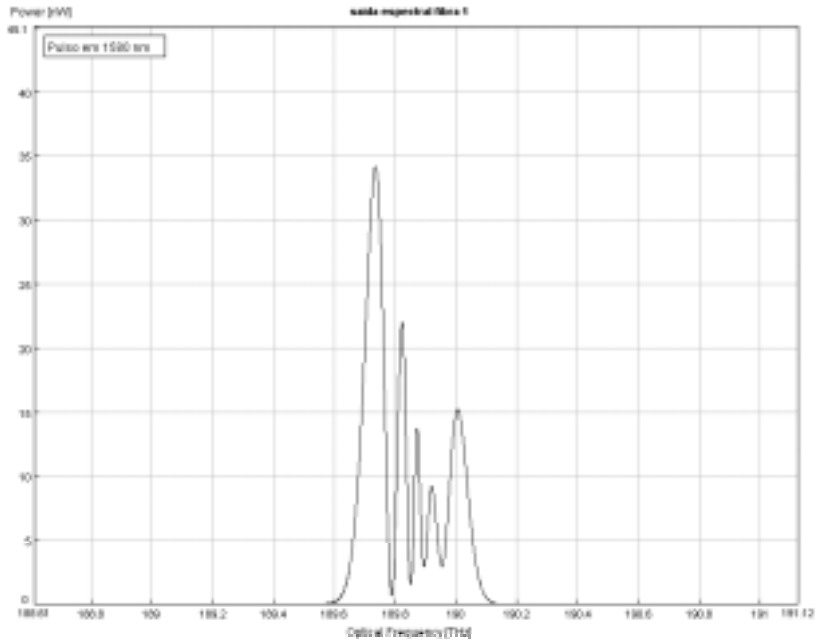


Figura 6.6: *Deslocamento de freqüência, induzido pela XPM, levando a portadora do pulso(189,87 THz) para as freqüências mais baixas (chirp para o vermelho)*

O pulso com λ_1 = 1550 nm, possui uma potência de entrada de P_1 = 200 mW, e portanto, $P_1 >> P_2$ e $P_1 >> P_3$, praticamente não sofre a ação da Modulação de Fase Cruzada e seu espectro, mostrado na Figura 6.7, é o resultado da Automodulação de Fase.

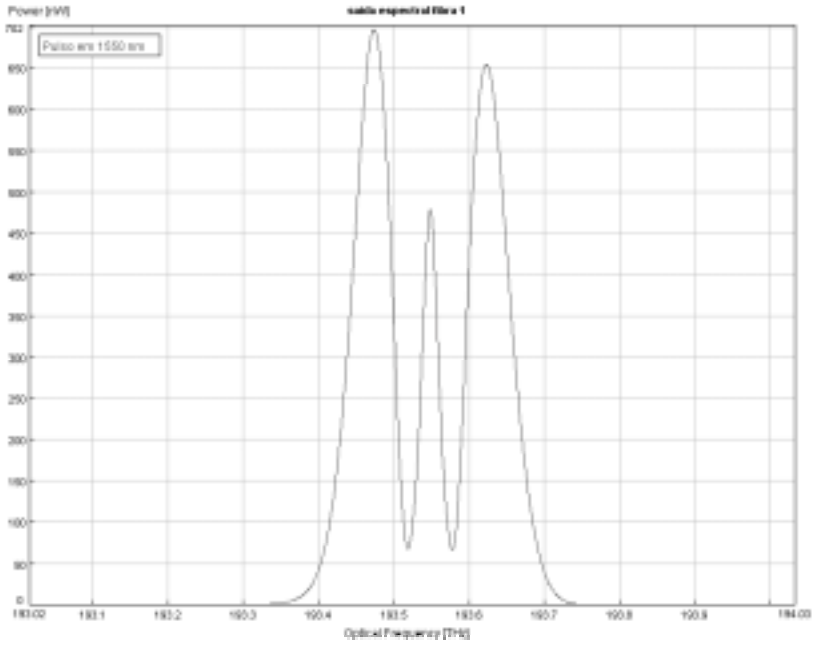


Figura 6.7: *Espectro de saída do pulso de referência (λ = 1550 nm, f = 193,54 THz), sendo alargado pela SPM*

Capítulo 7

CONSIDERAÇÕES FINAIS.

7.1 – Introdução.

Nesta dissertação apresentou-se um estudo teórico de efeitos não-lineares em fibras. Através deste estudo foram fundamentados conceitos e certas características, com ênfase nos fenômenos não-lineares de Automodulação de Fase e de Modulação de Fase Cruzada.

A partir da solução da equação de propagação do pulso, por métodos numéricos, foi possível avaliar a ação da não-linearidade, tanto no domínio do tempo como no domínio da freqüência. Estudou-se, ainda, o efeito linear da dispersão de velocidade de grupo, bem como o uso de uma técnica para minimizar as conseqüências deste efeito. Essa técnica baseia-se no uso de fibras de compensação de dispersão (*DCF*). Verificou-se, através de diagramas de olho, que, no regime linear, não importa a localização física da *DCF*.

No estudo da dispersão, da *SPM* e da *XPM*, verificou-se que a região de operação e o comprimento da fibra têm importância fundamental na forma final, temporal e espectral, do pulso. Esta análise baseou-se no conceito matemático de escalas de comprimentos de dispersão (L_D), de não-linearidade (L_{NL}) e de interação (L_W).

7.2 – Contribuições da Dissertação.

Nesse trabalho, procurou-se contribuir para o entendimento dos fenômenos lineares e não-lineares em fibras ópticas. Dentre estas contribuições, listamos algumas:

- A obtenção da equação Não-Linear de Schrödinger (*NLS*), que governa a propagação do pulso no regime não-linear.

- Descrição de efeitos lineares, enfatizando os efeitos das dispersões cromáticas de 1ª e 2ª ordens (β_2 e β_3). Mostrou-se como esse processo altera a forma temporal do pulsos. A Figura 7.1 mostra um esboço esquemático de um pulso propagando-se por uma fibra dispersiva, com $\beta_2 \neq 0$ e $\beta_3 = 0$.

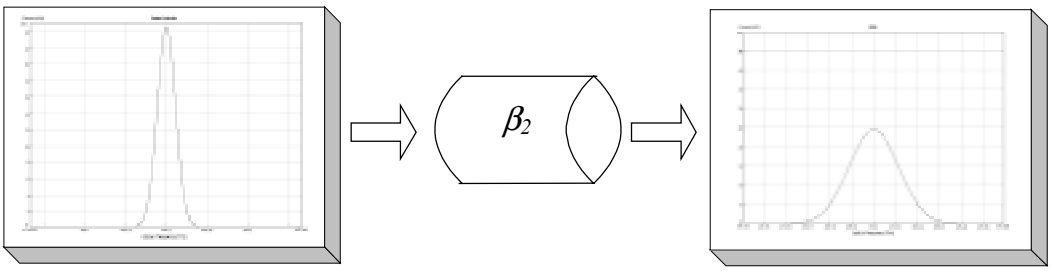


Figura 7.1: E*sboço* e*squemático de um pulso propagando-se por uma fibra dispersiva*

- O uso das técnicas de compensação de dispersão, através de fibras de compensação de dispersão. A Figura 7.2 representa um esboço esquemático da técnica de compensação; pode-se notar a ação da dispersão, que leva a um alargamento temporal, e, depois, este efeito sendo minimizado pela *DCF*.

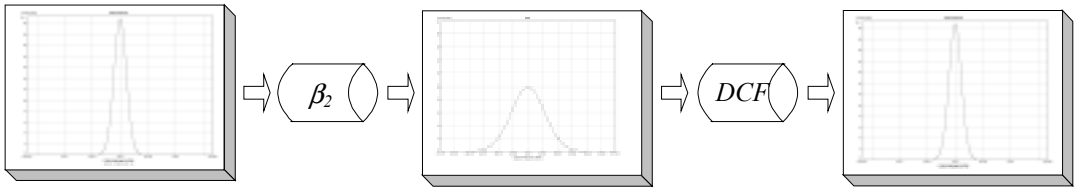


Figura 7.2: *Esboço esquemático da técnica de compensação de dispersão, usando a DCF*

- Em relação aos efeitos não-lineares, estudou-se superficialmente a *FWM*. A ação do efeito é vista na Figura 7.3, onde três pulsos interagem, criando um pulso

novo. Mostrou-se que, se os canais incidentes tiverem separação diferenciada, o efeito de intermodulação (*crosstalk*) pode ser minimizado.

- O efeito da *SPM* foi estudado no Capítulo 5, com um embasamento matemático do processo. Na Figura 7.3 este efeito está apresentado esquematicamente, onde ele provoca o alargamento espectral simétrico do pulso, como conseqüência de um deslocamento de fase não-linear imposto ao pulso, pela sua própria intensidade. Estudou-se o efeito da Instabilidade Modulacional, *IM*, que surge no regime anômalo de dispersão.

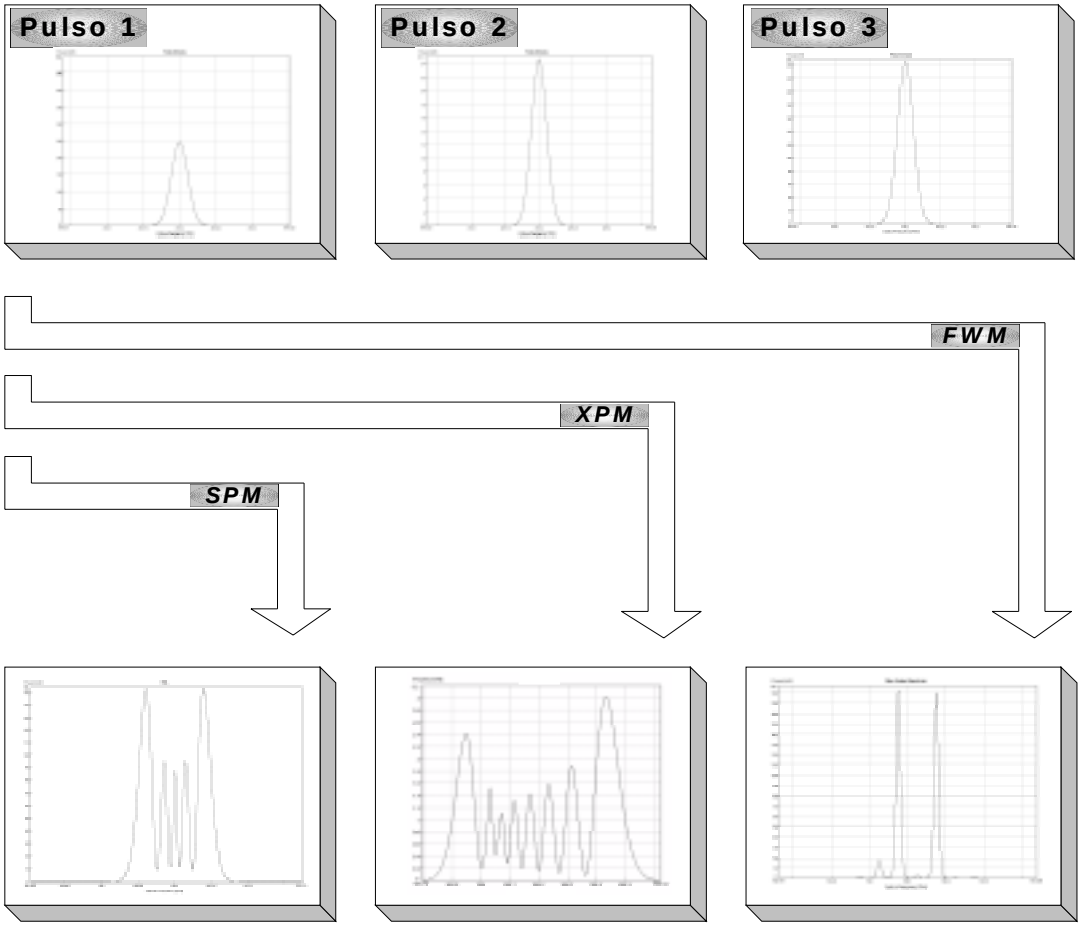


Figura 7.3: *Representação esquemática dos efeitos não-lineares, mostrando as características que cada efeito impõe, no domínio da freqüência, no pulso ao propagar-se pela fibra*

- O efeito da *XPM* foi estudado no Capítulo 6, obtendo-se a solução das equações acopladas (*NLS*) para o caso de dois em canais co-propagação. A Figura 7.3 mostra a representação deste fenômeno, onde que o mesmo surge da interação entre dois pulsos ópticos. Nesse caso, o pulso sofre alargamento espectral assi-

métrico, que advém da ação da modulação de fase não-linear devido à intensidade da potência do canal adjacente (*XPM*).

7.3 – Sugestões para Futuros Trabalhos.

Verificada a importância dos efeitos não-lineares em fibras, o estudo realizado nesta dissertação serve como base teórica para o avanço desse tema. Esta seção apresenta algumas sugestões para possíveis trabalhos futuros:

- Explorar o estudo de sistemas *WDM*, fazendo uma análise da influência dos efeitos não-lineares na implementação destes sistemas de comunicação. Uma vez conhecidas as características temporais e espectrais do pulso na saída da fibra, pode-se avaliar os parâmetros: Penalidade de Potência, Relação Sinal/Ruído, Taxa de Erro de Bits. Esse estudo pode ser feito comparando-se o desempenho de fibras padrão (*ST*), de dispersão deslocada (*DS*) e dispersão deslocada não nula (*NZDS*).

- Estudo sistemático de amplificadores ópticos, sendo estes amplamente usados em sistemas de transmissão para longas distâncias. O estudo deverá mostrar a interferência que estes dispositivos impõem aos sistemas. Esse estudo deve incluir o modelamento do ruído que advém do uso destes dispositivos (ruído de emissão espontânea).

- O efeito da *FWM* abordado nesta dissertação, sem ênfase, deve ser aprofundado incluindo, não só o estudo das conseqüências de penalização dos sistemas ópticos, mas, também, o estudo de dispositivos ópticos baseados nesse efeito, tal como: os conversores de λ.

- Um aprofundamento do estudo dos efeitos de espalhamento estimulado nas fibras (*SRS*, *SBS*), incluindo os amplificadores baseados no efeito Raman.

ANEXO A.

Dedução da Equação de Propagação do Capítulo 2.

Segue-se, aqui, a dedução das Eqs. (2.51) e (2.52), apresentadas no Capítulo 2. Retoma-se a equação de Helmholtz, dada por:

$$\nabla^2 \widetilde{E} + \varepsilon(\omega) k_0{}^2 \widetilde{E} = 0, \tag{A.1}$$

onde

$$\widetilde{E}(\vec{r}, \omega - \omega_0) = F(x,y)\, \widetilde{A}(z, \omega - \omega_0)\, e^{j\beta_0 t}. \tag{A.2}$$

Substituindo (A.2) em (A.1), tem-se:

$$\nabla^2 \left\{ F(x,y)\, \widetilde{A}(z, \omega - \omega_0)\, e^{j\beta_0 t} \right\} + \varepsilon(\omega) k_0{}^2 \left\{ F(x,y)\, \widetilde{A}(z, \omega - \omega_0)\, e^{j\beta_0 t} \right\} = 0$$

Para simplificar os cálculos, denota-se:

$$F = F(x,y) \quad e \quad \widetilde{A} = \widetilde{A}(z, \omega - \omega_0)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \widetilde{A}\, e^{j\beta_0 z} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \widetilde{A}\, e^{j\beta_0 z} + F \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\widetilde{A}\, e^{j\beta_0 z} \right] + \varepsilon(\omega) k_0{}^2 \left[F\, \widetilde{A}\, e^{j\beta_0 z} \right] = 0. \tag{A.3}$$

A derivada do terceiro termo da equação acima, satisfaz:

$$F \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\widetilde{A}\, e^{j\beta_0 z} \right] = F \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial z} \widetilde{A}\, e^{j\beta_0 z} \right] = F \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \widetilde{A}}{\partial z} \cdot e^{j\beta_0 z} + \widetilde{A} \cdot \frac{\partial}{\partial z} e^{j\beta_0 z} \right] =$$

$$= F\left[\frac{\partial^2 \widetilde{A}}{\partial z^2}\cdot e^{j\beta_0 z} + \frac{\partial \widetilde{A}}{\partial z} j\,\beta_0\, e^{j\beta_0 z} + \frac{\partial \widetilde{A}}{\partial z} j\,\beta_0\, e^{j\beta_0 z} - \widetilde{A}\,\beta_0{}^2\, e^{j\beta_0 z}\right]$$

$$= F\left[\frac{\partial^2 \widetilde{A}}{\partial z^2}\cdot e^{j\beta_0 z} + 2j\,\beta_0 \frac{\partial \widetilde{A}}{\partial z} e^{j\beta_0 z} - \widetilde{A}\,\beta_0{}^2\, e^{j\beta_0 z}\right].$$

Sendo $\widetilde{A}(z,\omega-\omega_0)$ uma função de derivada suave em *z*, pode-se assumir que sua derivada segunda é, praticamente, igual a zero; $\frac{\partial^2 \widetilde{A}}{\partial z^2} = 0$.

Retomando a Eq. (2.50) e reescrevendo-a, tem-se:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\widetilde{A}\,e^{j\beta_0 z} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\widetilde{A}\,e^{j\beta_0 z} + F\left[\,2j\,\beta_0 \frac{\partial \widetilde{A}}{\partial z} e^{j\beta_0 z} - \widetilde{A}\,\beta_0{}^2\, e^{j\beta_0 z}\right] +$$

$$+\,\varepsilon(\omega)k_0{}^2\left[F\,\widetilde{A}\,e^{j\beta_0 z}\right] = 0$$

Dividindo a última expressão por $\widetilde{A}e^{j\beta_0 z}$, e reorganizando, obtém-se:

$$\frac{1}{F}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right] + 2j\,\beta_0 \frac{1}{\widetilde{A}}\frac{\partial \widetilde{A}}{\partial z} - \beta_0{}^2 + \varepsilon(\omega)k_0{}^2 = 0$$

Pode-se reescrever esta igualdade na forma:

$$\frac{1}{F}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right] + \varepsilon(\omega)k_0{}^2 = -2j\,\beta_0 \frac{1}{\widetilde{A}}\frac{\partial \widetilde{A}}{\partial z} + \beta_0{}^2$$

Utiliza-se, agora, o método de separação de variáveis, na forma:

$$\frac{1}{F}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right] + \varepsilon(\omega)k_0{}^2 = \widetilde{\beta}^2 = -2j\,\beta_0 \frac{1}{\widetilde{A}}\frac{\partial \widetilde{A}}{\partial z} + \beta_0{}^2$$

onde $\widetilde{\beta}$ é a constante de propagação, obtida resolvendo-se a equação de auto-valor em *F*.

Deste modo, obtém-se um sistema composto pelas equações:

1ª Equação:

$$\frac{1}{F}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right]+\varepsilon(\omega)K_0{}^2=\tilde{\beta}^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\varepsilon(\omega)K_0{}^2\,F=F\,\tilde{\beta}^2$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+F\left[\varepsilon(\omega)K_0{}^2-\tilde{\beta}^2\right]=0 \qquad \text{(A.4)}$$

2ª Equação:

$$-2j\,\beta_0\,\frac{1}{\tilde{A}}\frac{\partial\tilde{A}}{\partial z}+\beta_0{}^2=\tilde{\beta}^2 \Rightarrow 2j\,\beta_0\,\frac{\partial\tilde{A}}{\partial z}-\tilde{A}\,\beta_0{}^2+\tilde{A}\,\tilde{\beta}^2=0$$

$$2j\,\beta_0\,\frac{\partial\tilde{A}}{\partial z}+\tilde{A}\left[\tilde{\beta}^2-\beta_0{}^2\right]=0 \qquad \text{(A.5)}$$

Que são as equações apresentadas no Capítulo 2, página 28.

ANEXO B.

O Método Split-Step Fourier.

O método *Split-Step Fourier* (*SSF*) é um dos métodos numéricos mais empregado na solução de propagação de pulsos em guias ópticos. Ele apresenta um menor tempo de computação, em relação a outros métodos. Isso se deve ao uso do algoritmo de Transformada Rápida de Fourier (*FFT- Fast Fourier Transform*) [7].

A idéia básica do *SSF* consiste em dividir a fibra em pequenos pedaços de comprimento, *h*, assumindo que a dispersão e a não-linearidade da fibra agem isoladamente em alternância. A Figura B.1 mostra, esquematicamente, essa idéia.

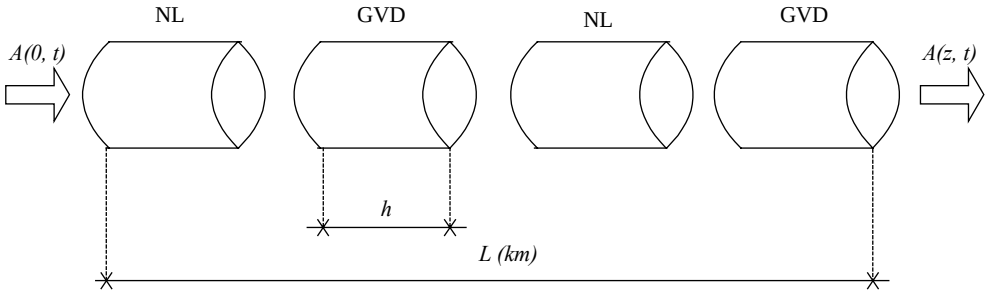


Figura B.1: *Representação do método SSF*

Para uma maior compreensão do método, escreve-se a equação de propagação na forma:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \left(\hat{D} + \hat{N}\right)A \tag{B.1}$$

onde:

$$\hat{D} = -\frac{j}{2}\beta_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\alpha}{2} \tag{B.2}$$

$$\hat{N} = j\gamma \cdot |A|^2, \tag{B.3}$$

sendo $\hat{D}$ um operador ligado aos efeitos lineares, ou seja à dispersão e às perdas, enquanto $\hat{N}$ é o operador associado aos efeitos não-lineares. Quando o pulso propaga-se do ponto z até $z + h$, tem-se:

$$A(z+h,t) = e^{h\hat{D}} e^{h\hat{N}} A(z,t) \tag{B.4}$$

Levando em conta que o operador $\hat{D}$ tem atuação no domínio da freqüência, ele é expresso por:

$$e^{h\hat{D}} B(z,t) = F_t^{-1} e^{\left[h\hat{D}(j\omega)\right]} F_t B(z,t) \tag{B.5}$$

onde F_t representa a Transformada de Fourier. Sendo $\hat{D}(j\omega)$ obtido a partir da Eq. (B.2), com a substituição do operador ($\partial/\partial t$) por $j\omega$, onde ω é a freqüência.

Na prática, a escolha de h é feita de modo a não permitir que a fase não-linear $\phi_{NL} = \gamma|A|^2 h$, acumulada no intervalo incrementado, seja maior que alguns mili-radianos.

ANEXO C.

Dedução da Equação da *XPM*.

Apresenta-se, aqui, a obtenção da expansão binomial da Eq. (6.2):

$$\vec{P}_{NL}(\vec{r},t) = \varepsilon_0 \chi^{(3)} \hat{x} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} \left(A^3 + 3A^2 B + 3AB^2 + B^3 \right) \right] \right\} \tag{C.1}$$

Resolvendo-se os produtos, a partir do uso da definição feita no Capítulo 6, onde $A = E_1 e^{(-j\omega_1 t)} + E_2 e^{(-j\omega_2 t)}$ e $B = E_1^* e^{(j\omega_1 t)} + E_2^* e^{(j\omega_2 t)}$, tem-se que:

$$A^3 = \left(E_1 e^{(-j\omega_1 t)} + E_2 e^{(-j\omega_2 t)} \right)$$

$$A^3 = E_1^3 e^{-3j\omega_1 t} + 3E_1^2 E_2 e^{-(2\omega_1+\omega_2)t} + 3E_1 E_2^2 e^{-(\omega_1+2\omega_2)t} + E_2^3 e^{-3j\omega_2 t} \Rightarrow$$

$$3A^2 B = 3\left(E_1 e^{-j\omega_1 t} + E_2 e^{-j\omega_2 t} \right)^2 \cdot \left(E_1^* e^{j\omega_1 t} + E_2^* e^{j\omega_2 t} \right) \Rightarrow$$

$$3A^2 B = 3\left(E_1^2 e^{-2j\omega_1 t} + 2E_1 E_2 e^{-(\omega_1+\omega_2)t} + E_2^2 e^{-2j\omega_2 t} \right) \cdot \left(E_1^* e^{j\omega_1 t} + E_2^* e^{j\omega_2 t} \right) \Rightarrow$$

$$3A^2 B = 3(E_1^2 E_1^* e^{-j\omega_1 t} + 2E_1 E_1^* E_2 e^{-j\omega_2 t} + E_1^* E_2^2 e^{j(\omega_1-2\omega_2)t} + E_1^2 E_2^* e^{j(-2\omega_1+2\omega_2)t}$$

$$+ E_1^2 E_2^* e^{j(-2\omega_1+\omega_2)t} + 2E_1 E_2 E_2^* e^{-j\omega_1 t} + E_2^2 E_2^* e^{-j\omega_2 t}),$$

$$3AB^2 = 3\left(E_1 e^{-j\omega_1 t} + E_2 e^{-j\omega_2 t} \right) \cdot \left(E_1^* e^{j\omega_1 t} + E_2^* e^{j\omega_2 t} \right)^2 \Rightarrow$$

$$3A^2 B = 3\left(E_1 e^{-j\omega_1 t} + E_2 e^{-j\omega_2 t} \right) \cdot \left(E_1^{*2} e^{j2\omega_1 t} + 2E_1^* E_2^* e^{j(\omega_1+\omega_2)t} + E_2^{*2} e^{j2\omega_2 t} \right)$$

$$3AB^2 = 3(E_1 E_1^{*2} e^{j\omega_1 t} + 2E_1 E_1^* E_2^* e^{j\omega_2 t} + E_1 E_2^{*2} e^{j(-\omega_1+2\omega_2)t} +$$
$$E_1^{*2} E_2 e^{j(2\omega_1-\omega_2)t} + 2E_1^* E_2 E_2^* e^{j\omega_1 t} + E_2 E_2^{*2} e^{j\omega_2 t})$$

$$B^3 = \left(E_1^* e^{j\omega_1 t} + E_2^* e^{j\omega_2 t}\right)^3 \Rightarrow$$

$$B^3 = E_1^{*3} e^{j3\omega_1 t} + 3E_1^* E_2^* e^{j(2\omega_1+\omega_2)t} + 3E_1^* E_2^{*2} e^{j(\omega_1+2\omega_2)t} + E_2^{*3} e^{j3w\omega_2 t}$$

Substituindo este valores na Eq. (C.1):

$$\vec{P}_{NL}(\vec{r},t) = \frac{\varepsilon_0 \chi^{(3)}}{4} \hat{x}\{ \frac{1}{2} [E_1^3 e^{-j\omega_1 t} + 3E_1^2 E_2 e^{-j(2\omega_1+\omega_2)t} + 3E_1 E_2^2 e^{-j(\omega_1+2\omega_2)t}$$

$$+ E_2^3 e^{-j3\omega_2 t} + 3[E_1^2 E_1^* e^{-j\omega_1 t} + 2E_1 E_1^* E_2 e^{-j\omega_2 t} + E_1^* E_2^2 e^{-j(2\omega_2-\omega_1)t}$$

$$+ E_1^2 E_2^* e^{-j(2\omega_1-\omega_2)t} + 2E_1 E_2 E_2^* e^{-j\omega_1 t} + E_2^2 E_2^* e^{-j\omega_2 t}] + 3[E_1 E_1^{*2} e^{j\omega_1 t}$$

$$+ 2E_1 E_1^* E_2^* e^{j\omega_2 t} + E_1 E_2^{*2} e^{j(2\omega_2-\omega_1)t} + E_1^{*2} E_2 e^{j(2\omega_1-\omega_2)t} + 2E_1^* E_2 E_2^* e^{j\omega_1 t}$$

$$+ E_2 E_2^{*2} e^{j\omega_2 t}] + E_1^{*3} e^{j3\omega_1 t} + 3E_1^{*2} E_2^* e^{j(2\omega_1+\omega_2)t} + 3E_1^* E_2^{*2} e^{j(\omega_1+2\omega_2)t} + E_2^{*2} e^{j3\omega_2 t}]\}$$

Os termos oscilando em $3\omega_j$, bem como os termos oscilando em $(2\omega_1+\omega_2)$ e $(2\omega_2+\omega_1)$, serão desconsiderados nesta análise, visto que são geralmente desprezíveis em fibras ópticas, devido à condição de descasamento de fase com a onda incidente. Sendo assim, tem-se os seguintes termos resultantes:

$$\vec{P}_{NL}(\vec{r},t) = \frac{\varepsilon_0 \chi^{(3)}}{4} \hat{x}\{ \frac{1}{2} [E_1^3 e^{-j\omega_1 t} + 3[(E_1^2 E_1^* + 2E_1 E_1^* E_2) e^{-j\omega_1 t}$$

$$+ (E_2^* E_2^2 + 2E_1 E_1^* E_2) e^{-j\omega_2 t} + E_1^2 E_2^* e^{-j(2\omega_1-\omega_2)t} +$$

$$+ E_1^* E_2^2 e^{-j(2\omega_2-\omega_1)t}] + 3[(E_1^{*2} E_1 + 2E_1^* E_2^* E_2) e^{j\omega_1 t} +$$

$$(E_2^{*2} E_2 + 2E_1 E_1^* E_2) e^{j\omega_2 t} + E_1^{*2} E_2 e^{j(2\omega_1-\omega_2)t} + E_2^{*2} E_1 e^{j(2\omega_2-\omega_1)t}]\}$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

[1] A. Tarmo, *Introduction to Telecommunications Networks Engineering*, 1998.

[2] J. A. J, Ribeiro, *Comunicações Ópticas*, 1ª Edição, Editora Érica, 2003.

[3] A., Yariv e J. P., Gordon, "The Laser", *Proceedings of the IEEE*, (1963).

[4] Willian, B. Jones Jr., *Optical Fiber Communication Systems*, Ted Buchholz, 1987.

[5] J. I., Yamada, S. Machida, e T. Kimura, "2 Gbit-s Optical Transmission Experiments at 1.3 μm with 44 km Single-mode Fiber", *Electron. Lett*., 17, pp. 479-480, 1981.

[6] Tingye Li, "The Impact of Optical Amplifiers on Long-Distance Lightwave Telecomunications", *Proceedings of the IEEE*, vol. 81, nº 11, November (1993);

C. Randy Giles e Emmanuel Desurvire, "Modeling Erbium-Doped Fiber Amplifiers", *Proceedings of the IEEE*, 1991.

[7] Govind. P., Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, 3rd Ed., Academic Press, 2001.

[8] M.J., Potasek e G.P., Agrawal, "Self Amplitude Modulation of Pulses in Nonlinear Dispersive Fibers", *Physical Review A* 36, pp. 3862, 1987.

[9] M. R. C., Caputo e M. E., Gouvêa, "Fatores que Influenciam a Capacidade e o Desempenho dos Sistemas com Amplificadores Óticos (Os Atuais Sistemas Óticos de Alta capacidade)", *Revista do Inatel*, vol. 02, nº 02 1999.

[10] Haroldo Takashi Hattori, "Fibras Ópticas de Baixa Não-Linearidade e Dispersão para Enlaces Ópticos de Longa Distância", Anais do Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, pp. 631-634, 2002.

[11] Marcelo, Alonso e Edward J., Finn, *Física: um curso universitário*, Vol. II – *Campos e Ondas*. 1ª Ed., Edgard Blücher Ltda, 1972.

[12] J. D, Kraus e D. A., Fleisch, *Electromagnetics with Applications*,. Fifth Edition 1999, McGraw-Hill International;

J. D, Kraus e K. R., Carver, *Eletromagnetismo*, 2ª Edição, Guanabara Dois.

[13] Rajiv, Ramaswami e Kumar N., Sivarajan *Optical Networks – A Pratical Perspective*, 2nd Ed., Academic Press, 2002.

[14] Gerd, Keiser, *Optical Fibers Communications*,. 3rd Ed., McGraw-Hill, 2000.

[15] P. A, Franken e, J. F., Ward, "Optical Harmonics and Nonlinear Phenomena", *Reviews of Modern Physics*, vol. 35, Nº 01, pp. 23-39,1963.

[16] Amnon, Yariv, *Optical Electronics in Modern Comunnications*. 5th Ed., Oxford University Press, 1997.

[17] Robert G., Waarts, "Nonlinear Effects in Coherent Multichannel Transmission through Optical Fibers", *Proceedings of the IEEE*, vol. 78, Nº 08, pp.1344-1368, 1990.

[18] A. H., Haus, *Waves and Fields in Optoelectronics*,. 1st Ed., Prentice-Hall, 1984.

[19], M. R., Spiegel, *Manual de Fórmulas, Métodos e Tabelas de Matemática,* 2ª Ed. Revisada e Ampliada, Makron Books.

[20] Dietrich, Marcuse *Light Transmission Optics*, 2ª Ed., Robert E. Krieger Publishing Company, 1989.

[21] Govind. P., Agrawal, *Fiber Optics Communication Systems*, 3rd Ed., Wiley-Interscience, 2002.

[22] Dietrich, Marcuse, *Theory of Dielectric Optical Waveguides*, 2nd Ed., Academic Press, 1991.

[23] J. M. Senior, *Optical fiber communication – Principles and Practice*, Prentice-Hall International Series in Optoelectronics, Prentice- Hall International, Inc., Capítulo 2, 1985.

[24] Amnon, Yariv, *Optical Electronics in Modern Communications*, Oxford University Press, Inc.,1997.

[25] R. Ramaswami, e N. K., Sivarajan, *Optical Networks*, 1st. Edition, New York, Morgan Kaufmann Publishers, 1998.

[26] M. Alonso, *Fundamental University Physics*, 3rd. Edition, Syracuse, Wesley Publishing Company, 1967.

[27] D. Marcuse, "Interdependence of Waveguide and Material Dispersion", *Applied Optics*, New Jersey , volume 18, número 17/1, pp.2930–2932, 1979.

[28] Maria Regina C. Caputo, *Sistemas de Comunicações Ópticas*, notas de aula do INATEL – Instituto Nacional de Telecomunicações, 2001.

[29] Bob Jopson e Alan Gnauck, "Dispersion Compensation for Optical Fiber Systems", *Proceedings of the IEEE*, June 1995.

[30] J. J. Yu, Kejian Guan, Zhenbo Xu e Bojun Yang, "The Effects of Different Dispersion Compensation Ratios on Nonlinear Single Channel and WDM Systems", *Optics Communications*, pp. 85-90, 1990.

[31] M.R. C. Caputo e M.E. Gouvea, "Dispersion Slope Effects of the Compensation Dispersion Fiber for BroadBand Dispersion Compensation in the Presence of Self-Phase Modulation", *Optics Communications* 178, pp. 323 – 331, 15 May 2000.

[32] André Girard, "Handling Special Effects: Nonlinearity, Chromatic dispersion, Sólitons Waves", *Lightwave*, 2000.

[33] Jeff Hecht, "Mitigating Nonlinear effects in Long Haul Transmission Systems", *Laser Focus World*, 2002.

[34] Mário M. Freire, José A. R. Pacheco de Carvalho, Álvaro M. F. de Carvalho e Henrique J. ª da Silva, "Limitações Impostas à Transmissão Óptica a 1550 nm por Efeitos Não-Lineares em Fibras Monomodo Padrão", Instituto de Telecomunicações – Pólo de Coimbra, Universidade de Coimbra.

[35] Manual da Fibra Padrão – *ST*, "*Corning® SMF-28™ CPC6*", fabricada pela Corning Incorporated Telecommunications Products Division.

[36] Manual da Fibra de Dispersão Deslocada – *DS*, "*Corning® SMF/DS™ CPC6*", fabricada pela Corning Incorporated Telecommunications Products Division.

[37] Manual da Fibra de Dispersão Deslocada Não Nula – *NZDS*, "*Corning® Metrocor® Optical Fiber*", fabricada pela Corning Incorporated Telecommunications Products Division.

[38] Robert McMahon, "Nonzero Dispersion Shifted Fiber: The Choice for DWDM", *WDM Solutions*, 2001.

[39] R. H. Stolen and C. Lin, Physical Review, A 17, pp.1448, 1978.

[40] E. P. Ippen, C. V. Shank e T. K. Gustafson, "Self-Phase Modulation of Picoseconds Pulses in Optical Fibers", *Applied Physics Letters*, vol. 24, nº 4, 15 February 1974.

[41] Robert A. Fisher e W. Bischel, "The Role of Linear Dispersion in Plane-Wave Self-Phase Modulation", *Applied Physics Letters*, vol. 23, nº 12, 15 December 1973.

[42] T. K. Gustafson, J. P. Taran, H. A. Haus, J. R. Lifsitz, P. L. Kelley, Physical Review , vol. 177, nº 1, 5 January (1969).

[43] Steven C. Pinault e M.J. Potasek, "Frequency Broadening by Self- Phase Modulation in Optical Fibers", *J. Opt. Soc. Am. B2*, pp. 1318, 1985.

[44] Linn F. Mollenauer e Roger H. Stolen, "Sóliton in Optical Fibers", *Fiberoptic Technology*, April (1982).

[45] Akira Hasegawa e Frederick Tappert, "Transmission of Stationary Nonlinear Optical Pulses in Dispersion Dielectric Fibers I. Anomalous Dispersion", *Applied Physics Letters*, vol. 23, nº 3, 1 August 1973.

[46] H. J. Blon e N. J. Doran, "High Bit Rate Communication Systems Using Non-Linear Effects", *Optics Communications*, 15 August 1982.

[47] L. F. Mollenauer, R. H. Stolen e J. P. Gordon, "Experimental Observation of Picosecond Pulse Narrowing and Sólitons in Optical Fibers*", Physical Review Letters*, 29 September 1980

M. R. C. Caputo e M. E. Gouvêa, "Sólitons em Fibras Óticas: Obtenção e Solução da Equação que Governa o Fenômeno", *Anais da Telexpo 95 – 5º Congresso Internacional de Telecomunicações*, março 1995.

[48] V. E. Zakhardv and A. B. Shabat, "*Interaction Between Sólitons in a Stable Medium*", Sob. Phys. JETP, vol. 37, November (1973).

[49] M.J. Potasek, G.P. Agrawal e S.L. Pinault, "Analytic and Numerical study of Pulse Broadening in Nonlinear Dispersive Optical Fibers", *J. Opt. Soc. Am. B3*, pp. 205, 1986.

[50] Márcio Freitas, Renato T.R. de Almeida, Moisés R.N. Ribeiro e Luiz C. Calmon, "Limits on Bit Rate Capacity Improvement Induced by *SPM* in Installed Standard Fiber Links at 1550 nm", *Proceedings of the IEEE*, pp. 606.

[51] K. Tai, A. Hasegawa, e A. Tomita, "Observation of Modulation Instability in Optical Fibers", *Physical Review Letters*, Volume 56, Number 2, 1985.

[52] G. P. Agrawal, "Modulation Instability Induced by Cross-Phase Modulation", *Physical Review Letters*, 24 August 1987.

[53] M.J. Potasek, G.P. Agrawal e S.L. Pinault, “Self Amplitude Modulation of Optical Pulses in Nonlinear Dispersive Fibers”, *Physical Review Letters A*, Volume 36, Number 8, 1987.

[54] Márcio Freitas, Luiz de Calazans Calmon e Renato T. R. Almeida, “Análise da Interferência entre Canais Causado pelo Efeito de Modulação Cruzada de Fase em Sistemas WDM”, Anais do simpósio Brasileiro de Telecomunicações.

[55] M. Shtaif e M. Eiselt, “Analysis of Instability Interference Caused by Cross-Phase Modulation in Dispersive Optical Fibers”, *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 10, nº 7, July 1998.

[56] R. R. Alfano, P. L. Baldeck, P. P. Ho e G. P. Agrawal, “Cross-Phase modulation and Induced Focusing Due to Optical Nonlinearities in Optical Fibers and Bulk Materials”, *J. Optical Soc. Am. B*, vol. 6, nº 4, 4 April 1989.

[57] G. P. Agrawal, P. L. Baldeck e R. R. Alfano, “Temporal and Spectral Effects of Cross-Phase Modulation on Copropagation Ultrashort Pulses in Optical Fibers”, *Physical Review A*, vol. 40, nº 9, November 1989.

[58] P. L. Baldeck e R. R. Alfano, “Induced-frequency Shift of Copropagation Ultrafast optical Pulses”, *Appl. Phys. Lett*, 52, pp. 23, 6 June 1988.

[59] Eugenio Iannone, Francesco Matera, Antonio Mecozzi e Marina Settembre, *Nonlinear Optical Communication Networks*, John Willey & Sons, Inc.,1998.

[60] Ivan Kaminow e Thomas L. Kock, *Optical Fiber Telecommunication III A*, Academic Press,1997.